

1 Streutheorie

Die Streuung von Teilchen an Potentialen oder anderen Teilchen ist ein zentrales Thema der Quantenphysik, das insbesondere auch für die Hochenergiephysik wichtig ist. Dort werden die Eigenschaften der Elementarteilchen mit Hilfe von Streuprozessen untersucht. Streuexperimente sind aber auch in der Festkörperphysik wichtig, da man damit zum Beispiel die Energiespektren oder Materialstrukturen analysieren kann. In diesem Kapitel werden wir uns auf *elastische Streuprozesse* beschränken, bei denen die Energie während des Streuprozesses erhalten ist. Ein besondere Fall davon ist die Potentialstreuung.

1.1 Potentialstreuung

Wir untersuchen hier die Situation, in der ein Teilchen, dargestellt durch eine ebene Welle (oder ein Wellenpaket), an einem Streuzentrum, dargestellt durch ein kurzreichweitiges Potential, gestreut, d.h. aus seiner Bahn abgelenkt, wird. Ein 'kurzreichweitiges' Potential ist durch die Bedingung charakterisiert, dass

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} |\mathbf{x}|V(\mathbf{x}) = 0, \quad (1.1.1)$$

d.h. dass es schneller als $1/r$ im Unendlichen abfällt. Hierbei wurde der Koordinatenursprung als Zentrum des Potentials angenommen. Wir wollen weiterhin annehmen, dass es einen charakteristischen Radius R gibt, der die 'Reichweite' des Potentials beschreibt. Insbesondere können wir also für $r \gg R$ das Potential im wesentlichen vernachlässigen.

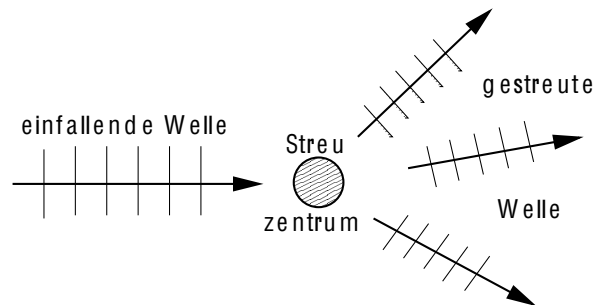


Abbildung 1: Die einfallende Welle wird an dem Streuzentrum gestreut.

Für ein solches Potential wollen wir nun die zeit-unabhängige Schrödingergleichung lösen, d.h. wir wollen die stationäre Wellenfunktion finden, die ein Teilchen in diesem Streupotential beschreibt

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + E_k \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}). \quad (1.1.2)$$

Der Wellenvektor \mathbf{k} ist ein Parameter, der die Richtung der einfallenden ebenen Welle beschreibt. Er legt gleichzeitig die Energie $E_{\mathbf{k}}$ gemäß

$$E_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad k = |\mathbf{k}| \quad (1.1.3)$$

fest. Wir erwarten, dass wir für jeden Wellenvektor \mathbf{k} eine Lösung finden können. Um diese explizit zu finden, betrachten wir die Greensfunktion $G(\mathbf{x}, k)$, die durch

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + E_k \right) G(\mathbf{x}, k) = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) \quad (1.1.4)$$

charakterisiert ist. Die tatsächliche Lösung ist dann durch die Integralgleichung

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) + \int d^3\mathbf{y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, k) V(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \quad (1.1.5)$$

beschrieben, wobei $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ die Lösung der homogenen Gleichung (1.1.2) ist, d.h. die ebene Welle

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.1.6)$$

beschreibt. Diese Integralgleichung nennt man die **Lippmann-Schwinger-Gleichung**. Es ist nicht schwer zu sehen, dass (1.1.5) zu (1.1.2) äquivalent ist: dazu wenden wir den Differentialoperator auf der linken Seite von (1.1.2) auf die Lippmann-Schwinger-Gleichung an:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + E_k \right) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) &= \left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + E_k \right) \phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int d^3\mathbf{y} \left[\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + E_k \right) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, k) \right] V(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) , \\ &= \int d^3\mathbf{y} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) V(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) = V(\mathbf{x}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) , \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

was gerade mit (1.1.2) übereinstimmt.

Um diese Gleichung nun zu lösen, müssen wir zunächst die Greensfunktion bestimmen. Eine explizite Lösung erhält man durch Fouriertransformation. Dazu schreiben wir

$$G(\mathbf{x}, k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \tilde{G}(\mathbf{q}, k) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (1.1.8)$$

und wenden den Differentialoperator in der definierenden Gleichung der Greensfunktion an:

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 + E_k \right) G(\mathbf{x}, k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \left(-\frac{\hbar^2 \mathbf{q}^2}{2m} + E_k \right) \tilde{G}(\mathbf{q}, k) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \delta^{(3)}(\mathbf{x}) . \quad (1.1.9)$$

Die letzte Gleichung gilt also, falls

$$\tilde{G}(\mathbf{q}, k) = \frac{1}{E_k - \frac{\hbar^2 \mathbf{q}^2}{2m}} = \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{k^2 - \mathbf{q}^2} \quad (1.1.10)$$

ist. Damit erhalten wir also für $G(\mathbf{x}, k)$

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{x}, k) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{q} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}}{E_k - \frac{\hbar^2\mathbf{q}^2}{2m}} \\
 &= -\frac{m}{2\pi^2\hbar^2} \int_0^\infty dq q^2 \int_1^{-1} d(\cos\theta) \frac{e^{iqr\cos\theta}}{k^2 - q^2} \\
 &= \frac{m}{2\pi^2 i r \hbar^2} \int_{-\infty}^\infty dq q \frac{e^{iqr}}{k^2 - q^2}, \tag{1.1.11}
 \end{aligned}$$

wobei $r = |\mathbf{x}|$. Das letzte Integral können wir nun mit Hilfe des Residuensatzes lösen. Dabei ersetzen wir das reelle q -Integral durch ein Kontour-Integral; da $r > 0$ schliessen wir das Kontour-Integral immer in der oberen Halbebene, da dort der Beitrag des grossen Halbkreises exponentiell abfällt. Der Integrand von (1.1.11) besitzt Pole bei $q = \pm k$. Diese liegen gerade auf dem Integrationsweg, und ihre Behandlung wird durch die Randbedingungen bestimmt: da wir für $r \rightarrow \infty$ eine *auslaufende* Welle erhalten wollen, müssen wir den Pol bei $q = +|k|$ mitnehmen, jenen bei $q = -|k|$ jedoch nicht. Deshalb wählen wir den Integrationsweg γ_r gemäss

