

Kontinuumsmechanik. Übung 8.

FS12

Abgabe: 8.5.12

1. Anwendungen des Satzes von Bernoulli

a) Ausflussgeschwindigkeit

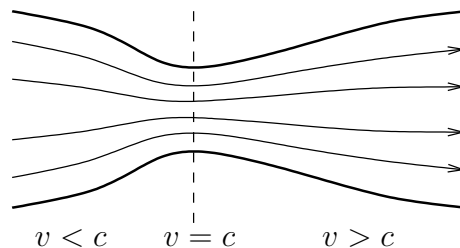
Ein Behälter sei bis zur Höhe h mit einer inkompressiblen, idealen Flüssigkeit gefüllt. Sie fließt durch ein Loch am Boden aus, dessen Querschnitt viel kleiner als die Oberfläche der Flüssigkeit ist. Berechne die Austrittsgeschwindigkeit.

b) Hugoniot-Gleichung und Laval-Düse

Ein kompressibles Gas mit Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ fließe stationär in einem horizontalen Rohr ($U = 0$). Das Rohr weise einen langsam veränderlichen Querschnitt (Fläche F) auf so, dass die Geschwindigkeit v in guter Näherung senkrecht zu jedem einzelnen Querschnitt verläuft; dort sei sie zudem konstant. Leite die Hugoniot-Gleichung her:

$$\frac{dF}{F} = \frac{dv}{v} \left(\frac{v^2}{c^2} - 1 \right), \quad (1)$$

wobei c in $c^2 = dp/d\rho$ die Schallgeschwindigkeit ist (s. später in der Vorlesung). Erkläre damit die Funktionsweise einer Laval-Düse: Ein Gas, das mit Geschwindigkeit $v < c$ einströmt und bei der Verengung $v = c$ erreicht, beschleunigt danach weiter auf $v > c$.



Hinweis: Alle Funktionen $F(v)$ der Lösungsschar von Gl. (1) haben ihr Minimum bei $v = c$. Stelle die Schar qualitativ graphisch dar.

2. Helmholtzscher Wirbelsatz

Man beweise den Helmholtzschen Wirbelsatz (= Wirbellinien werden durch die Strömung in Wirbellinien abgebildet, falls $D\vec{v}/Dt$ ein Gradientenfeld ist) indem man zeigt, dass

$$\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) \Big|_{(\phi_t(\mathbf{y}), t)} = D\phi_t(\mathbf{y}) \cdot \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) \Big|_{(\mathbf{y}, 0)}, \quad (2)$$

wobei $\phi_t \equiv \phi_{(t,0)}$ die Flussabbildung ist und $D\phi_t(\mathbf{y})$ ihre Tangentialabbildung.

Hinweis: Man zeige, dass beide Seiten der Gleichung (2) derselben Differentialgleichung bzgl. t mit gleichen Anfangsbedingungen genügen. Verwende dazu (7.11) aus dem Skript.