

5. Das von einer vorgegebenen Ladungs- und Stromverteilung erzeugte e.m. Feld.

In diesem Abschnitt studieren wir das in Abschnitt 3 formulierte Grundproblem (4):  $\rho(\vec{x}, t)$  und  $\vec{j}(\vec{x}, t)$  sind vorgegeben. Man sucht  $\vec{E}(\vec{x}, t)$  und  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  so, dass die Maxwellgl'n. erfüllt sind. Zur Konstruktion dieser Lösungen benutzen wir die Potentiale  $\Phi$  und  $\vec{A}$ ; siehe (3.8), (3.10) und arbeiten in der Lorentz-Eichung

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.1)$$

Die inhomogenen Maxwellgl'n. sind dann

$$-\Delta \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \rho, \quad (5.2)$$

siehe (3.10), (3.45), oder, mit (5.1),

$$\square \Phi = \rho, \quad (5.3)$$

und

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \vec{j},$$

siehe (3.8), (3.10), (3.46), oder, mit (5.1),

$$\square \vec{A} = \vec{j} \quad (5.4)$$

Die Lorentz-Eichung kann durch geeignete Wahl von  $\Phi$  und  $\vec{A}$  immer erfüllt werden:

Seien  $\Phi^*$  und  $\vec{A}^*$  Potentiale zu vorgegebenen e.m. Feldern,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , d.h.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}^*, \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}^* - \vec{\nabla} \Phi^* \quad (5.5)$$

Setzen  $\vec{A} = \vec{A}^* - \vec{\nabla} \chi$ ,  $\Phi = \Phi^* + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \chi$ ,

wo  $\chi$  eine Funktion ist; (Eichtransformation).

Dann folgt, dass

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \chi + \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^* \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.6)$$

Um (5.6) zu lösen, muss

$$\square \chi = - \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}^* \right), \quad (5.7)$$

d.h. eine inhomogene Wellengleichung, gelöst werden, und dies werden wir nun lernen!

## Lösung der inhomogenen Wellengleichung.

$$\square u(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}, t), \quad (5.8)$$

Anfangsbedg.

$$u(\vec{x}, 0) = \varphi(\vec{x}), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{x}, 0) = \psi(\vec{x}). \quad (5.9)$$

Prinzip: Da (5.8) linear in  $u$  ist, ist die allg.

Lösung von (5.8) zu vorgeg.  $\rho =$  spezielle Lösung

von (5.8) zu vorgeg.  $\rho +$  allg. Lösung von  $\square u = 0!$

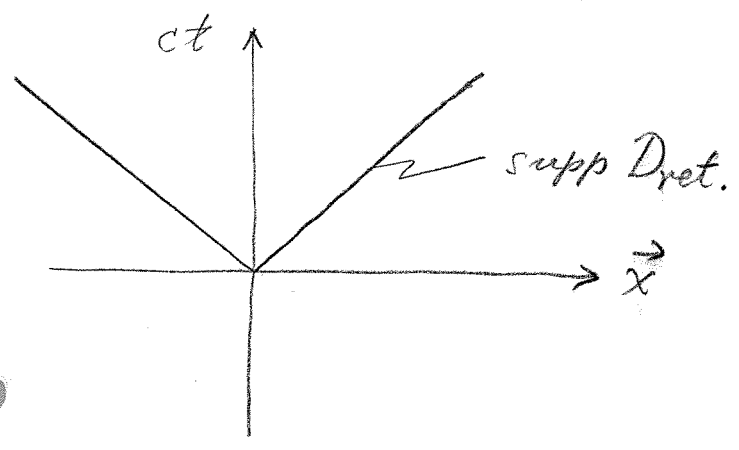
Das letzte Problem haben wir in Abschnitt 4 gelöst.

Daher genügt es, eine spezielle Lösung von (5.8) zu konstruieren. Dazu benützen wir die Raum-Zeit Koordinaten  $x = (x^0, \vec{x}) = (ct, \vec{x})$ , in denen wir nun zunächst eine auslaufende Lösung von (5.8) konstruieren. Dazu benützen wir eine Green'sche Funktion des d'Alembert Operators  $\square$ , die retardierte Fu.

$$D_{\text{ret.}}(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 - r), \quad r = |\vec{x}|. \quad (5.10)$$

Das ist der auslaufende Teil der Distribution  $D$  von Gl. (4.35), d.h.