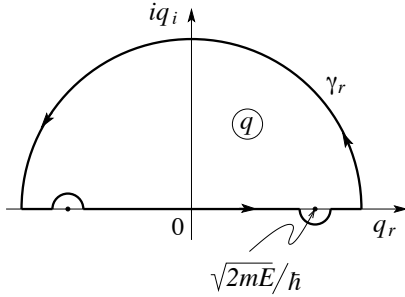


Abbildung 2: Integrationsweg in der komplexen q -Ebene. Durch einschliessen des Poles bei $q = |k| = +\sqrt{2mE}/\hbar$ garantieren wir die Asymptotik einer auslaufenden Welle $\propto \exp[i(qr - Et/\hbar)]$. Der Pol bei $q = -|k| = -\sqrt{2mE}/\hbar$ erzeugt eine einlaufende Welle $\propto \exp[-i(qr + Et/\hbar)]$. Die Wahl der Kontour wird also durch die Randbedingung festgelegt.

und erhalten damit

$$G(\mathbf{x}, k) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{1.1.12}$$

Diese Form kann nun in die Lippmann-Schwinger-Gleichung eingesetzt werden und wir finden damit

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{y} \frac{e^{ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} V(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}). \tag{1.1.13}$$

Natürlich haben wir (1.1.5) immer noch nicht wirklich gelöst, wir haben lediglich die Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingungen in eine Integralgleichung umgeschrieben. In der Praxis kann man diese Gleichung nur numerisch lösen. Ausserdem können wir allgemeine Schlüsse über die Struktur des Streuvorgangs daraus ziehen.

Die genaue Wellenfunktion in der Region des Streupotentials ist kompliziert und nicht von unmittelbarem Interesse in einem Streuexperiment. Nach einem Streuprozess möchten wir nämlich das Teilchen in hinreichend grosser Entfernung vom Streuzentrum in einem

Detektor beobachten, d.h. wir interessieren uns nur für die Wellenfunktion für einen Bereich, wo $|\mathbf{x}|$ viel grösser als die Reichweite R des Potentials $V(\mathbf{y})$ ist, welches wir uns um den Koordinatenursprung zentriert denken. Daher können wir in (1.1.13) folgende Näherung einführen:

$$k|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = k\sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}} \approx kr - k\frac{\mathbf{x}}{r} \cdot \mathbf{y} = kr - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{y} \quad (1.1.14)$$

wobei $\mathbf{k}' = k\frac{\mathbf{x}}{r}$ ($|\mathbf{y}| < R$). Daher gilt für $|\mathbf{x}| \gg R$

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (1.1.15)$$

wobei

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y}} V(\mathbf{y}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{y}) \quad (1.1.16)$$

nur von der Richtung von \mathbf{x} abhängt.

1.2 Wirkungsquerschnitt

Zur Interpretation dieses Resultats ist es illustrativ, die Wahrscheinlichkeitsstromdichte für $r \gg R$ zu analysieren. Wir erinnern uns daran, dass die Wahrscheinlichkeitsstromdichte für die Wellenfunktion ψ durch

$$\mathbf{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \quad (1.2.1)$$

definiert ist. Nun enthält die Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{k}}$ in (1.1.15) einen Anteil der einfallenden und der gestreuten Welle. Die Stromdichten der beiden Terme in (1.1.15) separat haben die Form

$$\mathbf{j}_{\text{ein}} = \frac{\hbar \mathbf{k}}{m} \quad (1.2.2)$$

$$\mathbf{j}_{\text{streu}} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{1}{r^2} 2ik \nabla r |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 + \mathcal{O}(r^{-3}) = \frac{\hbar \mathbf{k}'}{m} \frac{|f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2}{r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}), \quad (1.2.3)$$

wobei $|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ und der $\mathcal{O}(r^{-3})$ -Term von der Ableitung von \mathbf{k}' nach \mathbf{x} in $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ herkommt. Die Streustromdichte ist vom Streuzentrum aus radial nach aussen gerichtet. Für eine Kugel mit Radius $r \gg R$ ums Zentrum gilt, dass der Streustrom durch ein Raumwinkelement $d\Omega$ für grosse r (für die wir nur den führenden Term betrachten müssen) nicht von r abhängt:

$$|\mathbf{j}_{\text{streu}}| r^2 d\Omega = |\mathbf{j}_{\text{ein}}| |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 d\Omega. \quad (1.2.4)$$

Daraus folgt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{\text{Streustrom durch } d\Omega}{\text{einfallende Stromdichte pro Fläche}} = \frac{|\mathbf{j}_{\text{streu}}| r^2}{|\mathbf{j}_{\text{ein}}|} = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2, \quad (1.2.5)$$

was den **differentiellen Wirkungsquerschnitt** des Streupotentials definiert. Dieses Verhältnis ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein mit Impuls \mathbf{k} einfallendes Teilchen durch das Potential in ein Raumwinkelement $d\Omega$ um die Richtung von \mathbf{k}' abgelenkt wird. Der totale **Wirkungsquerschnitt** ist das Winkelintegral von $d\sigma/d\Omega$:

$$\sigma = \int d\Omega |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2, \quad (1.2.6)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass das einfallende Teilchen überhaupt aus seiner Bewegungsrichtung abgelenkt wird.

