Quantenmechanik II. Musterlösung 3.

FS 11

1. Ammoniak-Maser

i) Nach der Einleitung der Aufgabe ist die ungestörte Energie H_0 (bis auf eine unwesentliche additive Konstante) gleich

$$H_0|a\rangle = \frac{\varepsilon}{2}|a\rangle \ , \qquad H_0|g\rangle = -\frac{\varepsilon}{2}|g\rangle \ ,$$

also $H_0 = (\varepsilon/2)\sigma_3$. Die Energie eines Dipols $\vec{d}$ im elektrischen Feld ist $-\vec{d}\cdot\vec{E}$, also $H_1|\pm\rangle = \mp\delta E|\pm\rangle$. Somit ist

$$H_1|a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(H_1|+\rangle + H_1|-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\delta E|+\rangle + \delta E|-\rangle) = -\delta E|g\rangle$$

und analog $H_1|g\rangle = -\delta E|a\rangle$, d.h. $H_1 = -\delta E\sigma_1$, wie in (1). Dort ist die Bedeutung von E dieselbe wie hier, die von $\vec{E}$ aber eine andere.

ii) Nach Gleichung (1) ist der Hamiltonoperator

$$H(t) = -\delta\,\tilde{\vec{E}}(t)\cdot\vec{\sigma} \ ,$$

wobei

$$\tilde{\vec{E}}(t) = -\frac{\varepsilon}{2\delta}\vec{e}_3 + \frac{E}{2}(\vec{e}_1\cos(\omega t) + \vec{e}_2\sin(\omega t)) \ .$$

Er ist somit formal identisch mit dem aus Aufgabe 2.3 (iv) unter der Identifikation

$$B_0 = -\frac{\varepsilon}{2\delta} \ , \qquad B_1 = \frac{E}{2} \ , \qquad \frac{\gamma\hbar}{2} = \delta \ , \qquad \omega = \omega$$

und folglich

$$\omega_0 = -\gamma B_0 = \frac{\varepsilon}{\hbar} \ , \qquad \omega_1 = -\gamma B_1 = -\frac{\delta E}{\hbar} \ .$$

Auch der Anfangszustand hier, $|a\rangle$, entspricht dem dort, $|\vec{e}_3\rangle$, da beide durch $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2$ gegeben sind.

Die Übergangswahrscheinlichkeit $P_\downarrow$ nach $|g\rangle$ erreicht den Wert 1 nur bei Resonanz $\omega = \omega_0$, und auch dies nur für $|\omega_0|t/2 = (n+\frac{1}{2})\pi$, $(n = 1, 2, \ldots)$, d.h. für

$$t_0 = \frac{\hbar}{\delta E}(2n+1)\pi \ .$$

2. Der quantenmechanische Kreisel

i) Wegen $L_1 = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$, $L_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(L_+ - L_-)$ gilt

$$L_1^2 = \frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2 + L_+L_- + L_-L_+) \ , \qquad L_2^2 = -\frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2 - L_+L_- - L_-L_+)$$

und somit

$$L_1^2 + L_2^2 = \frac{1}{2}(L_+L_- + L_-L_+)$$

für die Summe. Diese ist aber auch gleich $\vec{L}^2 - L_3^2$, so dass

$$L_1^2 = \frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2) + \frac{1}{2}(\vec{L}^2 - L_3^2)\,, \qquad L_2^2 = -\frac{1}{4}(L_+^2 + L_-^2) + \frac{1}{2}(\vec{L}^2 - L_3^2)\,.$$

So wird aus (2)

$$H = (a_1 + a_2)\frac{\vec{L}^2 - L_3^2}{2} + (a_1 - a_2)\frac{L_+^2 + L_-^2}{4} + a_3 L_3^2\,, \tag{4}$$

wobei $\vec{L}^2|l,m\rangle = l(l+1)|l,m\rangle$ in Einheiten von $\hbar^2$. Aus (7.26) folgt, dass alle $L_i^2|l,m\rangle$ in dem von

$$|l,m-2\rangle,\ |l,m\rangle,\ |l,m+2\rangle$$

aufgespannten Teilraum liegen. Dasselbe gilt dann für $H|l,m\rangle$, sodass

$$\langle l,m'|H|l,m\rangle \neq 0 \quad \Rightarrow \quad m - m' = 0, \pm 2\,. \tag{5}$$

Speziell für $l = 2$, wo übrigens $l(l+1) = 6$, sind dann die Teilräume $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$, die durch $|-2\rangle$, $|0\rangle$, $|2\rangle$, bzw. $|-1\rangle$, $|1\rangle$ aufgespannt werden, invariant unter H.

ii) Man überprüft $L_+U = UL_-$ und $L_3U = -UL_3$ auf den Basisvektoren $|m\rangle$ anhand von (7.26). Dann gilt auch $L_-U = UL_+$ (denn $U^2 = 1$) und man erkennt, dass der Kommutator $[L_\pm^2, U]$ verschwindet; ebenso $[L_3^2, U] = 0$. Mit (4) folgt schliesslich, dass auch $[H,U] = 0$.

