Kontinuumsmechanik. Übung 11.

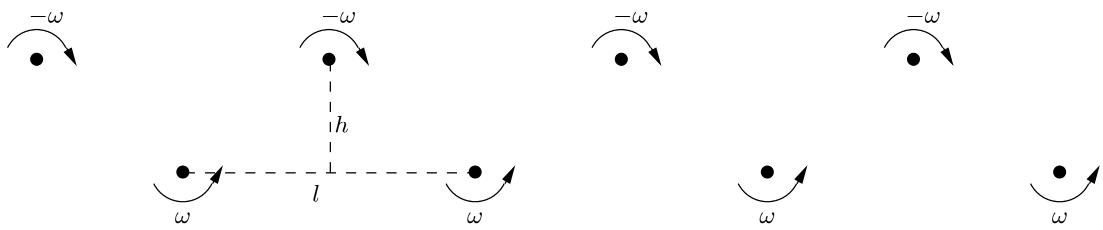
FS12 *Abgabe: 29.5.12*

1. Umströmung einer Kugel

Eine Kugel vom Radius R wird von einem inkompressiblen idealen Fluidum umströmt, dessen Geschwindigkeit im Unendlichen konstant und gleich $\vec{u}$ ist. Bestimme das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x)$ und verifiziere, dass die Gesamtkraft, die auf die Kugel wirkt, verschwindet.

Hinweis: Setze $\vec{v} = -\vec{\nabla}\varphi_0$ als Potentialströmung an, und zwar mit $\varphi_0(x) = -\vec{u}\cdot\vec{x} + \varphi(x)$, wobei $-\vec{u}\cdot\vec{x}$ das Potential zum homogenen Geschwindigkeitsfeld $\vec{u}$ ist. Man überlege sich, dass φ dem Potential eines elektrischen Dipols entspricht.

2. Die Karmansche Wirbelstrasse



Seien

$$z_k^{\pm} = \pm(z_0 + k \cdot l)\ , \qquad (k \in \mathbb{Z};\ z_0 = \frac{1}{2}(\frac{l}{2} + \mathrm{i}h)\,)$$

die Lagen der Punktwirbel; dabei steht $+$, bzw. $-$ für die obere, bzw. untere Strassenseite. Die Wirbelstärken seien $\mp\omega$. Das Geschwindigkeitsfeld ist inkompressibel und wirbelfrei ausserhalb der Punktwirbel.

Man überlege sich, dass das dazugehörige komplexe Potential Φ (mit $w = -d\Phi/dz \to 0$ für $|\mathrm{Im}\, z| \to \infty$) durch die mehrwertige analytische Funktion

$$\Phi(z) = -\frac{\mathrm{i}\omega}{2\pi} \log \frac{\sin\frac{(z-z_0)\pi}{l}}{\sin\frac{(z+z_0)\pi}{l}} \tag{1}$$

gegeben ist. Finde daraus die Geschwindigkeit eines Wirbels unter dem Einfluss der anderen:

$$\vec{u} = \Big(-\frac{\omega}{2l}\,\mathrm{th}\,\frac{h\pi}{l}, 0\Big)\ ,$$

(wie in (7.19), aber ohne eine Reihe zu summieren).

Hinweis: Zeige, dass das Feld um jeden Wirbel die passende Zirkulation aufweist. Die Selbstwechselwirkung ist von (1) zu subtrahieren.