Quantenmechanik II. Musterlösung 7.

FS 11

1. Permutationssymmetrie von Bahn und Spin

i) Für alle N folgt aus Gleichung (7) der Übung 6

$$P_\sigma \mathcal{S} = \mathcal{S}, \quad P_\sigma \mathcal{A} = (\operatorname{sgn}\sigma)\mathcal{A}$$

und daraus

$$\begin{aligned} P_\sigma(\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}) &= (P_\sigma\mathcal{F})\otimes(P_\sigma\mathcal{S}) = (P_\sigma\mathcal{F})\otimes\mathcal{S}\ , \\ P_\sigma(\mathcal{F}\otimes\mathcal{A}) &= (P_\sigma\mathcal{F})\otimes(P_\sigma\mathcal{A}) = (\operatorname{sgn}\sigma)(P_\sigma\mathcal{F})\otimes\mathcal{A}\ . \end{aligned}$$

Bosonen: Weiter folgt durch Mittelung über alle σ, dass

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}) = \mathcal{S}\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}\ , \qquad \mathcal{S}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{A}\mathcal{F}\otimes\mathcal{A}\ ,$$

wobei die Ausdrücke genau für $\mathcal{F}=\mathcal{S}$ bzw. $\mathcal{F}=\mathcal{A}$ nicht verschwinden. Ebenso bei vertauschten Faktoren in den Tensorprodukten. Daraus folgt (1) für $N=2,3$.

Fermionen: Ebenso

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}) = \mathcal{A}\mathcal{F}\otimes\mathcal{S}\ , \qquad \mathcal{A}(\mathcal{F}\otimes\mathcal{A}) = \mathcal{S}\mathcal{F}\otimes\mathcal{A}\ ,$$

wobei diesmal die Ausdrücke nur für $\mathcal{F}=\mathcal{A}=\mathcal{S}^T$, bzw. $\mathcal{F}=\mathcal{S}=\mathcal{A}^T$ nicht verschwinden. Analog folgt nun (2) für $N=2,3$.

ii) $N=2$*:* Für den Grundzustand gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(|g\uparrow\rangle\otimes|g\downarrow\rangle) &= \frac{1}{2}(|g\uparrow\rangle\otimes|g\downarrow\rangle - |g\downarrow\rangle\otimes|g\uparrow\rangle) \\ &= |gg\rangle\otimes\frac{1}{2}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \in \mathcal{S}(\otimes^2\mathcal{H}_B)\otimes\mathcal{A}(\otimes^2\mathcal{H}_S)\ , \end{aligned}$$

konsistent mit (2).

$N=3$*:* Zunächst ist $\mathcal{G}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ äquivalent zu $(\mathcal{S}+\mathcal{A})|\psi\rangle = 0$, und nach Gleichung (8) der Übung 6 das wiederum zu

$$(1 + P_{(123)} + P_{(132)})|\psi\rangle = 0\ .$$

Man sieht sofort, dass die Zustände $|\psi_i\rangle$ in (3) diese Bedingung erfüllen. Ferner ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(|g\uparrow\rangle\otimes|g\downarrow\rangle\otimes|a\uparrow\rangle) &= \mathcal{A}(|gga\rangle\otimes|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle) \\ &= \frac{1}{6}\big(|gga\rangle\otimes|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |gga\rangle\otimes|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |agg\rangle\otimes|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \\ &\qquad - |gag\rangle\otimes|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |agg\rangle\otimes|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |gag\rangle\otimes|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\big)\ , \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle_B \otimes |\psi_2\rangle_S - |\psi_2\rangle_B \otimes |\psi_1\rangle_S = \frac{1}{12}\big(&2|agg\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |agg\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |agg\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \\
&- 2|gag\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |gag\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |gag\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \\
&- 2|gga\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + 2|gga\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \\
&+ |agg\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |agg\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \\
&+ |gag\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |gag\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle\big) \\
= \frac{1}{6}\big(&|gga\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |gga\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |agg\rangle \otimes |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle \\
&- |gag\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |agg\rangle \otimes |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + |gag\rangle \otimes |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle\big) \ ,
\end{aligned}$$

was dasselbe ist. Also: Für den Grundzustand gilt

$$\mathcal{A}(|g\uparrow\rangle \otimes |g\downarrow\rangle \otimes |a\uparrow\rangle) \in \mathcal{G}(\otimes^3 \mathcal{H}_B) \otimes \mathcal{G}(\otimes^3 \mathcal{H}_S) \ ,$$

was wiederum in Konsistenz ist mit (2).

Übrigens trägt in diesem Fall ($\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_S = \mathbb{C}^2$, $N = 3$) immer nur $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ zu (2) bei, da $\mathcal{A} = 0$ auf $\otimes^3\mathbb{C}^2$: Es ist nicht möglich, 3 Teilchen auf verschiedene Zustände zu verteilen, wenn nur 2 zur Verfügung stehen, wie bereits in Aufgabe 6.3 (iii) bemerkt.

2. Ist die (Anti-)Symmetrisierung des Zustands stets erforderlich?

i) *Bosonen:* Zunächst gilt

$$\langle \lambda\mathcal{S}\psi | \lambda\mathcal{S}\psi\rangle = |\lambda|^2 \langle \psi|\mathcal{S}|\psi\rangle \ .$$

Für beliebige Zustände $|\psi_i\rangle, |\varphi_i\rangle \in \mathcal{S}(\otimes^{N_i}\mathcal{H}_i)$ gilt

$$\begin{aligned}
\langle \psi_1 \otimes \psi_2 | \mathcal{S} | \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle &= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N} \langle \psi_1 \otimes \psi_2 | P_\sigma | \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle \\
&= \frac{1}{N!}\sum_{\sigma_1\in S_{N_1}} \langle \psi_1 | P_{\sigma_1} | \varphi_1\rangle \sum_{\sigma_2\in S_{N_2}} \langle \psi_2 | P_{\sigma_2} | \varphi_2\rangle \\
&= \frac{N_1!N_2!}{N!}\langle \psi_1 \otimes \psi_2 | \varphi_1 \otimes \varphi_2\rangle \ :
\end{aligned} \tag{4}$$

Für die zweite Gleichheit haben wir benutzt, dass Permutationen σ, welche $\{1,\ldots,N_1\}$ und $\{N_1+1,\ldots,N\}$ vermischen, nicht zur Summe beitragen. Der zugehörige Term verschwindet nämlich wegen $\mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2$ (das sieht man, wenn man zunächst Vektoren von der Form $|\phi_{i,1} \otimes \ldots \otimes \phi_{i,N_i}\rangle$ anstelle von $|\psi_i\rangle, |\varphi_i\rangle$ betrachtet). Es verbleiben die Permutationen $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2) \in S_{N_1} \times S_{N_2} \subset S_N$; dabei ist $P_{\sigma_i}|\psi_i\rangle = |\psi_i\rangle$.

Gleichung (4) setzt sich nun auf beliebige Zustände in $S(\otimes^{N_1}\mathcal{H}_1) \otimes S(\otimes^{N_2}\mathcal{H}_2)$ fort und zeigt die Behauptung für $|\lambda|^2 = N!/N_1!N_2!$.

ii) *Fermionen:* Der selbe Schluss folgt für $\lambda\mathcal{A}$ mittels $\operatorname{sgn}\sigma = (\operatorname{sgn}\sigma_1)(\operatorname{sgn}\sigma_2)$ und $P_{\sigma_i}|\psi_i\rangle = (\operatorname{sgn}\sigma_i)|\psi_i\rangle$.