$$D_{\text{ret.}}(x) = \theta(x^0) D(x). \tag{5.11}$$



$D_{\text{ret.}}(x) =$  in  $x=0$  erzeugte, auslaufende Kugelwelle;

$$\theta(x^0) = \begin{cases} 1, & x^0 \geq 0, \\ 0, & x^0 < 0. \end{cases}$$

Wir behaupten nun, dass

$$\square D_{\text{ret.}}(x) = \delta(x), \tag{5.12}$$

wo  $\delta(x) = \delta(x^0) \delta(x^1) \delta(x^2) \delta(x^3)$  (4 dim. Dirac'sche  $\delta$ -Funktion). Zum Beweis von (5.12) rechnen wir:

$$\begin{aligned} \square D_{\text{ret.}}(x) &= \left( \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2} - \Delta \right) \theta(x^0) D(x) \\ &= \ddot{\theta}(x^0) D(x) + 2 \dot{\theta}(x^0) \left( \frac{\partial}{\partial x^0} D \right)(x) \\ &\quad + \theta(x^0) \square D(x), \end{aligned} \tag{5.13}$$

wo  $\dot{f} \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} f$ . Nun ist

$$\dot{\theta}(x^0) = \delta(x^0). \tag{5.14}$$

Wegen (4.32), (4.34) und (4.35) ist  $\square D(x) = 0$ ,  
 d.h. der dritte Term auf der R.S. von (5.13) verschwin-  
 det! Also gilt für eine beliebige Testfunktion  
 $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ , dass

$$\begin{aligned} D_{\text{ret.}}(\square f) &= (\square D_{\text{ret.}})(f) \\ &= \int dx^0 d^3x \left\{ \overset{\uparrow}{\ddot{\theta}(x^0)} \overset{\downarrow}{D(x)} f(x) + 2\dot{\theta}(x^0) \dot{D}(x) f(x) \right\} \\ &= \int dx^0 d^3x \left\{ -\dot{\theta}(x^0) D(x) \dot{f}(x) + \dot{\theta}(x^0) \dot{D}(x) f(x) \right\} \\ &\stackrel{(5.14)}{=} \int d^3x \left\{ -\underbrace{D(\vec{x}, 0)}_{=0} \dot{f}(\vec{x}, 0) + \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x^0} D\right)(\vec{x}, 0)}_{=\delta(\vec{x})} f(\vec{x}, 0) \right\} \\ &= \int d^3x \delta(\vec{x}) f(\vec{x}, 0) = f(0), \end{aligned}$$

wegen (4.36). Damit ist (5.12) bewiesen.

Eine zweite Green'sche Funktion für  $\square$  ist der  
einlaufende Teil von  $D$ , d.h. die avancierte Green'  
sche Fu.

$$D_{\text{av.}}(x) = -\theta(-x^0) D(x), \quad (5.15)$$

und man zeigt wie oben, dass

$$\square D_{\text{av.}}(x) = \delta(x). \quad (5.16)$$

Es gilt dann, dass die "Kommutatorfunktion"  $D$  <sup>73.</sup> durch

$$D(x) = D_{\text{ret.}}(x) - D_{\text{av.}}(x) \quad (5.17)$$

gegeben ist.

Nun können wir das Anfangswertproblem (5.8), (5.9) lösen: Wir definieren

$$u_{\text{ret.}}(x) = \int D_{\text{ret.}}(x-y) \rho(y) d^4 y \quad (5.18)$$

Wegen (5.12) löst  $u_{\text{ret.}}(x)$  die Gleichung (5.8). Nun definieren wir

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\text{in}}(\vec{x}) &= \varphi(\vec{x}) - u_{\text{ret.}}(\vec{x}, 0), \\ \psi_{\text{in}}(\vec{x}) &= \psi(\vec{x}) - u_{\text{ret.}}(\vec{x}, 0). \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Satz. Die Lösung des Anfangswertproblems (5.8),

(5.9) wird durch

$$u(x) = u_{\text{ret.}}(x) + \int d^3 y \left\{ \varphi_{\text{in}}(\vec{y}) \dot{D}(\vec{x}-\vec{y}, x^0) + \psi_{\text{in}}(\vec{y}) D(\vec{x}-\vec{y}, x^0) \right\} \quad (5.20)$$

gegeben. Analoges gilt für "ret."  $\rightarrow$  "av."