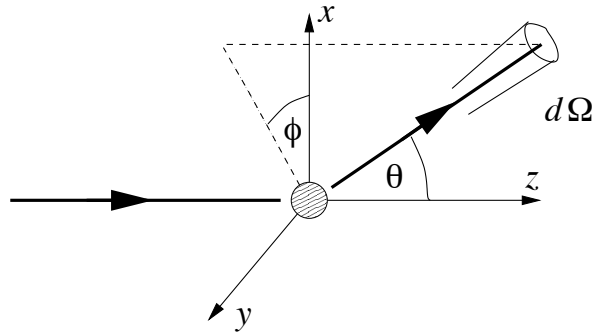


Abbildung 3: Wirkungsquerschnitt

Der ungestreute Anteil der Wellenfunktion ist nicht in $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ enthalten. Falls die Wahrscheinlichkeit für alle Richtungen identisch ist, finden wir $|f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \sigma/4\pi$. Für den allgemeinen Fall benötigen wir die Lösung der Lippmann-Schwinger-Gleichung, um mit (1.1.16) $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ausdrücken zu können.

1.3 Interlude: Kastenpotential

Die nötigen Techniken, die wir im weiteren brauchen, involvieren die sphärischen Bessel- und Neumannfunktionen, die wir am Beispiel des sphärisch symmetrischen Kastenpotentials diskutieren. Das zugehörige Potential ist

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < a \\ 0 & r > a . \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Die Schrödinger-Gleichung für die Radialkomponente der Wellenfunktion lautet

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R(r) = ER(r), \quad (1.3.2)$$

wobei wir den Ansatz $\psi(\mathbf{x}) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ gemacht haben. Da das Potential stückweise konstant ist, betrachten wir zunächst die Lösung in einem Intervall konstanten Potentials mit $E > V$ und definieren

$$k = \frac{\sqrt{2m(E - V)}}{\hbar}. \quad (1.3.3)$$

Damit wird (1.3.2)

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] R(r) = 0 . \quad (1.3.4)$$

Nach Substitution von $\rho = kr$ wird diese Gleichung

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right] R(\rho) = 0 . \quad (1.3.5)$$

1.3.1 Sphärische Besselfunktionen

Diese Differentialgleichung kann elementar gelöst werden und führt auf die sphärische Bessel-Funktionen. Wir betrachten zuerst den Fall $l = 0$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}(\rho R_0) + \rho R_0 = 0 , \quad (1.3.6)$$

und erhalten zwei linear unabhängige Lösungen, eine bei $\rho = 0$ reguläre Lösung

$$R_0 = \frac{\sin \rho}{\rho} , \quad (1.3.7)$$

und eine bei $\rho = 0$ singuläre Lösung

$$R_0 = -\frac{\cos \rho}{\rho} . \quad (1.3.8)$$

Für $l \neq 0$ führen wir entsprechend dem oben gefunden Verhalten bei kleinen Abständen die Substitution

$$R_l = \rho^l \chi_l \quad (1.3.9)$$

ein, und erhalten aus (1.3.5) die Differentialgleichung

$$\chi_l'' + \frac{2(l+1)}{\rho} \chi_l' + \chi_l = 0 . \quad (1.3.10)$$

Wir versuchen nun, eine Rekursionsrelation für die Lösung zu finden. Dazu differenzieren wir die Differentialgleichung (1.3.10) nochmals,

$$\chi_l''' + \frac{2(l+1)}{\rho} \chi_l'' - \frac{2(l+1)}{\rho^2} \chi_l' + \chi_l' = 0 . \quad (1.3.11)$$

Nun definieren wir $\chi \equiv (1/\rho)\chi_l'$, so dass $\rho\chi = \chi_l'$. Damit wird (1.3.11) zu

$$(\rho\chi)'' + \frac{2(l+1)}{\rho}(\rho\chi)' + \left[1 - \frac{2(l+1)}{\rho^2} \right] (\rho\chi) = 0 \quad (1.3.12)$$

was nach Anwendung der Produktregel zu

$$\chi'' + \frac{2(l+2)}{\rho} \chi' + \chi = 0 \quad (1.3.13)$$

führt. Das ist jedoch gerade die Differentialgleichung für $l + 1$. Wir schliessen also, dass

$$\chi_{l+1} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \chi_l \quad (1.3.14)$$

und damit also

$$\chi_l = \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \chi_0. \quad (1.3.15)$$

Wir fassen nun die Lösungen in folgenden Definitionen zusammen: wir definieren die **sphärischen Bessel-Funktionen** durch

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\sin \rho}{\rho} \quad (1.3.16)$$

und die **sphärischen Neumann-Funktionen** durch

$$n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \frac{\cos \rho}{\rho} \quad (1.3.17)$$

Der Faktor $(-1)^l$ ist natürlich Konvention. Die niedrigsten sphärischen Bessel-Funktionen sind

$$j_0(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho} \quad (1.3.18)$$

$$j_1(\rho) = \frac{\sin \rho - \rho \cos \rho}{\rho^2} \quad (1.3.19)$$

$$j_2(\rho) = \frac{(3 - \rho^2) \sin \rho - 3\rho \cos \rho}{\rho^3}; \quad (1.3.20)$$

die niedrigsten sphärischen Neumann-Funktionen sind

$$n_0(\rho) = -\frac{\cos \rho}{\rho} \quad (1.3.21)$$

$$n_1(\rho) = -\frac{\cos \rho + \rho \sin \rho}{\rho^2} \quad (1.3.22)$$

$$n_2(\rho) = -\frac{(3 - \rho^2) \cos \rho + 3\rho \sin \rho}{\rho^3}. \quad (1.3.23)$$

