Quantenmechanik II. Übung 1.

FS 11 *Abgabe:* Do 3. März 2011

1. Bindung durch schwache Potentiale

Sei $H = -\Delta + \lambda V(\vec{x})$ auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit attraktivem Potential $V(\vec{x}) \leq 0,\ V \not\equiv 0$, endlicher Reichweite, d.h. $V(\vec{x}) = 0$ für $|\vec{x}| > R_0$. Ob H für schwache Kopplungen λ bindet, hängt von der Dimension n ab. Zeige:

(i) Für $n \leq 2$ hat H mindestens einen Eigenwert $E < 0$ für noch so kleine $\lambda > 0$.

Hinweis: Verwende das Variationsprinzip (6.20) mit $\psi(\vec{x}) = \psi_0(\vec{x}/l)$ und $l \to \infty$. Für $n = 2$ ist zudem ψ_0 geschickt zu wählen, etwa $\psi_0(\vec{x}) = f(|\vec{x}|^\varepsilon)$ mit $f(0) = 1$ und $f(s) = 0$, $(s \geq 1)$.

(ii) Für $n \geq 3$ ist $H \geq 0$ für kleine $\lambda > 0$.

Hinweis: Verwende die Hardy-Ungleichung

$$-\Delta \geq \left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \frac{1}{\vec{x}^{\,2}}\ , \qquad (n \geq 3)\ .$$

aus der Lösung der Aufgabe 8.4 zur Vorlesung Quantenmechanik I.

2. Niederenergetische Streuung und Streulänge

Betrachte die Streuung an einem sphärisch symmetrischen Potential endlicher Reichweite R_0. Das Potential habe keine gebundenen Zustände der Energie Null, was generisch zutrifft.

(i) Zeige für die Streuphasen, dass

$$\delta_l(k) = O(k^{2l+1})\ , \qquad (k \to 0)\ . \tag{1}$$

Schliesse daraus, dass im niederenergetischen Limes die Streuung auf die s-Welle beschränkt ist: Der differentielle Streuquerschnitt wird unabhängig vom Streuwinkel, und zwar

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(k = 0, \vec{e}) = a^2 \tag{2}$$

mit der Streulänge

$$a = -\lim_{k \to 0} \frac{\delta_0(k)}{k}\ . \tag{3}$$

Insbesondere ist $\sigma(k = 0) = 4\pi a^2$.

Gehe wie folgt vor: Sei $\tilde{\jmath}_l(\rho)$ durch die Partialwellenentwicklung (5.18) der ebenen Welle definiert und $\tilde{h}_l(\rho)$ als Lösung der freien radialen Schrödinger-Gleichung (5.19) mit Asymptotik $\tilde{h}_l(\rho) = e^{\mathrm{i}(\rho - l\pi/2)}(1 + O(\rho^{-1})), (\rho \to \infty)$. Zeige $\tilde{\jmath}_l(\rho) = \operatorname{Im} \tilde{h}_l(\rho)$ und leite die Asymptotik

$$\tilde{\jmath}_l(\rho) \cong c_l \rho^{l+1}\ , \qquad \tilde{n}_l(\rho) \cong \frac{1}{(2l+1)c_l}\rho^{-l}\ , \qquad (\rho \to 0) \tag{4}$$

her, wobei $\tilde{n}_l(\rho) := \operatorname{Re} \tilde{h}_l(\rho)$. Die Koeffizienten c_l brauchen nicht bestimmt zu werden.

Hinweis: Wie verhält sich die Lösung der freien radialen Schrödinger-Gleichung für $\rho \to 0$? Verwende dann, dass die Wronski-Determinante $W(\rho) = u_1(\rho)u_2'(\rho) - u_1'(\rho)u_2(\rho)$ zweier Lösungen der selben Energie konstant ist.

Es sei nun daran erinnert, dass die Streuphase $\delta_l(k)$ durch das Verhalten

$$u_l(k,r) = C_l(k)\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_l(k)}\tilde{h}_l(kr) - \overline{\tilde{h}_l(kr)}\big) \,, \qquad (r > R_0, k > 0) \,, \tag{5}$$

der regulären Lösung $u_l(k,r) \cong r^{l+1}, (r \to 0)$ von (4.9) bestimmt ist. Man überlege sich, dass

$$u_l(k=0,r) = a_l r^{-l} + b_l r^{l+1} \,, \qquad (r > R_0) \,, \tag{6}$$

mit $b_l \neq 0$. Zeige nun (1) durch Betrachtung des Limes $k \to 0$.

Hinweis: Schreibe (5) als

$$u_l(k,r) = A_l(k)\tilde{n}_l(kr) + B_l(k)\tilde{\jmath}_l(kr) \,, \qquad (r > R_0) \,. \tag{7}$$

Was folgt für $A_l,\ B_l$ aus (5) bzw. (6)?

(ii) Zeige: Die Streulänge ist auch bestimmt durch die reguläre Lösung für $l = 0$ und $k = 0$ der Form $u(r) = r - a,\ (r > R_0)$, bzw. durch

$$a = r - \frac{u(r)}{u'(r)}, \qquad (r > R_0) \,,$$

bei beliebiger Normierung von u. Insbesondere beträgt sie a für eine harte Kugel vom Radius a.

Hinweis: Berechne c_0.

(iii) Sei $\psi(\vec{x}) = u(r)/r,\ (r = |\vec{x}|)$, die radiale Lösung der Energie Null: $-\Delta\psi + \mathscr{V}\psi = 0$. Zeige

$$\int \big(|\vec{\nabla}\psi(\vec{x})|^2 + \mathscr{V}(|\vec{x}|)|\psi(\vec{x})|^2\big) d^3\vec{x} = 4\pi a \,.$$

Hinweis: Verwende partielle Integration.