Beweis. Es ist klar, dass  $u$  die Gl. (5.8) löst, 74

da  $u_{\text{ret.}}$  (5.8) löst und der 2. Term auf der R.S. von (5.20) die Wellengl. löst. Wegen (4.36) gilt

$$u(\vec{x}, 0) = u_{\text{ret.}}(\vec{x}, 0) + \varphi_{\text{in}}(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}),$$

und

$$\begin{aligned} \dot{u}(\vec{x}, 0) &= \dot{u}_{\text{ret.}}(\vec{x}, 0) + \dot{\varphi}_{\text{in}}(\vec{x}) \\ &\quad + \int d^3y \varphi_{\text{in}}(\vec{y}) \ddot{D}(\vec{x}-\vec{y}, 0) \\ &= \dot{u}_{\text{ret.}}(\vec{x}, 0) + \dot{\varphi}_{\text{in}}(\vec{x}) \\ &\quad + \int d^3y \varphi_{\text{in}}(\vec{y}) \Delta D(\vec{x}-\vec{y}, 0) \\ &= \dot{u}_{\text{ret.}}(\vec{x}, 0) + \dot{\varphi}_{\text{in}}(\vec{x}) \\ &\quad + \int d^3y (\Delta \varphi_{\text{in}})(\vec{y}) D(\vec{x}-\vec{y}, 0) \\ &\stackrel{(4.36)}{=} \dot{u}_{\text{ret.}}(\vec{x}, 0) + \dot{\varphi}_{\text{in}}(\vec{x}) = \dot{\varphi}(\vec{x}). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nennen wir den 2. Term auf der R.S. von (5.20)

$u_{\text{in}}(x)$ , so gilt, dass

$$\lim_{x^0 \rightarrow -\infty} u(x) = u_{\text{in}}(x), \quad (5.21)$$

falls  $\rho(\vec{y}, y^0) \rightarrow 0$ , für  $y^0 \rightarrow -\infty$ . Analoges gilt für "in"  $\rightarrow$  "out", "ret."  $\rightarrow$  "av."!

Die retardierten Potentiale.

Mit der Green'schen Funktion  $D_{ret.}(x)$  können wir nun die Gl. (5.7) lösen, und daher ist es legitim,

in der Lorentz-Eichung (5.1) zu arbeiten. Nun konstruieren wir spezielle Lösungen der Gln. (5.3) und (5.4):

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \int d^4y D_{ret.}(x-y)\rho(y) \\ &= \int d^3y \frac{\rho(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

und

$$\vec{A}(x) = \int d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|}. \quad (5.23)$$

Diese Ausdrücke sind ähnlich zu denjenigen der Elektrostatik, (3.34), resp. Magnetostatik, (3.40),

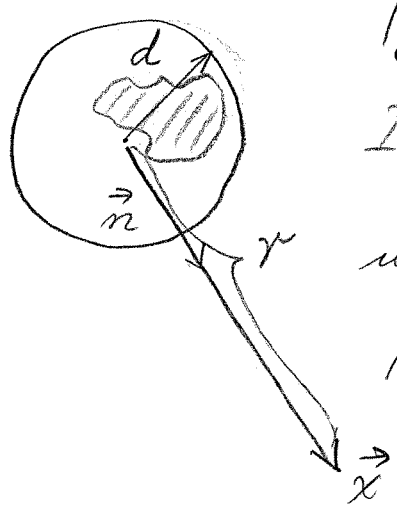


bis auf die Retardierung:  $t \rightarrow t - \frac{|\vec{r} - \vec{y}|}{c}$ ; (eine Änderung von  $\rho$  od.  $\vec{j}$  in  $(\vec{y}, t)$  beeinflusst das Feld in  $\vec{x}$  erst zur Zeit  $t + \frac{|\vec{r} - \vec{y}|}{c}$ ).

Übung: Zeige dass  $(\vec{\Phi}, \vec{A})$  die Lorentz-Eichbedingung (5.1) erfüllen.

Die von einer Ladungs- und Stromverteilung ausgestrahlte e.m. Energie.

Ladungs- und Stromverteilung im Gebiet  $|\vec{y}| < d$ .



Im statischen Fall fallen  $\vec{E}$  wie  $\frac{1}{r^2}$  und  $\vec{B}$  wie  $\frac{1}{r^3}$  ab. Im zeitabh.

Fall bewirkt die Retardierung, dass

$$\left. \begin{aligned} \vec{E} &\sim \frac{1}{r}, \quad \vec{B} \sim \frac{1}{r}, \\ \Rightarrow \vec{S} = c (\vec{E} \wedge \vec{B}) &\sim \frac{1}{r^2} \end{aligned} \right\} (5.24)$$

$\Rightarrow$  Abstrahlung von e.m. Energie ins Unendliche!