Für $\rho \rightarrow 0$ verhalten sich diese Funktionen wie

$$j_l(\rho) = \frac{\rho^l}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l + 1)}, \quad (1.3.24)$$

und

$$n_l(\rho) = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2l - 1)}{\rho^{l+1}}, \quad (1.3.25)$$

während das asymptotische Verhalten für $\rho \rightarrow \infty$ durch

$$j_l(\rho) = \frac{1}{\rho} \sin(\rho - \pi l/2) \quad (1.3.26)$$

und

$$n_l(\rho) = -\frac{1}{\rho} \cos(\rho - \pi l/2) \quad (1.3.27)$$

beschrieben ist. [Der für grosse ρ führende Term in (1.3.16) und (1.3.17) kommt davon, dass die Ableitung immer auf den $\sin \rho$ bzw. $\cos \rho$ Term wirkt; dies führt dann direkt auf (1.3.26) und (1.3.27).] Schliesslich definieren wir die **sphärischen Hankelfunktionen** als Linearkombinationen dieser beiden Klassen von Funktionen

$$h_l^{(1)}(\rho) = j_l(\rho) + i n_l(\rho) \quad \text{und} \quad h_l^{(2)}(\rho) = h_l^{(1)}(\rho)^* . \quad (1.3.28)$$

Die Umkehrung ergibt

$$j_l(\rho) = \text{Re } h_l^{(1)} , \quad n_l(\rho) = \text{Im } h_l^{(1)} . \quad (1.3.29)$$

Im Vergleich zu ebenen Wellen korrespondieren j_l, n_l und $h_l \equiv h_l^{(1)}$ zu $\sin kx, \cos kx$ und e^{ikx} . Das asymptotische Verhalten ist durch

$$h_l^{(1)}(\rho) \simeq -\frac{i}{\rho} e^{i(\rho - l\pi/2)} \quad (1.3.30)$$

gegeben.

1.3.2 Gebundene Zustände

Wenn die Energie im Intervall $-V_0 < E < 0$ liegt, lautet die radiale Schrödingergleichung

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \begin{pmatrix} q^2 \\ -\kappa^2 \end{pmatrix} \right] R(r) = 0 , \quad (1.3.31)$$

wobei

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0 + E)}}{\hbar} , \quad \kappa = \frac{\sqrt{2m(-E)}}{\hbar} \quad (1.3.32)$$

die Gleichung innerhalb bzw. ausserhalb des Kastens beschreibt. Die am Ursprung reguläre Lösung ist

$$R(r) = A j_l(qr) , \quad 0 \leq r \leq a . \quad (1.3.33)$$

Wegen der Normierbarkeit der Wellenfunktion kommt ausserhalb des Topfes nur die für $r \rightarrow \infty$ exponentiell abfallende Lösung in Frage

$$R(r) = B h_l^{(1)}(i\kappa r) , \quad r > a . \quad (1.3.34)$$

Die Stetigkeitsbedingungen ergeben

$$A j_l(qa) = B h_l(i\kappa a) , \quad A q j_l'(qa) = B i\kappa h_l'(i\kappa a) . \quad (1.3.35)$$

Nach Division der beiden Gleichungen erhalten wir die logarithmischen Ableitungen

$$q \frac{d \log j_l}{d \rho} \Big|_{qa} = i \kappa \frac{d \log h_l}{d \rho} \Big|_{i \kappa a} . \quad (1.3.36)$$

Für $l = 0$ lautet die Lösung

$$u(r) = rR(r) = \begin{cases} A \sin(qr) & \text{für } r < a \\ B e^{-\kappa r} & \text{für } r > a \end{cases} \quad (1.3.37)$$

Die Stetigkeit von $R(r)$ und $R'(r)$ bedingt, dass auch $u(r)$ und $u'(r)$ stetig sind; damit findet man sofort die Stetigkeitsbedingung

$$\cot(qa) = -\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar q} . \quad (1.3.38)$$

Damit ein gebundener Zustand existiert, muss das Potential mindestens die Stärke

$$V_0 \geq \frac{\pi^2}{8} \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad (1.3.39)$$

haben.

1.3.3 Streulösungen

Für $E > 0$ ist die Wellenfunktion

$$R_l(r) = \begin{cases} A j_l(qr) & r < a \\ B j_l(kr) + C n_l(kr) & r > a , \end{cases} \quad (1.3.40)$$

wobei

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} , \quad q = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar} . \quad (1.3.41)$$

Die Anschlussbedingung bei a lautet

$$q \frac{dj_l/d\rho}{j_l} \Big|_{\rho=qa} = k \left[\frac{Bdj_l/d\rho + Cdn_l/d\rho}{Bj_l + Cn_l} \right] \Big|_{\rho=ka} . \quad (1.3.42)$$

Daraus findet man das Verhältnis C/B . Asymptotisch gilt

$$R_l(r) \simeq \frac{B}{kr} \left[\sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) - \frac{C}{B} \cos \left(kr - \frac{l\pi}{2} \right) \right] . \quad (1.3.43)$$

Wir führen für das Amplitudenverhältnis die Notation

$$\frac{C}{B} = -\tan \delta_l(k) \quad (1.3.44)$$

ein. Dann ergibt sich für die asymptotische Form von $R_l(r)$

$$R_l(r) = \frac{B}{\cos \delta_l(k)} \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l(k) \right) . \quad (1.3.45)$$

