Quantenmechanik II. Musterlösung 6.

FS 11

1. Das Jaynes-Cummings Modell, Teil 2

i) Der durch $|a,n\rangle$, $|g,n+1\rangle$ aufgespannte Unterraum ist invariant unter H, und folglich unter dem Propagator $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$. Damit ist

$$P_g(t) = |\langle g, n+1|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}|a,n\rangle|^2 \ .$$

Zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit kann in Gl. (8) aus Aufgabe 5.2 der Anteil von H, der $\propto \mathbb{1}$ ist, weggelassen werden, also

$$H = \frac{\hbar}{2}\big((\omega_0 - \omega)\sigma_3 + 2g\sqrt{n+1}\sigma_1\big)$$

auf $\mathbb{C}^2$. Dies entspricht (1) mit $\omega_1 = 2g\sqrt{n+1}$. Den Zuständen $|\vec{e}_3\rangle$, $|-\vec{e}_3\rangle$ aus Aufgabe 2.3(iv) entsprechen hier $|a\rangle$ und $|g\rangle$. Es folgt

$$P_g(t) = \frac{4(n+1)g^2}{\Omega^2}\sin^2\frac{\Omega t}{2}$$

mit $\Omega^2 = (\omega-\omega_0)^2 + 4(n+1)g^2$. Bei Resonanz ($\omega = \omega_0$) ist der Vorfaktor des Sinus gleich 1 und die komplementäre Wahrscheinlichkeit ist

$$P_a(t) = \cos^2(\sqrt{n+1}gt) \ .$$

ii) Für jeden Term in

$$|a,\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|a,n\rangle$$

ist die Zeitentwicklung wie in (i). Somit ist

$$P_a(t) = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\cos^2(\sqrt{n+1}gt) \ . \tag{4}$$

Zur graphischen Darstellung nutzt man z.B. Mathematica mit folgenden Notebookbefehlen:

```
f[a_, s_] := Exp[-a]*Sum[(a^n/n!)*Cos[Sqrt[n + 1]*s]^2, {n, 0, 1000}]
a := 10
Plot[N[f[a, s]], {s, 0, 30}, PlotRange -> {0, 1}]
```

Hier steht a für $|\alpha|^2$, s für gt und die unendliche Summe wird bei ausreichend hohem n abgebrochen. Man erhält dann den Graphen in Abbildung 1.

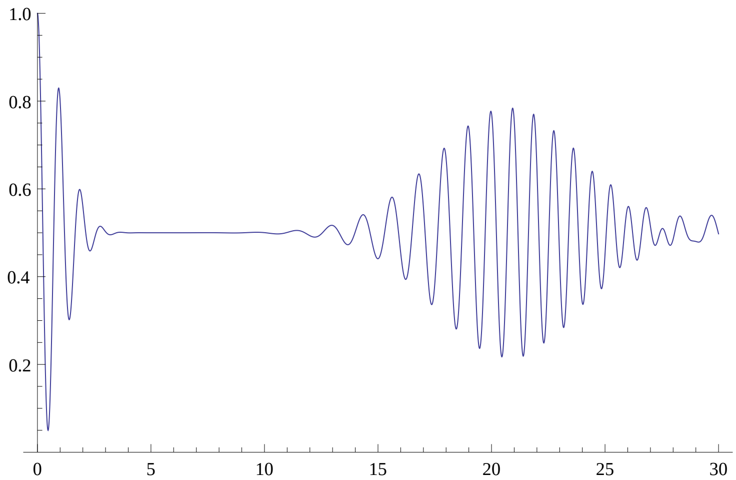

Abbildung 1: Die Wahrscheinlichkeit $P_a(t)$ als Funktion von gt mit $|\alpha|^2 = 10$.