77

Die Beiträge der Ordnung  $\frac{1}{r}$  zu  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  erhalten wir durch Taylorentwicklung in (5.22) und (5.23):

$$t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{rc}\right) \quad (5.25)$$

Damit erhalten wir aus (5.22) und (5.23) die Näherungen

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{x}, t) &\approx \frac{1}{4\pi r} \int d^3y \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}), \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &\approx \frac{1}{4\pi r} \int d^3y \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}), \end{aligned} \quad (5.26)$$

die man im Bereich  $r \gg d$  benutzen darf,

falls die zeitliche Änderung von  $\rho$  und  $\vec{j}$

in der Zeit  $\frac{d^2}{rc}$  klein ist. Für periodische

$\rho$  und  $\vec{j}$ , mit Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , folgt

$$r \gg \frac{d^2}{Tc} = \frac{\omega d^2}{2\pi c}, \quad (\text{Wellenzone}), \quad (5.27)$$

d.h. die Kreisfrequenz  $\omega$  soll klein im Vergleich zu  $rc/d^2$  sein.

Aus (5.26) berechnen wir nun die Terme  $\propto \frac{1}{r}$ , die zu  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  beitragen:

Aus (5.23) folgt, dass

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(\vec{x}) &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{x}) \approx \int d^3y \frac{\vec{\nabla}_x \wedge \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
 &\approx - \int d^3y \frac{\vec{n} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{4\pi |\vec{x}-\vec{y}|} + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \\
 &\approx - \vec{n} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{x}) + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

mit  $\vec{A}$  wie in (5.26), und, mit (5.22),

$$\vec{E}(\vec{x}) \approx \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\vec{x}) \vec{n} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{x})$$

$$\stackrel{(5.1)}{=} \underbrace{\left( \vec{n} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{\text{(Lorentz-Eichung)}}(\vec{x}) \vec{n} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{x})$$

$$= \vec{n} \wedge \left( \vec{n} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(\vec{x}) \right) = - \vec{n} \wedge \vec{B}(\vec{x}), \quad (5.29)$$

Diese Formeln kann man sich merken, indem man die Substitutionsregel

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \rightarrow -n^k \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad k=1,2,3, \quad (5.30)$$

die für die Beiträge  $\sim \frac{1}{r}$  gilt, benutzt!

79.

Aus (5.28) und (5.29) ersehen wir, dass in der Wellenzone die Beiträge der Ordnung  $\frac{1}{r}$  zu  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  vollständig durch

$$\vec{A}_\perp = \text{Komponente von } \vec{A} \perp \vec{n}, \quad (5.31)$$

d. h. die Transversalkomponenten von  $\vec{A}$ , bestimmt sind.

Lokal verhalten sich  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{n}$  wie in einer ebenen Welle, und der Poynting Vektor,  $\vec{S}$ , ist

$$\vec{S} = c |\vec{E}|^2 \vec{n} = c |\vec{B}|^2 \vec{n}, \quad (5.32)$$

d. h.  $\vec{S}$  geht radial nach aussen.

### Multipolentwicklung.

Wir untersuchen nun den Spezialfall, wo die Änderung von  $\vec{j}$  in der Zeit  $\frac{d}{c}$  klein ist, d. h.

$$T \gg \frac{d}{c},$$

oder

$$\lambda = Tc \gg d. \quad (5.33)$$

Dann können wir auf der R. S. von (5.26)

$\vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c})$  im 2. Argument nach

$\frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}$  entwickeln und nach der ersten Ordnung abbauen, d.h.

$$\vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}) \approx \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) \quad (5.34)$$

Wir diskutieren die Beiträge der beiden Terme auf der R. S. von (5.34) separat.

Elektrische Dipolstrahlung. Der erste Term auf der

R. S. von (5.34) gibt

$$\vec{A}^{(1)}(x) = \frac{1}{4\pi r} \int d^3 y \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) \quad (5.35)$$

$$\text{Nun ist } j_l(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) = \sum_k \left( \frac{\partial}{\partial y^k} y^l \right) j_k(\vec{y}, t - \frac{r}{c}).$$

Dies setzen wir in (5.35) ein und finden nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \vec{A}^{(1)}(x) &= -\frac{1}{4\pi r} \int d^3 y \vec{y} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j})(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) \\ &\stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{4\pi r c} \dot{\vec{P}}(t - \frac{r}{c}), \end{aligned} \quad (5.36)$$

