

Kontinuumsmechanik. Übung 7.

FS12

Abgabe: 24.4.12

1. Bahn-, Strom-, und Streichlinien

Ein Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(\vec{x}, t)$ sei gegeben; ein Punkt \vec{y} und eine Zeit s seien ausgezeichnet. Die *Stromlinie* ist die Integralkurve durch \vec{y} zu $\vec{v}(\cdot, s)$; die *Bahnlinie* ist die Bahn eines Teilchens mit Anfangsbedingung \vec{y} zur Zeit s ; die *Streichlinie* besteht aus den Teilchen zur Zeit s , die aus \vec{y} entsprungen sind (Beispiel: Rauchfaden aus einem Schornstein).

Formuliere die Differentialgleichung für Strom- und Bahnlinien. Drücke Bahn- und Streichlinie mittels des Flusses aus. Berechne alle drei für das Vektorfeld auf \mathbb{R}^2

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \left(\frac{x_1}{t}, x_2 \right) .$$

Was passiert, wenn \vec{v} stationär ist?

2. Energiesatz eines idealen Fluidums

Betrachte ein ideales Fluidum, d.h. $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, mit nur adiabatischen Zustandsänderungen. Die Zustandsgleichung sei $p = p(\rho)$ und die innere Energie E pro Masseneinheit ist durch $dE = -p dv = -p d\rho^{-1}$ eingeführt (hier ist $v = \rho^{-1}$ das Volumen pro Masseneinheit). Die massenbezogene Dichte der Volumenkräfte möge von einem Potential $U(x)$ stammen: $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$. Stelle die Bilanzgleichung der totalen Energie (Dichte: $\varepsilon = \rho(\vec{v}^2/2 + E + U)$) auf, sowohl für ein mitgeführtes wie auch für ein raumfestes Volumen.

Hinweise: In der Vorlesung wurde die Bilanzgleichung (6.9) der kinetischen Energie $\rho\vec{v}^2/2$ allgemein hergeleitet. Wie spezialisiert sie sich für ein ideales Fluidum? Stelle dann die Bilanzgleichung für $\rho(E + U)$ auf.