Quantenmechanik II. Musterlösung 5.

FS 11

1. Goldene Regel und Bornsche Näherung

i) In (5.13) ist $\mathcal{V} = 2m\hbar^{-2}V$, vgl. (4.9), also

$$f_B(k,\vec{e}) = -\frac{1}{4\pi}\frac{2m}{\hbar^2}\int d^3y\, e^{-ik(\vec{e}-\vec{e}_0)\cdot\vec{y}}V(\vec{y}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\hat{V}(\vec{q})\ ;$$

so folgt (1) aus $d\sigma/d\Omega = |f_B(k,\vec{e})|^2$.

ii) Aus $\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle = C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}$ folgt

$$\langle\vec{k}'|\vec{k}\rangle = \int d^3x\,\langle\vec{k}'|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle = |C|^2\int d^3x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{x}} = (2\pi)^3|C|^2\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

und, zusammen mit der Forderung, $C = (2\pi)^{-3/2}$ (bis auf eine Phase). Es ist $\vec{p}|\vec{k}\rangle = \hbar\vec{k}|\vec{k}\rangle$ und $H_0 = \vec{p}^2/2m$, also $E(k) = \hbar^2k^2/2m$. Die Zustandsdichte (3) ist mit $d^3k = k^2dkde$

$$\rho(E) = \int_{\vec{e}\in\Delta\Omega} de\int_0^\infty dk\,k^2\delta(E(k)-E) = \Delta\Omega\frac{k^2}{E'(k)} = \Delta\Omega\frac{m}{\hbar^2}k$$

mit zuletzt k so, dass $E(k) = E$. Ferner ist

$$M = \langle\vec{k}|H_1|\vec{k}_0\rangle = (2\pi)^{-3}\int d^3x\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{x}}V(\vec{x}) = (2\pi)^{-3}\hat{V}(\vec{k}-\vec{k}_0)\ .$$

In der Goldenen Regel ist $\vec{k}$ bei derselben Energie auszuwerten wie die von $\vec{k}_0$, also $k = k_0$. Somit ist

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\cdot(2\pi)^{-6}|\hat{V}(\vec{q})|^2\cdot\Delta\Omega\frac{m}{\hbar^2}k_0\ .$$

Die Stromdichte (2.15) ist im einfallenden Zustand $|\vec{k}_0\rangle$

$$j = (2\pi)^{-3}\frac{\hbar k_0}{m}\ .$$

Man schliesst

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Gamma}{\Delta\Omega\cdot j} = (2\pi)^{-2}\hbar^{-4}m^2|\hat{V}(\vec{q})|^2\ ,$$

wie in (1).

iii) Die Normierung erfordert hier $C^2 = |\Lambda|^{-1}$. Die Quantisierung ergibt einen Quantenzustand pro Zelle vom Volumen $(2\pi)^3|\Lambda|^{-1}$ im $\vec{k}$-Raum. Somit ist

$$\rho(E)\Delta E \cong \frac{|\Lambda|}{(2\pi)^3}\cdot\Delta k\cdot k^2\cdot\Delta\Omega\ ,$$

also

$$\rho(E) = \frac{|\Lambda|}{(2\pi)^3}\cdot\frac{m}{\hbar^2}k\Delta\Omega\ ,$$

wobei k wieder so ist, dass $E(k) = E$. Ferner ist

$$M = \frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda d^3x\, e^{-i(\vec{k}-\vec{k}_0)\cdot\vec{x}} V(\vec{x}) \cong \frac{1}{|\Lambda|} \hat{V}(\vec{k}-\vec{k}_0)$$

mit $k = k_0$ und

$$j = \frac{1}{|\Lambda|} \frac{\hbar k_0}{m} .$$

Sei $a = (2\pi)^3|\Lambda|^{-1}$. Dann ändern sich die Grössen von (ii) nach (iii) gemäss $\rho \rightsquigarrow a^{-1}\rho$, $M \rightsquigarrow aM$, $\Gamma \rightsquigarrow a^{-1}a^2\Gamma = a\Gamma$, $j \rightsquigarrow aj$. Der differentielle Wirkungsquerschnitt bleibt so der selbe.