Kontinuitätsgl.:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{P}(t) \equiv \int d^3y \vec{y} \rho(\vec{y}, t) = \text{el. Dipolmoment} \quad (5.37)$$

(Hertzscher Dipol)

Daraus folgt mit (5.28) und (5.29):

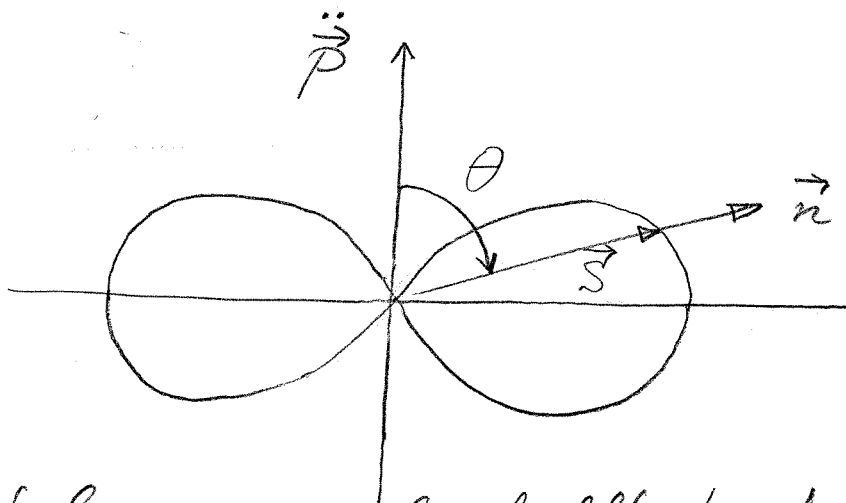
$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r c^2} \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \ddot{\vec{P}}(t - \frac{r}{c})) \equiv \frac{1}{4\pi r c^2} \ddot{\vec{P}}_{\perp}(t - \frac{r}{c}), \quad (5.38)$$

und

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{n} \wedge \vec{E}(\vec{x}). \quad (5.39)$$

Der Poynting Vektor  $\vec{S}$  steht radial nach aussen und hat den Betrag

$$|\vec{S}(\theta, r)| = \frac{1}{(4\pi)^2 r^2 c^3} |\ddot{\vec{P}}|^2 \sin^2 \theta \quad (5.40)$$



Die totale, ins  $\infty$  abgestrahlte Leistung beträgt also

$$P = \frac{|\ddot{\vec{P}}|^2}{(4\pi)^2 c^3} \int (\sin^2 \theta) \sin \theta d\varphi d\theta = \frac{2}{12\pi c^3} |\ddot{\vec{P}}|^2 \quad (5.41)$$

## Magnetische Dipolstrahlung.

Nun berechnen wir den Beitrag des zweiten Terms auf der R.S. von (5.34) zu  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{S}$ . Setzen wir diesen in (5.26) ein, so finden wir

$$\vec{A}^{(2)}(\vec{x}, t) \approx \frac{1}{4\pi r} \int d^3y \frac{\vec{n} \cdot \vec{j}}{c} \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}), \quad (5.42)$$

mit  $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$  (unabh. von  $\vec{y}$ ). Die zu berechnenden Integrale sind von der Form

$$\begin{aligned} I_{kl} &:= \frac{1}{c} \int d^3y y_k \frac{\partial j_l}{\partial t}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) \\ &= \frac{1}{2c} \int d^3y \left( y_k \frac{\partial j_l}{\partial t} - y_l \frac{\partial j_k}{\partial t} \right) \leftarrow m_{kl} \quad (5.43) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2c} \int d^3y \left( y_k \frac{\partial j_l}{\partial t} + y_l \frac{\partial j_k}{\partial t} \right) \leftarrow \ddot{Q}_{kl} \quad (5.44)$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} m_{kl} &= \frac{1}{2c} \int d^3y \left( y_k j_l(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) - y_l j_k(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) \right) \\ &= -m_{lk}. \quad (5.45) \end{aligned}$$

Die Zahlen  $m_{kl}$  sind die Matrixelemente einer

antisymmetrischen  $3 \times 3$  Matrix. Eine solche ist dual zu einem Axialvektor  $\vec{m}$ , der durch

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3y \vec{y} \wedge \vec{j}(\vec{y}, t) \quad (5.46)$$

gegeben ist. Man nennt  $\vec{m}$  das magnetische Moment der Stromverteilung  $\vec{j}$ . Aus (5.42) - (5.46)

folgt für das Vektorpotential in der Wellenzone:

$$\vec{A}_{HD}^{(2)}(\vec{x}, t) = - \frac{1}{4\pi r} \vec{n} \wedge \dot{\vec{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad (5.47)$$

