Kontinuumsmechanik. Übung 1.

FS12 *Abgabe: 28.2.12*

1. Eigenschaften einer Deformation

Ist die reine Scherung

$$\bar{x}_1 = x_1 + \gamma x_2 \,, \qquad \bar{x}_2 = x_2 \,, \qquad \bar{x}_3 = x_3$$

(i) eine homogene Deformation?

(ii) eine starre Deformation?

(iii) volumenerhaltend?

(iv) eine infinitesimale starre Deformation?

2. Materielle und räumliche Koordinaten

Materielle (x) und räumliche ($\bar{x}$) Koordinaten stehen bei einer Deformation f in der Beziehung $\bar{x} = f(x)$. Zeige, dass für Volumen-, Oberflächen-, bzw. Linienelemente gilt

$$\mathrm{d}^3\bar{x} = (\det Df)\mathrm{d}^3 x \,, \qquad \mathrm{d}^2\vec{\bar{o}} = (\operatorname{cof} Df)\mathrm{d}^2\vec{o} \,, \qquad \mathrm{d}\vec{\bar{t}} = (Df)\mathrm{d}\vec{t} \,,$$

wobei $\operatorname{cof} A$ die Kofaktormatrix von A ist: $(\operatorname{cof} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, mit A_{ij} der Untermatrix von A, die durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

3. Charakterisierung der Euklidischen Bewegungen

Betrachte eine Deformation f auf $\mathbb{R}^n$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass falls $Df(x) \in \mathrm{SO}(n)$ für alle x, so ist $Df(x) \equiv R$ konstant und $f(x) = Rx + a$. Beweise dies auf alternativem Wege über folgende Schritte:

- $\partial_{ij} f(x) = \alpha_{ijk}(x)\partial_k f(x)$. Welche Symmetrien hat α_{ijk}?
- $\alpha_{ijk}(x) \equiv 0$.

Hinweis. Die Spaltenvektoren einer orthogonalen Matrix sind orthonormiert.

Diskutiere die analoge 'infinitesimale' Version für ein Vektorfeld u auf $\mathbb{R}^n$: falls $Du(x) + (Du(x))^T = 0$ für alle x, so ist $Du(x) \equiv W$ konstant und $u(x) = Wx + a$.