2. Das Jaynes-Cummings-Modell, Teil 1

i) Aus Gl. (5) folgt unter Beibehaltung der ausgezeichneten Mode α

$$\langle a \otimes \varphi | H_1 | g \otimes \psi \rangle = -\frac{1}{c}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\alpha}} \langle \varphi | a_\alpha + a_\alpha^* | \psi \rangle \vec{A}_\alpha(0) \cdot i\omega_0 \langle a | \vec{D} | g \rangle ;$$

nach (6) hingegen

$$\langle a \otimes \varphi | H_1 | g \otimes \psi \rangle = \hbar g \langle \varphi | a + a^* | \psi \rangle .$$

Der Vergleich liefert ($\omega = \omega_\alpha$, $a = a_\alpha$)

$$g = -i \frac{\omega_0}{c\sqrt{2\hbar\omega_\alpha}} \vec{A}_\alpha(0) \cdot \langle a | \vec{D} | g \rangle .$$

Matrixelemente $\langle a \otimes \varphi | H_1 | a \otimes \psi \rangle$ verschwinden in beiden Fällen. Unter der Ersetzung $|g\rangle \rightsquigarrow e^{i\varphi}|g\rangle$, $|a\rangle \rightsquigarrow |a\rangle$ ist $g \rightsquigarrow g e^{i\varphi}$, wodurch $g \geq 0$ erzielt werden kann.

ii) Im Wechselwirkungsbild ist ein Operator B dargestellt durch $\tilde{B}(t) = e^{iH_0t/\hbar} B e^{-iH_0t/\hbar}$. Insbesondere ist

$$\tilde{a}(t) = e^{iH_{\mathrm{str}}t/\hbar} a e^{-iH_{\mathrm{str}}t/\hbar} = e^{-i\omega t} a , \qquad \tilde{a}^*(t) = e^{i\omega t} a^* ,$$
$$\tilde{\sigma}_+(t) = e^{iH_{\mathrm{at}}t/\hbar} \sigma_+ e^{-iH_{\mathrm{at}}t/\hbar} = e^{i\omega_0 t} \sigma_+ , \qquad \tilde{\sigma}_-(t) = e^{-i\omega_0 t} \sigma_- ,$$

und damit

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I(t) &= \hbar g (e^{-i\omega t} a + e^{i\omega t} a^*)(e^{i\omega_0 t}\sigma_+ + e^{-i\omega_0 t}\sigma_-) \\ &= \hbar g (e^{-i(\omega-\omega_0)t} a\sigma_+ + e^{-i(\omega+\omega_0)t} a\sigma_- + e^{i(\omega+\omega_0)t} a^*\sigma_+ + e^{i(\omega-\omega_0)t} a^*\sigma_-) . \end{aligned}$$

Die Vorfaktoren von $a\sigma_-$ und $a^*\sigma_+$ oszillieren rascher als die anderen, vgl. den Hinweis; folglich tragen diese Terme weniger zum Propagator $\tilde{U}(t) = 1 - i\hbar^{-1}\int_0^t dt_1\, \tilde{H}_1(t_1) + \ldots$ bei, und dürfen vernachlässigt werden. Die Näherung entspricht der Approximation der rotierenden Welle aus Aufgabe 3.1 für den Fall, dass das Feld quantenmechanisch statt klassisch ist.

iii) Bei Anwendung von H geht eine Änderung des Eigenwerts von σ_3 von -1 nach $+1$ einher mit einer von a^*a um -1; bzw. umgekehrt. Damit ist $N := \sigma_3/2 + a^*a$ erhalten. Oder präziser:

$$\begin{aligned} [H, N] &= \hbar g [a\sigma_+ + a^*\sigma_-, N] , \\ [a\sigma_+, N] &= \frac{a}{2}[\sigma_+, \sigma_3] + [a, a^*a]\sigma_+ = a\sigma_+ - a\sigma_+ = 0 , \\ [a^*\sigma_-, N] &= 0 . \end{aligned}$$

Wir diagonalisieren zuerst N: Eigenwerte sind $n+\frac{1}{2}$, $(n=-1,0,...)$ mit Eigenvektoren

$$\begin{aligned} &|g,0\rangle\ , \qquad (n=-1)\\ &|a,n\rangle\ , |g,n+1\rangle\ , \qquad (n=0,1,...)\ , \end{aligned}$$

wobei $a^*a|n\rangle = n|n\rangle$. Auf diesen Eigenräumen reduziert sich H auf $-\hbar\omega_0/2$, $(n=-1)$, bzw.

$$\hbar \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_0+\omega n & g\sqrt{n+1} \\ g\sqrt{n+1} & -\frac{1}{2}\omega_0+\omega(n+1) \end{pmatrix} = \hbar\omega\big(n+\frac{1}{2}\big)\mathbb{1} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0-\omega & 2g\sqrt{n+1} \\ 2g\sqrt{n+1} & -(\omega_0-\omega) \end{pmatrix} \qquad (8)$$

$(n=0,1,...)$. Da die letzte Matrix spurlos ist, sind ihre Eigenwerte $\pm\lambda$ und ihre Determinante somit gleich $-\lambda^2$. Insgesamt ist

$$E_n^{\pm} = \hbar\omega\big(n+\frac{1}{2}\big) \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{(\omega_0-\omega)^2+4(n+1)g^2}\ .$$