

Kontinuumsmechanik. Übung 2.

FS12

Abgabe: 13.3.12

1. Differentialoperatoren in Zylinderkoordinaten

Ergänze die Rechnungen in Zylinderkoordinaten aus der Vorlesung durch die Herleitung folgender Ausdrücke (f : Skalarfeld, u : Vektorfeld)

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_z}{\partial z} .$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} ,$$

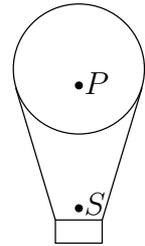
$$\Delta u = \left(\Delta u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{u_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta u_\varphi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2} \right) \vec{e}_\varphi + (\Delta u_z) \vec{e}_z .$$

Hinweis: Für die erste Gleichung verwende $(Du)\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})u$ und (1.13); für die beiden anderen die jeweils vorangehende. Wie lautet die letzte Gleichung bei Multiplikation $v \cdot \Delta u = \Delta(v \cdot u)$ mit einem festen Vektor v ?

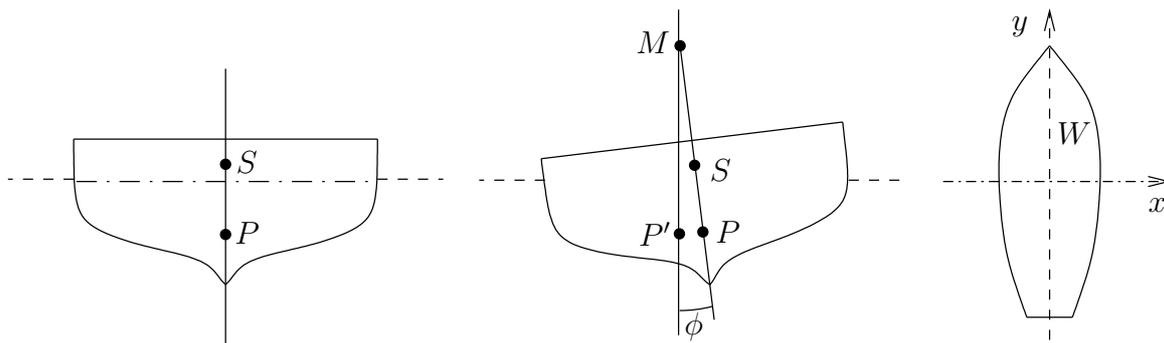
2. Stabilität tauchender und schwimmender Körper

a) Ein tauchender Körper (Luftballon, Unterseeboot):
 S : Schwerpunkt; P : geometrischer Mittelpunkt.

Begründe die Stabilitätsbedingung gegenüber Neigungen:
 P muss oberhalb S liegen.



b) Ein schwimmender Körper (Schiff):



S : Schwerpunkt; P, P' : geometrischer Mittelpunkt (ohne und mit Neigung) des eingetauchten Teils (Volumen V); M : 'Metazentrum'; W : Schnitt des Schiffkörpers mit der Wasserebene; x, y, z : körperfeste Koordinaten zentriert im Mittelpunkt von W .

Die Achse y der Neigung soll eine Hauptachse von W sein: $\int_W xy \, dx dy = 0$. Zeige, dass die Lage von M relativ zum Schiff unabhängig von der (kleinen) Neigung ϕ ist, und zwar

mit

$$\overline{PM} = \frac{\Theta}{V},$$

wobei $\Theta = \int_W x^2 dx dy$ das Tragheitsmoment der Fläche W bzgl. der Neigungsachse ist. Wie lautet nun die Stabilitätsbedingung?

Hinweise: (i) Die Bedingung aus a) ist zwar hinreichend für Stabilität im Fall b), aber nicht notwendig, wie man am Beispiel eines Eisbergs sieht. (ii) Bei b) berechne die Lage von P , bzw. P' bzgl. eines körperfesten Systems.

3. Eine stationäre Atmosphäre

Die Zustandsgleichung der Atmosphäre sei gegeben durch

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^n, \quad (n \geq 1). \quad (1)$$

In der Vorlesung wurde zur Modellierung der Atmosphäre der Fall eines linearen Gravitationspotentials $\phi(z) = gz$ betrachtet. Man untersuche hier den Fall

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} \quad (2)$$

einer sphärischen Gestalt. Wie verläuft das Druckprofil $p(r)$ in Abhängigkeit von n ? Bleibt die Atmosphäre endlich ausgedehnt? Diskutiere insbesondere die Fälle $n > 1$ (z.B. adiabatisch) und $n = 1$ (isotherm).

Hinweis: Verwende die Gleichgewichtsbedingung $P(p(\vec{x})) + \phi(\vec{x}) = \text{const}$, wobei hier alle Felder nur von $r = |\vec{x}|$ abhängen.