Ihre Definition in Teilaufgabe i) zeigt direkt, dass die Teilräume $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ invariant sind unter U. Wir können jeden der Teilräume daher in Eigenräume von U zerlegen. Teilraum $\mathcal{H}'$:

$$\left.\begin{aligned} |0,+\rangle &= |0\rangle \\ |2,+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |-2\rangle) \end{aligned}\right\} \mathcal{H}'_+$$

$$\left.|2,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle - |-2\rangle)\right\} \mathcal{H}'_-$$

sind Eigenvektoren von U und spannen je die Eigenräume $\mathcal{H}'_+$, $\mathcal{H}'_-$ zu den Eigenwerten ± 1 auf. Analog für Teilraum $\mathcal{H}''$:

$$\left.|1,+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |-1\rangle)\right\} \mathcal{H}''_+\,,$$

$$\left.|1,-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)\right\} \mathcal{H}''_-\,.$$

Alle diese Teilräume sind auch unter H invariant: Aus $[H,U] = 0$ folgt nämlich für jeden U-Eigenvektor $|u\rangle \in \mathcal{H}'_\pm$, dass

$$UH|u\rangle = HU|u\rangle = \pm H|u\rangle\,,$$

d.h. $H|u\rangle \in \mathcal{H}'_\pm$, und analog für $\mathcal{H}''_\pm$.

iii) Ergebnis ii) zeigt, dass H bezüglich der Zerlegung $\mathcal{D}_2 = \mathcal{H}'_+ \oplus \mathcal{H}'_- \oplus \mathcal{H}''_+ \oplus \mathcal{H}''_-$ block-diagonal ist. Die letzten drei Teilräume sind eindimensional, so dass wir sofort die drei Eigenwerte

$$\langle 2,-|H|2,-\rangle\ , \qquad \langle 1,+|H|1,+\rangle\ , \qquad \langle 1,-|H|1,-\rangle$$

erhalten. Wir berechnen den ersten Eigenwert explizit unter Benutzung von (5, 4), $[H,U] = 0$, und geben die anderen lediglich an:

$$\begin{aligned}
\langle 2,-|H|2,-\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle 2|H|2\rangle - \underbrace{\langle 2|H|-2\rangle}_{=0} - \underbrace{\langle -2|H|2\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle -2|H|-2\rangle}_{=\langle 2|UHU|2\rangle = \langle 2|H|2\rangle}\Big) \\
&= \langle 2|H|2\rangle = a_1 + a_2 + 4a_3\ , \\
\langle 1,+|H|1,+\rangle &= 4a_1 + a_2 + a_3\ , \\
\langle 1,-|H|1,-\rangle &= a_1 + 4a_2 + a_3\ .
\end{aligned}$$

Es verbleibt, die zwei Eigenwerte der Einschränkung von H auf $\mathcal{H}'_+$ zu berechnen, z.B. als Eigenwerte der Abbildungsmatrix

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \langle 0,+|H|0,+\rangle & \langle 0,+|H|2,+\rangle \\ \langle 2,+|H|0,+\rangle & \langle 2,+|H|2,+\rangle \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \langle 0|H|0\rangle & \frac{a_1-a_2}{4}\frac{2}{\sqrt{2}}\langle 0|L_-^2|2\rangle \\ \frac{a_1-a_2}{4}\frac{2}{\sqrt{2}}\langle 0|L_-^2|2\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3(a_1+a_2) & \sqrt{3}(a_1-a_2) \\ \sqrt{3}(a_1-a_2) & a_1+a_2+4a_3 \end{pmatrix}\ .
\end{aligned}$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= (\lambda - 3(a_1+a_2))\,(\lambda - (a_1+a_2+4a_3)) - 3(a_1-a_2)^2 \\
&= \lambda^2 - 4(a_1+a_2+a_3)\lambda + 12(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)
\end{aligned}$$

führt auf das in der Aufgabenstellung angegebene Ergebnis (3).

iv) Für $a_1 = a_2 = a$ und $a_3 = b$ lauten die Eigenwerte aus $\mathcal{H}'_+$

$$2(2a+b) \pm 2\sqrt{a^2+b^2-2ab} = \begin{cases} 2a+4b\ , \\ 6a \end{cases}$$

und die anderen

$$2a+4b\ , \qquad 5a+b\ , \qquad 5a+b\ .$$

Andererseits ist der Hamiltonoperator in diesem Spezialfall einfach

$$H = a(L_1^2 + L_2^2) + bL_3^2 = a(\vec{L}^2 - L_3^2) + bL_3^2 = a\vec{L}^2 + (b-a)L_3^2\ .$$

Er ist schon diagonal in der Basis $|m\rangle$ $(m = -2, \dots, 2)$,

$$H|m\rangle = \big(6a + (b-a)m^2\big)\,|m\rangle\ ,$$

wir erhalten also genau die Eigenwerte oben mit den selben Vielfachheiten.