Mit (5.28) und (5.29) erhalten wir dann

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r c^2} \vec{n} \wedge \left( \vec{n} \wedge \ddot{\vec{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right), \quad (5.48)$$

und

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = - \vec{n} \wedge \vec{B}(\vec{x}, t). \quad (5.49)$$

Diese Formeln sind analog zu (5.38) und (5.39):

Wenn man  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{P})$  durch  $(\vec{B}, -\vec{E}, \vec{m})$  ersetzt,

so gehen (5.38) und (5.39) in (5.48) und (5.49)

über. Das ergibt die magnetische Dipolstrahlung.



Da  $\vec{S} \rightarrow \vec{S}'$ , unter der eben beschriebenen Substitution, muss man in (5.40) und (5.41) nur  $\vec{P}$  durch  $\vec{m}$  ersetzen.

### Elektrische Quadrupolstrahlung.

Nun betrachten wir den Beitrag von (5.44) zum abgestrahlten Feld in der Wellenzone. Wir definieren die symmetrische Matrix

$$q_{kl}(t) := \frac{1}{2} \int d^3y \, y_k y_l \rho(\vec{y}, t) \quad (5.50)$$

Mit der Kontinuitätsgleichung  $\frac{1}{c} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ,

finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \dot{q}_{kl}(t) &= -\frac{1}{2} \int d^3y \, y_k y_l \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{y}, t) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3y \, (y_k j_l(\vec{y}, t) + y_l j_k(\vec{y}, t)) \end{aligned} \quad (5.51)$$

Nach Vergleich mit (5.44) und Einsetzen in (5.42)

finden wir

$$\vec{A}_{EQ}^{(2)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r c^2} \ddot{q}(t - \frac{r}{c}) \vec{n}, \quad (5.52)$$

da  $Q = Q^T$  symmetrisch ist. In Komponenten

$$A_{\ell}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r c^2} \sum_k n_k \ddot{q}_{k\ell} \left( t - \frac{r}{c} \right). \quad (5.53)$$

Mit (5.28), (5.29) folgen die Ausdrücke für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Man bemerke, dass der Ausdruck (5.52) äquivalent zum Ausdruck

$$\vec{A}_{EQ}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r c^2} \ddot{Q} \vec{n} \quad (5.54)$$

ist, wo  $Q$  die symmetrische Matrix mit Matrixelementen

$$Q_{k\ell}(t) := \frac{1}{2} \int d^3y \left( y_k y_{\ell} - \frac{1}{3} y^2 \delta_{k\ell} \right) \rho(\vec{y}, t) = Q_{\ell k}(t) \quad (5.55)$$

ist. Man hat, dass

$$\text{Sp } Q(t) = \sum_k Q_{kk}(t) = 0. \quad (5.56)$$

Der Punkt ist, dass

→ kein Beitrag zu  $\vec{B}, \vec{E}$  in Wellenzone! Siehe (5.28)!

$$\vec{A}_{EQ}^{(2)} - \vec{A}_{EQ} \propto \vec{n}, \quad \forall t. \quad (5.57)$$

Aus (5.28) und (5.29) schliessen wir dann, dass

$\vec{A}_{EQ}^{(2)}$  -  $\vec{A}_{EQ}$  nicht zu den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in der Wellenzone beiträgt.

Man nennt  $Q$  den elektrischen Quadrupoltenor.

Sei  $\rho$  eine bezüglich Rotationen um die  $x$ -Achse symmetrische Ladungsverteilung. Dann ist

$$Q_{kl} = 0, \text{ für } k \neq l,$$

$$Q_{11} = \frac{1}{2} \int d^3y \left( \frac{2}{3} y_1^2 - \frac{1}{3} y_2^2 - \frac{1}{3} y_3^2 \right) \rho(\vec{y}, t)$$