Gegenüber der freien Kugelwelle ohne Potential ist dies eine phasenverschobene Kugelwelle. Für $l = 0$ kann man die Phasenverschiebung δ_0 leicht berechnen: aus (1.3.42) folgt

$$\begin{aligned} q \cot(qa) &= k \frac{B \cos(ka) + C \sin(ka)}{B \sin(ka) - C \cos(ka)} = k \frac{\cos ka \cos \delta_0 - \sin ka \sin \delta_0}{\sin ka \cos \delta_0 + \cos ka \sin \delta_0} \\ &= k \cot(ka + \delta_0) \end{aligned} \quad (1.3.46)$$

woraus folgt, dass

$$\delta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{k}{q} \tan(qa) \right) - ka . \quad (1.3.47)$$

Damit erhält man die Phasenverschiebung als Funktion der Energie und der Stärke des Potentials. Für negatives Potentials ist die Wellenzahl im Potential erhöht, und es gilt $\delta_0 > 0$. Für abstossendes Potential ist die Wellenzahl im Innern verringert, und es gilt $\delta_0 < 0$.

1.3.4 Der Grenzfall der harten Kugel

Für den Fall der ‘harten Kugel’ gilt $V_0 = -\infty$, und die Wellenfunktion verschwindet im Innern der Kugel. Im Äusseren schreiben wir die Lösung als

$$R_l(r) = \frac{1}{2} \left(h_l^*(kr) + S_l(k) h_l(kr) \right) \quad (1.3.48)$$

wobei $S_l(k)$ eine Konstante ist, die wir gleich bestimmen werden. Da der gesamte radiale Wahrscheinlichkeitsstrom, gegeben durch

$$j_r(r) = \frac{\hbar}{2im} \left[R_l^*(r) \frac{\partial}{\partial r} R_l(r) - R_l(r) \frac{\partial}{\partial r} R_l^*(r) \right] = \frac{\hbar}{8im} \left\{ h_l \frac{\partial h_l^*}{\partial r} - h_l^* \frac{\partial h_l}{\partial r} \right\} (1 - |S_l|^2) = 0 \quad (1.3.49)$$

verschwinden muss (es gibt keine Quelle oder Senke von Teilchen innerhalb einer beliebigen Kugel mit Radius $> a$ um das Zentrum), muss $|S_l(k)| = 1$ sein. Daher ist $S_l(k) = e^{2i\delta}$ für ein reelles δ . Unter Benützung von (1.3.30) finden wir, dass die asymptotische Form von R_l gerade

$$R_l(r) \sim \frac{\text{const}}{r} \sin \left(kr - l \frac{\pi}{2} + \delta \right) \quad (1.3.50)$$

ist. Daher stimmt δ gerade mit der Streuphase $\delta_l(k)$ aus (1.3.45) überein

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l(k)} . \quad (1.3.51)$$

$S_l(k)$ wird S-Matrix-Element der l -ten Partialwelle genannt. Da das Teilchen nicht in die Kugel eindringen kann, muss als Randbedingung $R_l(a) = 0$ gelten. Das bedeutet, dass die Streuphase die Gleichung

$$e^{2i\delta_l} = -\frac{h_l^*(ka)}{h_l(ka)} = -\frac{j_l(ka) - in_l(ka)}{j_l(ka) + in_l(ka)} \quad (1.3.52)$$

erfüllen muss. Durch etwas Umformen ergibt sich daraus

$$\tan \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)} . \quad (1.3.53)$$

Nun betrachten wir die Eigenschaften der Streuphasen für kleine Energien, $ka \ll 1$. Die sphärischen Bessel- und von Neumann-Funktionen lassen sich für kleine Argumente ($x < l$) wie folgt entwickeln:

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{(2l+1)!!} \quad \text{und} \quad n_l(x) \approx -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \quad (1.3.54)$$

wobei $(2l+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2l-1) \cdot (2l+1)$. Damit ergibt sich

$$\tan \delta_l(k) \approx -\frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)[(2l-1)!!]^2} . \quad (1.3.55)$$

Die Streuphasen der höheren Drehimpulse l für niedrige Energien sind sehr stark unterdrückt. Daher ist es ausreichend, im Niederenergiebereich nur $l = 0$ (man nennt dies ‘s-Wellen-Streuung’) zu betrachten. In dieser Näherung gilt (siehe später, insbesondere (1.4.13))

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 \approx \frac{\sin^2 \delta_0}{k^2} \approx \frac{\delta_0^2}{k^2} = a^2 , \quad (1.3.56)$$

d.h. der differentielle Wirkungsquerschnitt ist winkelunabhängig. Daraus folgt für den totalen Wirkungsquerschnitt, $\sigma \approx 4\pi a^2$. Dieser Wert ist $4\times$ grösser als der klassische Wirkungsquerschnitt πa^2 .

1.3.5 Ebene Wellen

Um die obige Rechnung im Rahmen der Streutheorie einer ebenen Welle zu interpretieren benötigen wir auch noch die Entwicklung der ebenen Welle nach Kugelfunktionen. Natürlich können die ebenen Wellen nach den sphärischen Lösungen der freien Schrödingergleichung entwickelt werden

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l c_{lm}(\mathbf{k}) j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi) , \quad (1.3.57)$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $c_{lm}(\mathbf{k})$ zu bestimmen sind. Zuerst betrachten wir den Fall, dass $\mathbf{k} \parallel \mathbf{e}_z$. Dann hängt die linke Seite nicht von φ ab, und daher kann rechts nur der Term mit $m = 0$ beitragen,

$$\begin{aligned} e^{ikr \cos \theta} &= \sum_{l=0}^{\infty} A_l j_l(kr) Y_{l0}(\theta, \varphi) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{1/2} A_l j_l(kr) P_l(\cos \theta) . \end{aligned} \quad (1.3.58)$$

