Quantenmechanik II. Übung 11.

FS 11 *Abgabe:* Di 17. Mai 2011

1. Korrelationsfunktionen ohne zweite Quantisierung

i) *Ein-Teilchen-Korrelationsfunktionen.* Sei B ein 1-Teilchenoperator auf $\mathcal{H}$ und $d\Gamma(B)$ der entsprechende Operator auf dem fermionischen Fockraum $\mathcal{F}$ über $\mathcal{H}$, d.h.

$$d\Gamma(B) = \sum_{i=1}^{N} B^{(i)} \tag{1}$$

auf N-Teilchenzuständen. Seien $\Psi(\xi)$, $(\xi = (\vec{x}, s) \in \mathbb{R}^3 \times \{\pm 1\})$ die Vernichtungsoperatoren der Orts- und Spin-Basis $|\xi\rangle$ für $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathbb{C}^2)$. Ausgehend von der Fockraum-Darstellung

$$d\Gamma(B) = \int d\xi d\xi' \Psi^*(\xi) \langle \xi | B | \xi' \rangle \Psi(\xi') \tag{2}$$

wurde in der Vorlesung der Erwartungswert von (1) in $|\Phi_0\rangle \in \mathcal{F}$ dargestellt als

$$\langle \Phi_0 | d\Gamma(B) | \Phi_0 \rangle = \int d\xi d\xi' \langle \xi | B | \xi' \rangle g(\xi, \xi') \tag{3}$$

mit der 1-Teilchen-Korrelationsfunktion

$$g(\xi, \xi') = \langle \Phi_0 | \Psi^*(\xi) \Psi(\xi') | \Phi_0 \rangle \ . \tag{4}$$

Im Fall des Fermi-Sees

$$|\Phi_0\rangle = \Big(\prod_{(\vec{k},s)} a^*_{\vec{k},s} \Big) |0\rangle \tag{5}$$

(mit Produkt über $|\vec{k}| \le k_F$, $\vec{k} \in (2\pi/L)\mathbb{Z}^3$, $s = \pm 1$) wurde $(L \to \infty)$

$$g(\xi, \xi') = \begin{cases} 0 \ , & (s \neq s') \\ (2\pi)^{-3} \int_{|\vec{k}| \le k_F} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{k}(\vec{x} - \vec{x}')} d^3k \ , & (s = s') \end{cases} \tag{6}$$

gezeigt und das Integral berechnet. Leite (3, 6) auf einfachere Weise als in der Vorlesung her, und zwar ohne Verwendung der zweiten Quantisierung (2, 4, 5). Fasse dazu den Fermi-See als Slater-Determinante

$$|\Phi_0\rangle = \sqrt{N!} \mathcal{A} \Big(\bigotimes_{(\vec{k},s)} |\varphi_{\vec{k},s}\rangle \Big)$$

von ebenen Wellen $\langle \vec{x}, s | \varphi_{\vec{k},s'} \rangle = L^{-3/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\vec{x}} \delta_{ss'}$ auf. Für solche wurde gezeigt $(\alpha = (\vec{k}, s))$

$$\langle \Phi_0 | d\Gamma(B) | \Phi_0 \rangle = \sum_{\alpha} \langle \varphi_\alpha | B | \varphi_\alpha \rangle \ . \tag{7}$$

ii) *Paarkorrelationsfunktionen.* Sei B ein 2-Teilchenoperator, der bezüglich der Orts- und Spin-Basis diagonal ist:

$$B|\xi \otimes \xi'\rangle = B(\xi, \xi')|\xi \otimes \xi'\rangle \ .$$

In der Vorlesung wurde für

$$d\Gamma(B) = \sum_{i<j} B^{(ij)}$$

gezeigt, dass

$$\langle \Phi_0 | d\Gamma(B) | \Phi_0 \rangle = \int d\xi d\xi' B(\xi, \xi') G(\xi, \xi') \tag{8}$$

mit

$$G(\xi, \xi') = \langle \Phi_0 | \Psi^*(\vec{x}', s') \Psi^*(\vec{x}, s) \Psi(\vec{x}, s) \Psi(\vec{x}', s') | \Phi_0 \rangle \ , \tag{9}$$

was zu

$$G(\xi, \xi') = g(\xi, \xi) g(\xi', \xi') - g(\xi, \xi') g(\xi', \xi) \tag{10}$$

berechnet wurde (beachte beim Vergleich, dass $g(\xi, \xi) = n/2$, wobei n die Teilchendichte ist). Zeige nun (8, 10) ohne Verwendung von (9), sondern von

$$\langle \Phi_0 | d\Gamma(B) | \Phi_0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \langle \varphi_\alpha \otimes \varphi_\beta | B | \varphi_\alpha \otimes \varphi_\beta \rangle - \langle \varphi_\beta \otimes \varphi_\alpha | B | \varphi_\alpha \otimes \varphi_\beta \rangle \tag{11}$$

für Slater-Determinanten $|\Phi_0\rangle$.