$$\equiv 2T.$$

Weiter sind  $Q_{22} = Q_{33}$  und  $\text{Sp } Q = 0$ ; also

$$Q_{22} = Q_{33} = -T.$$

Daher

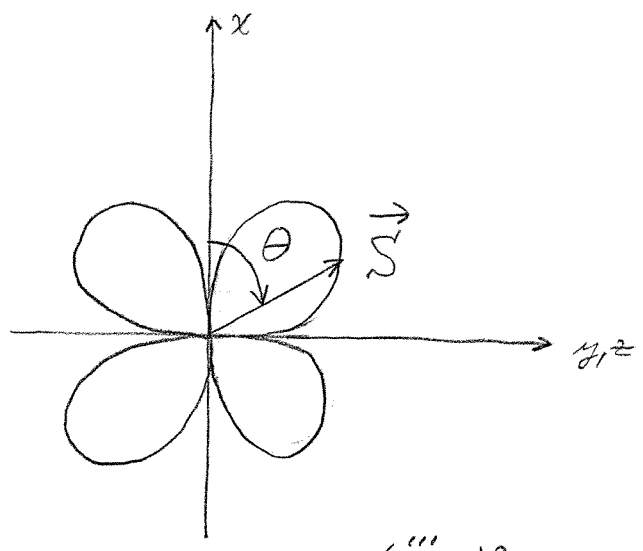
$$Q = \begin{pmatrix} 2T & & \\ & -T & \\ & & -T \end{pmatrix}, \quad (5.58)$$

und wir finden

$$\vec{A}_{EQ}(\vec{x}, t) = \frac{\ddot{T}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r c^2} (2n_1, -n_2, -n_3) \quad (5.59)$$

und

$$B(\vec{r}, t) = \frac{3 \ddot{T}(t - \frac{r}{c})}{4\pi r c^3} (0, -n_1 n_3, n_1 n_2) \quad (5.60)$$



Aus (5.32) folgt  
für den Poynting  
Vektor  $\vec{S}$ :

$$\vec{S}(r, \theta) = \frac{9 (\ddot{T})^2}{16 \pi^2 r^2 c^5} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (5.61)$$

Daraus finden wir für die totale, abgestrahlte Leistung

$$P_{EQ} = \frac{3}{10\pi c^5} (\ddot{T})^2. \quad (5.62)$$

Das gesamte elektromagnetische Feld ist die Summe aller Multipolfelder; (Dipol + Quadrupol + Octupol + ...).

Im Poyntingvektor  $\vec{S}$  treten dann Interferenzterme auf, die das Strahlungsdiagramm komplizieren.

Integriert man aber  $\vec{S}(r, \Omega)$  über alle Raumwinkel

$\Omega$ , so fallen die Interferenzterme wieder weg; (Orthogonalität der Kugelfunktionen!). Daher ist die gesamt abgestrahlte Leistung  $P$  additiv in den Beiträge einzelner Multipole.

### Streuung elektromagnetischer Wellen an geladener Materie.

Wir bestrahlen ein Target mit monochromatischen, elektromagnetischen Wellen. Die Ausdehnung  $d$  des Targets sei klein im Vergleich zur Wellenlänge  $\lambda$  der einfallenden Welle. Diese induziert dann im Target elektrische Ströme, falls dieses aus geladenen Teilchen besteht. Diese Ströme erzeugen ein gestreutes elektromagnetisches Feld, das man in elektrische und magnetische Multipole entwickeln kann. Wenn  $d \ll \lambda$ , dann dominieren die elektrischen und magnetischen Dipolterme, die wir vorher berechnet haben.

Um explizite Rechnungen durchführen zu können, benötigen wir ein Modell des Targets, das uns zu berechnen gestattet, was für Ströme durch ein einfallendes Feld erzeugt werden!

Eine monochromatische Welle in Richtung  $\vec{n}_0$  falle auf das Target ein:

$$\vec{E}_{in} = \vec{\epsilon}_0 e^{i(k\vec{n}_0 \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad |\vec{\epsilon}_0| = E_0, \quad (5.63)$$

$$\vec{B}_{in} = \vec{n}_0 \wedge \vec{E}_{in},$$

siehe Glm. (4.10). Hier ist  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$ .

$\vec{E}_{in}$  und  $\vec{B}_{in}$  erzeugen im Target ein elektrisches

Dipolmoment  $\vec{P}$  und ein magnetisches Dipolmoment  $\vec{m}$ . Zu diesen gehören abgestrahlte elektromagnetische Felder  $\vec{E}_{sc}$ ,  $\vec{B}_{sc}$ , die man den Formeln (5.38), (5.39), (5.48) und (5.49) entnimmt. Es ist plausibel, dass  $\vec{P}$  und  $\vec{m}$  die gleiche zeitliche Periodizität haben, wie  $\vec{E}_{in}$  und  $\vec{B}_{in}$ :

$$\begin{aligned}\vec{P}(t) &= \vec{P} e^{-i\omega t}, \\ \vec{m}(t) &= \vec{m} e^{-i\omega t},\end{aligned}\tag{5.64}$$

wo  $\vec{P}$  und  $\vec{m}$  komplexwertige Vektoren sind.

