Übung 1.1 Gravitationskraft für sphärisch-symmetrische Körper

Sei $\rho(\vec{x})$ eine Massenverteilung, die sphärisch-symmetrisch um O ist. Bestimme die Gravitationskraft $\vec{K}_i(\vec{x})$, die von $\rho(\vec{x}_i)$ auf ein Testteilchen der Masse μ im Punkt $\vec{x}$ ausgeübt wird. Zeige elementar-geometrisch, dass die gesamte Kraft, die auf μ wirkt, durch

$$\vec{K}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{r}\frac{G\mu M(r)}{r^2},$$

gegeben ist, wo

$$M(r) = \int_{|\vec{y}|\leq r} \rho(\vec{y}) d^3y,$$

mit $r = |\vec{x}|$.

Übung 1.2 Euklidischer Raum

$\mathbb{E}^3$ ist ein affiner Raum mit Metrik. Erkläre, was ein affiner Raum ist und was eine Metrik ist.

Übung 1.3 Galilei Gruppe

Zeige, dass die Transformationen

$$\begin{aligned} t' &= t + \tau \ , \ \tau \in \mathbb{R} \\ x' &= Rx + vt + a \ , \ R \in \mathcal{O}(3), v \in \mathbb{R}^3, a \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

eine 10-dimensionale Gruppe bilden.

Übung 1.4 Änderung der Koordinaten

Wir betrachten ein System von N Massenpunkten. Sei die Euler-Lagrange Gleichung durch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

gegeben. Mit den durch folgenden Diffeomorphismus eingeführten neuen Koordinaten

$$\begin{aligned} q_i &= \varphi_i(Q_1, ..., Q_N) \\ Q_i &= \varphi_i^{-1}(q_1, ..., q_N) \ , \ i = 1, 2, ..., N \end{aligned}$$

definieren wir die Lagrange Funktion

$$\tilde{L}(\dot{Q}(t), Q(t), t) := L(\dot{\varphi}(Q), \varphi(Q), t),$$

in der wir die Abkürzung $Q = (Q_1, ..., Q_N)$ benutzt haben.

a) Gib einen Ausdruck für $\dot{\varphi}_i(Q)$ an.

b) Zeige, dass

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = 0.$$

Übung 1.5 Geodäten

Ein Massenpunkt möge sich kräftefrei auf einer Fläche $F(\vec{x}) = 0$ bewegen ($\vec{x} \in \mathbb{R}^3$). Das kann man auch so ausdrücken: x, y, z sind alle von zwei unabhängigen Parametern abhängig :

$$\vec{x} = \vec{x}(u, v),$$

u und v sind verallgemeinerte Koordinaten (Gauss'sche Koordinaten).
Jetzt setzten wir $u = u^1$ und $v = u^2$, d.h. wir nennen die Koordinate u^a mit $a = 1, 2$. Man definiert

$$\begin{aligned} g_{ab} &= g_{ba} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial u^a}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial u^b} \right), \\ \Gamma_{ab,c} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{bc}}{\partial u^a} + \frac{\partial g_{ac}}{\partial u^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial u^c} \right), \end{aligned}$$

wobei g_{ab} der metrische Tensor heisst und $\Gamma_{ab,c}$ die Christoffel'schen Dreiindices-Symbole heissen. $(\cdot, \cdot)$ ist das Skalarprodukt.
Zeige, dass man die Bewegungsgleichung wie folgt

$$\sum_{a,b} \Gamma_{ab,c} \dot{u}^a \dot{u}^b + \sum_b g_{cb} \ddot{u}^b = 0,$$

ausdrücken kann. Das ist die Gleichung der Geodätischen Linien auf der Fläche.