Nun benützen wir die Orthogonalitätsrelation für Legendre Polynome

$$\int_{-1}^1 d \cos \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} \quad (1.3.59)$$

und erhalten, nach Multiplikation mit $P_l(\cos \theta)$ und Integration

$$A_l j_l(kr) = \frac{1}{2} (4\pi(2l+1))^{1/2} \int_{-1}^1 dz P_l(z) e^{ikrz} . \quad (1.3.60)$$

Da A_l von r unabhängig ist, können wir zum Grenzfall kleiner r übergehen, und den für $kr \rightarrow 0$ führenden Term ausrechnen. Auf der rechten Seite finden wir

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 dz P_l(z) e^{ikrz} &= \int_{-1}^1 dz P_l(z) \left[\dots + \frac{(ikrz)^l}{l!} + \frac{(ikrz)^{l+1}}{(l+1)!} + \dots \right] \\ &= (ikr)^l \frac{2^l l!}{(2l)!} \int_{-1}^1 dz P_l(z) P_l(z) + \mathcal{O}((kr)^{l+1}) \\ &= (ikr)^l \frac{2^{l+1} l!}{(2l+1)!} + \mathcal{O}((kr)^{l+1}) . \end{aligned}$$

Die linke Seite ist im Grenzfall kleiner kr gerade

$$A_l \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (kr)^l , \quad (1.3.61)$$

woraus sich ergibt, dass

$$A_l = i^l (4\pi(2l+1))^{1/2} . \quad (1.3.62)$$

Damit erhält man also die Entwicklung

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) . \quad (1.3.63)$$

Für eine allgemeine Richtung benützt man das Additionstheorem für Kugelfunktionen (siehe Elektrodynamik)

$$P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{k}})^* Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{x}}) \quad (1.3.64)$$

und findet damit

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{k}})^* Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{x}}) . \quad (1.3.65)$$

1.4 Partialwellen-Entwicklung

Nach diesem Zwischenspiel kommen wir jetzt zu den sphärischen Streuproblemen zurück. Wir beschränken uns nun auf den Fall, dass das Streupotential ein Zentralpotential um den Koordinatenursprung ist, d.h. $V(\mathbf{x}) = V(r)$. Wegen dieser Rotationssymmetrie ist $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ dann nur noch eine Funktion des Winkels θ zwischen \mathbf{k} und \mathbf{k}' , sowie eine Funktion von $|\mathbf{k}| = k$ (äquivalent zur Energie $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$).

Wir betrachten nun die Schrödingergleichung (1.1.2) für das Zentralpotential $V(r)$. Für jedes \mathbf{k} machen wir den Ansatz

$$\psi(\mathbf{x}) = R_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = \frac{u_l(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) . \quad (1.4.1)$$

Dies löst (1.1.2), falls die radiale Funktion $u_l(r)$ die reduzierte Differentialgleichung

$$u_l''(r) - \left(\frac{2m}{\hbar^2} V_{\text{eff}}(r) - k^2 \right) u_l(r) = 0 \quad (1.4.2)$$

erfüllt, wobei das effektive Potential (wie in der Mechanik) durch

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \quad (1.4.3)$$

gegeben ist. Falls $V(r)$ für kleine r nicht zu stark anwächst, ist der dominante Term für kleines r der zweite Term in V_{eff} . Dann folgt (wie schon für den Fall des Wasserstoffatoms), dass $u_l(r) \propto r^{l+1}$ für $r \rightarrow 0$ ($R_l \propto r^l$). Für $r \rightarrow \infty$ können wir das effektive Potential vernachlässigen und erhalten andererseits

$$u_l''(r) + k^2 u_l(r) = 0 , \quad (1.4.4)$$

was durch

$$u_l(r) = A \sin \left(kr - \frac{\pi}{2} l + \delta_l(k) \right) \quad \text{für} \quad r \rightarrow \infty \quad (1.4.5)$$

gelöst wird. Die ‘Streuphase’ $\delta_l(k)$ wird hierbei dadurch definiert, dass wir verlangen dass $\delta_l(k) = 0$ falls $V(r) = 0$.

Die allgemeine φ -unabhängige Lösung der Schrödingergleichung ist nun eine Überlagerung aller l -Komponenten

$$\psi(\mathbf{x}) = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} c_l u_l(r) P_l(\cos \theta) , \quad (1.4.6)$$

wobei

$$P_l(\cos \theta) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{l0}(\theta, \phi) . \quad (1.4.7)$$

Wir vergleichen nun diese Lösung mit der ebenen Welle. Im rotationssymmetrischen Fall können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass \mathbf{k} parallel zur z -Achse liegt. Dann gilt (siehe Kapitel 1.3.5)

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(kr) P_l(\cos \theta) . \quad (1.4.8)$$

Für grosse r haben wir die asymptotische Entwicklung

$$j_l(kr) \approx \frac{1}{kr} \sin \left(kr - \frac{\pi l}{2} \right) = \frac{1}{2ikr} \left(e^{ikr} e^{-il\pi/2} - e^{-ikr} e^{il\pi/2} \right) , \quad (1.4.9)$$

so dass wir die Gleichung (1.1.15) folgendermassen neu schreiben können:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) \approx & -\frac{e^{-ikr}}{2ikr} \left(\sum_{l=0}^{\infty} i^l e^{il\pi/2} (2l+1) P_l(\cos \theta) \right) \\ & + \frac{e^{ikr}}{2ikr} \left(\sum_{l=0}^{\infty} i^l e^{-il\pi/2} (2l+1) P_l(\cos \theta) + 2ik f(k, \theta) \right) . \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

Dies vergleichen wir nun mit der asymptotischen Form von (1.4.6),

$$\psi(\mathbf{x}) \approx -\frac{e^{-ikr}}{2ir} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l e^{-i\delta_l} e^{il\pi/2} P_l(\cos \theta) \right) + \frac{e^{ikr}}{2ir} \left(\sum_{l=0}^{\infty} c_l e^{i\delta_l} e^{-il\pi/2} P_l(\cos \theta) \right) . \quad (1.4.11)$$

Koeffizientenvergleich ergibt nun, dass

$$c_l = \frac{i^l}{k} (2l+1) e^{i\delta_l} \quad (1.4.12)$$

und

$$f(k, \theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} a_l (2l+1) P_l(\cos \theta) , \quad a_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} = e^{i\delta_l} \sin \delta_l . \quad (1.4.13)$$

Die gesamte Information der Teilchenstreuung ist daher in den Streuphasen enthalten.