Aus (5.38) und (5.48), (5.49) folgt dann, dass

$$\begin{aligned}\vec{E}_{sc}(\vec{x}, t) &= -\frac{\omega^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[ \vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{P}) - \vec{n} \wedge \vec{m} \right] \\ &\quad \times e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}, \quad \left( \frac{\omega}{c} = k \right),\end{aligned}\tag{5.65}$$

und

$$\vec{B}_{sc}(\vec{x}, t) = \vec{n} \wedge \vec{E}_{sc}(\vec{x}, t).\tag{5.66}$$

Daraus berechnen wir nun die ins Raumwinkel-  
element  $d\Omega(\vec{n})$  abgestrahlte Leistung,  $dP(\vec{n}, \vec{\epsilon})$ ,  
mit Polarisation  $\vec{\epsilon}$ ,  $|\vec{\epsilon}| = 1$ :

$$dP(\vec{n}, \vec{\epsilon}) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}, \vec{\epsilon}; \vec{n}_0, \vec{\epsilon}_0) F(\vec{n}_0, \vec{\epsilon}_0) d\Omega(\vec{n}),\tag{5.67}$$

wo  $F(\vec{n}_0, \vec{\epsilon}_0)$  der einfallende Energiefluss pro

Flächen- und Zeiteinheit ist. Den Proportionalitäts-

faktor,  $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}, \vec{\epsilon}; \vec{n}_0, \vec{\epsilon}_0)$ , nennt man den differen-

tiellen Streuquerschnitt. Er hat die Dimension einer Fläche (pro Raumwinkelelement). Mit dem Ausdruck (5.32) für den Poynting-Vektor  $\vec{S}$  finden wir aus (5.67)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}, \vec{\varepsilon}; \vec{n}_0, \vec{\varepsilon}_0) = \frac{c r^2 |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{E}_{sc}(r\vec{n}, t)|^2}{c |\vec{\varepsilon}_0^* \cdot \vec{E}_{in}(0, t)|^2}, \quad (5.68)$$

wo  $\vec{\varepsilon}_0^*$  = komplex konjugierter des Vektors  $\vec{\varepsilon}_0$ ; siehe Gln. (4.12) - (4.15). Mit (5.63) und (5.65) finden wir nun:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}, \vec{\varepsilon}; \vec{n}_0, \vec{\varepsilon}_0) = \frac{\omega^4}{c^4 |\vec{\varepsilon}_0|^2} \left| \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{P} + (\vec{n} \wedge \vec{\varepsilon}^*) \cdot \vec{m} \right|^2 \quad (5.69)$$

Die Abhängigkeit von  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  von  $\vec{n}_0$  und der Richtung von  $\vec{\varepsilon}_0$  ist in den Grössen  $\vec{P}$  und  $\vec{m}$  versteckt.

Die Proportionalität von  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  zu  $\left(\frac{\omega}{c}\right)^4 = k^4$

heisst Rayleigh'sches Gesetz, (Rayleigh Streuung).



Sie erklärt das Himmelsblau und das Abendrot;  
(Details!).

Für ein typisches, dielektrisches Target haben wir,  
dass

$$\vec{P} = \chi(\omega) \vec{E}_{in} \quad (5.70)$$

wo  $\chi$  die elektrische Suszeptibilität des Targets

ist; (sie kann von der Frequenz  $\omega$  der einfallenden  
Welle abhängen). Weiter ist  $\vec{m} \approx 0$ . Für  $d \ll \lambda$

können wir dann das Target als einen im Ursprung

0 sitzenden, punktförmigen Hertz'schen Dipol auf-

fassen. Dann folgt aus (5.69):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{n}, \vec{\varepsilon}; \vec{n}_0, \vec{\varepsilon}_0) = \frac{\omega^4}{c^4} \chi(\omega)^2 \left| \vec{\varepsilon}^* \cdot \frac{\vec{\varepsilon}_0}{|\vec{\varepsilon}_0|} \right|^2 \quad (5.71)$$

Das Rayleigh'sche Gesetz gilt im Bereich, wo

$\chi(\omega) \approx \chi_0 = \text{const.}$  ist.

Ein explizites Modell (gedämpfter, harmoni-  
scher Oszillator) studieren wir in den Übungen.