1.4.1 Optisches Theorem

Der totale Wirkungsquerschnitt in der Partialwellendarstellung hat die einfache Form

$$\sigma(k) = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l,l'} (2l+1)(2l'+1) a_l^* a_{l'} \underbrace{\int_{-1}^{+1} dz P_l(z)^* P_{l'}(z)}_{= 2\delta_{l,l'}/(2l+1)} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) . \quad (1.4.14)$$

Wenn wir Vorwärtsstreuung betrachten, d.h. $\theta = 0$, dann finden wir folgende Beziehung ($P_l(\cos \theta = 1) = 1$):

$$\operatorname{Im}(f(k, 0)) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \operatorname{Im}(a_l(k)) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l(k) . \quad (1.4.15)$$

Daraus ergibt sich das sogenannte optische Theorem,

$$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im}(f(k, 0)) . \quad (1.4.16)$$

Diese Beziehung ist eine Konsequenz der Wahrscheinlichkeitserhaltung: der Imaginärteil von $f(k, 0)$ entspricht der Reduktion der Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen ungestreut geradeaus weiterfliegt. Dies ist jedoch gerade der totale Wirkungsquerschnitt.

1.5 Born'sche Näherung

Um die Streueigenschaften, insbesondere die Streuphasen, eines Potentials auszurechnen, muss man die Lippmann-Schwinger Integralgleichung (1.1.13) lösen. Formal können wir diese Gleichung als

$$\psi_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}} + K\psi_{\mathbf{k}} \quad (1.5.1)$$

schreiben, wobei K ein Operator ist, der auf den Zustand $\psi_{\mathbf{k}}$ wirkt. Nun können wir diese Gleichung als Iterationsgleichung betrachten:

$$\psi_{\mathbf{k}} = \phi_{\mathbf{k}} + K(\phi_{\mathbf{k}} + K\psi_{\mathbf{k}}) = (1 + K + K^2 + K^3 + \dots + K^n)\phi_{\mathbf{k}} + K^{n+1}\psi_{\mathbf{k}} . \quad (1.5.2)$$

Da K proportional zum Streupotential V ist, entspricht dies auch einer Entwicklung in V . Für ein schwaches Potential können wir schon nach der ersten Potenz abbrechen und erhalten entsprechend aus (1.1.16) durch Ersetzen von $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$ durch $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{y}} V(\mathbf{y}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') . \quad (1.5.3)$$

Die Grösse $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ ist also im wesentlichen die Fourier-Transformierte des Potentials. Diese Approximation wird **erste Born'sche Näherung** genannt. Da die Grösse des Impulses für das Teilchen vor und nach der Streuung gleich gross ist, können wir f wieder durch $k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ und den Ablenkwinkel θ ausdrücken, denn

$$(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = 2k^2(1 - \cos \theta) = \left(2k \sin \frac{\theta}{2}\right)^2 . \quad (1.5.4)$$

1.5.1 Beispiele

Als erstes Beispiel betrachten wir das sogenannte **Yukawa-Potential**, das die Wechselwirkung durch massive Austauscheteilchen beschreibt; es ist daher ein kurzreichweitiges Zentralpotential:

$$V(r) = v_0 \frac{e^{-\kappa r}}{r} \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \frac{4\pi v_0}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + \kappa^2}, \quad (1.5.5)$$

wobei $\kappa > 0$. Der Parameter $\kappa^{-1} = R$ beschreibt grössenordnungsmässig die Reichweite des Potentials. Für diesen Fall folgt aus der Born'schen Näherung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2}{(4k^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \kappa^2)^2} \frac{v_0^2}{\hbar^4}. \quad (1.5.6)$$

Ein weiteres Beispiel ist die **Kugel** vom Radius b :

$$V(r) = \begin{cases} V_0/b^3, & r \leq b \\ 0, & r > b \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \tilde{V}(k, \theta) = 4\pi V_0 \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \Big|_{x=kb}. \quad (1.5.7)$$

Im Grenzfalle von $b \rightarrow 0$ mit $V_0 = vb^2$ — dies ist das Delta-Potential $V(\mathbf{x}) = v\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ — wird die Fouriertransformierte unabhängig von k . Entsprechendes gilt daher natürlich auch für den differentiellen Wirkungsquerschnitt (in Born'scher Näherung).

1.5.2 Streuphasen in Born'scher Näherung

Wir vergleichen nun (1.5.3) und (1.4.13),

$$f(k, \theta) \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \tilde{V}((2k \sin \theta/2)^2) = \frac{1}{k} \sum_{l'} e^{i\delta_{l'}} \sin \delta_{l'} (2l' + 1) P_{l'}(\cos \theta), \quad (1.5.8)$$

wobei wir benützt haben, dass im rotationssymmetrischen Fall (den wir hier betrachten) $\tilde{V}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ nur eine Funktion von $|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|^2 = 2k^2(1 - \cos \theta)$ ist. Nun multiplizieren wir auf beiden Seiten mit $P_l^*(\cos \theta)$ und integrieren über $z = \cos \theta$. Dann findet man

$$-\frac{mk}{4\pi\hbar^2} \int_{-1}^{+1} dz \tilde{V}(2k^2(1-z)) P_l(z)^* = e^{i\delta_l} \sin \delta_l \approx \delta_l, \quad (1.5.9)$$

wobei die letzte Näherung für schwache Potentiale gilt, für die die Streuphasen klein sind. [Hier haben wir wiederum benützt, dass die Legendre-Polynome die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-1}^1 dz P_l(z)^* P_{l'}(z) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

erfüllen.]

Eine alternative Form der Born-Streuphase erhalten wir, indem wir (1.3.65) in (1.5.3) verwenden:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3\mathbf{y} V(|\mathbf{y}|) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{y}} \\
&= -\frac{8\pi m}{\hbar^2} \sum_{l,m} \sum_{l',m'} i^{l-l'} \int dr r^2 j_l(kr) j_{l'}(kr) V(r) \\
&\quad \times \int d\Omega_{\mathbf{y}} Y_{lm}^*(\Omega_{\mathbf{k}}) Y_{lm}(\Omega_{\mathbf{y}}) Y_{l'm'}(\Omega_{\mathbf{k}'}) Y_{l'm'}^*(\Omega_{\mathbf{y}}) \\
&= -\frac{2m}{\hbar^2} \sum_l (2l+1) P_l(\cos\theta) \int dr r^2 V(r) j_l(kr)^2,
\end{aligned} \tag{1.5.10}$$

wobei wir verwenden, dass $Y_{lm}(\theta=0, \phi) = \delta_{m,0} P_l(1) \sqrt{(2l+1)/4\pi}$ und $P_l(1) = 1$. Der Vergleich mit (1.4.13) führt dann auf

$$\delta_l \approx -\frac{2mk}{\hbar^2} \int_0^\infty dr r^2 V(r) j_l(kr)^2. \tag{1.5.11}$$

Man beachte, dass für niedrige Energien (k klein) die Streuphasen für grosse l unterdrückt werden, da $j_l(kr) \propto (kr)^l / (2l+1)!!$ für $kR \ll 1$ klein ist, wo das Potential den grössten Beitrag liefert.

1.6 Coulomb-Streuung

Als letztes Beispiel studieren wir ein lang-reichweitiges Potential und analysieren die Streuung am Coulombpotential, das offensichtlich die Bedingung (1.1.1) verletzt. Die zugehörige Schrödingergleichung lautet

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\mathbf{x}}^2 - \frac{e^2}{r} \right) \psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}). \tag{1.6.1}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist etwas kompliziert und führt auf konfluent hypergeometrische Funktionen ${}_1F_1$. Wir lassen hier diese Details aus (siehe Übungsaufgabe) und geben einfach sofort das asymptotische Verhalten der Wellenfunktion an, die wir wieder in einen einlaufenden und gestreuten Teil aufspalten, $\psi_k = \phi_k + \psi_{sk}$ (die einlaufende Welle kommt entlang der z -Achse),

$$\phi_k(\mathbf{x}) = e^{ikz + i\gamma \ln(k(r-z))} \left(1 - \frac{\gamma^2}{ik(r-z)} \right) \tag{1.6.2}$$

$$\psi_{sk}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr - i\gamma \ln(k(r-z))} \Gamma(1+i\gamma)}{ik(r-z) \Gamma(-i\gamma)}, \tag{1.6.3}$$

wobei $\gamma = -me^2/\hbar^2 k = -1/a_0 k$ und a_0 der Bohr-Radius ist. Die Gamma-Funktion ist hierbei durch

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty dt t^{c-1} e^{-t} \quad (1.6.4)$$

definiert, wobei c eine komplexer Zahl ist. Man sieht leicht ein, dass $\Gamma(c^*) = \Gamma(c)^*$ und $\Gamma(c+1) = c\Gamma(c)$. Die Langreichweitigkeit des Potentials modifiziert die asymptotische Form nachhaltig. Wir schreiben nun $r - z = r(1 - \cos\theta)$ und erhalten somit

$$\psi_{sk}(\mathbf{x}) = \frac{e^{ikr - i\gamma \ln(2kr)}}{r} f_{\text{Coul}}(k, \theta) , \quad (1.6.5)$$

wobei

$$f_{\text{Coul}}(k, \theta) = -i\gamma \frac{e^{-i\gamma \ln(\sin^2 \theta/2)}}{2ik \sin^2 \theta/2} \underbrace{\frac{\Gamma(1+i\gamma)}{\Gamma(1-i\gamma)}}_{= e^{2i\delta}} = -\frac{\gamma}{2k} e^{2i\delta} \left(\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^{-1-i\gamma} . \quad (1.6.6)$$

Es ist wiederum möglich, die Wahrscheinlichkeitsstromdichte der gestreuten Wellenfunktion zu berechnen. Die Radialkomponente hat für grosse r die Form

$$j_s = \frac{\hbar k}{m} |\psi_{sk}(\mathbf{x})|^2 = \frac{\hbar k}{mr^2} |f_{\text{Coul}}(\theta)|^2 , \quad (1.6.7)$$

woraus sich der differentielle Wirkungsquerschnitt wie zuvor ergibt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{\text{Coul}}(\theta)|^2 = \frac{e^4}{16E^2} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} . \quad (1.6.8)$$

Interessanterweise ist diese Form identisch mit dem klassischen Rutherford-Wirkungsquerschnitt. Der totale Wirkungsquerschnitt ist unendlich, da $d\sigma/d\Omega$ für Vorwärtsstreuung divergiert. Dies ist eine Konsequenz der Langreichweitigkeit. Selbst für sehr grosse Stossparameter bewirkt das Coulomb-Potential noch Streuung, wenn auch mit sehr kleinen Ablenkungswinkeln.