Hier ist die analytische Begründung des Verhaltens. Für $s = gt = 0$ liefert Gl. (4) $P_a(0) = 1$, wie erforderlich. Sei

$$f(n) = \log \frac{a^n}{n!} \approx n \log a - n \log n + n$$

unter Verwendung der Stirling-Formel. Aufgefasst als Funktion von $n \in [0, \infty)$ ist

$$f'(n) = \log a - \log n \ , \qquad f''(n) = -\frac{1}{n}$$

und $f'(a) = 0$, $f''(a) = -1/a$. Also ist $a^n/n! \approx C\mathrm{e}^{-(n-a)^2/2a}$ für $n \approx a$ und potentiell zur Summe (4) beitragend sind Terme mit $n - a \approx \sqrt{a}$. Für diese ist nach Taylor

$$\sqrt{n+1}s = \sqrt{a+1}s + \frac{1}{2}\frac{n-a}{\sqrt{a+1}}s + O(\frac{s}{\sqrt{a}}) \ ,$$

wobei der letzte explizite Term von der Ordnung $O(a^0 s) = O(s)$ ist. Die relevanten Terme in Gl. (4) haben merklich verschiedene Phasen, sobald $s \gtrsim \pi$. Dann mitteln sie sich zu $1/2$, dem Mittelwert von $\cos^2$. Keine Mittelung ergibt sich erneut, falls sich die Phasen für $\Delta n = 1$ annähernd um ein Vielfaches von π unterscheiden, d.h. erstmals für

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{a+1}}s = \pi \ ,$$

bzw. $s = 2\pi\sqrt{a+1} \approx 20.8$. Da der Term $O(s/\sqrt{a})$ dann $O(1)$ ist, ist die konstruktive Interferenz nicht perfekt und folglich $P_a(t)$ merklich < 1.

2. Endlich-dimensionale bosonische und fermionische Hilbert-Räume

Bei gegebener Basis $|\varphi_1\rangle, \ldots, |\varphi_d\rangle$ für $\mathcal{H}$ bezeichnen $|n_1, \ldots, n_d\rangle$ die Vektoren der Besetzungszahlbasis für $\mathcal{H}^{(N)}_{\mathrm{s/a}}$. Dabei ist n_i die Besetzungszahl des 1-Teilchenzustandes $|\varphi_i\rangle$ und $\sum_{i=1}^d n_i = N$ mit

$$\mathrm{s}: \ n_i \in \mathbb{N} \ , \qquad \mathrm{a}: \ n_i \in \{0, 1\} \ .$$

Bosonen: Die Dimension von $\mathcal{H}_\mathrm{s}^{(N)}$ ist die Anzahl Möglichkeiten, N Teilchen auf d Zustände zu verteilen. Dies ist die selbe Frage (vgl. Aufgabe 2.1(i) der QM I), wie p Quanten auf N Resonatoren zu verteilen, und zwar unter der Ersetzung $N \to d, p \to N$. Also:

$$\dim \mathcal{H}_s^{(N)} = \frac{(d-1+N)!}{(d-1)!N!} \ . \tag{5}$$

Im Nachhinein wird klar: Duch seine Zählung, die von der Gibbschen Vorschrift abwich, wählte Planck die Quanten implizit als bosonisch.

Fermionen: Die Dimension von $\mathcal{H}_\mathrm{a}^{(N)}$ ist die Anzahl Möglichkeiten, N aus d Zuständen zu wählen

$$\dim \mathcal{H}_\mathrm{a}^{(N)} = \binom{d}{N} = \frac{d!}{(d-N)!N!} \ . \tag{6}$$

Insbesondere verschwindet sie für $N > d$.

3. Spin und Permutationssymmetrie

i) Für S_N mit N beliebig sind

$$\mathcal{S} = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N} P_\sigma \ , \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{N!}\sum_{\sigma\in S_N} (\operatorname{sgn}\sigma) P_\sigma \tag{7}$$

die Projektoren auf die im Aufgabenblatt bezeichneten Unterräume. Für $N = 2$ sind

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(1 + P_{(12)}) \ , \qquad \mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 - P_{(12)})$$

mit $\mathcal{S} + \mathcal{A} = 1$. Für $N = 3$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S} =& \frac{1}{6}(1 + P_{(12)} + P_{(23)} + P_{(13)} + P_{(123)} + P_{(132)}) \ , \\
\mathcal{A} =& \frac{1}{6}(1 - P_{(12)} - P_{(23)} - P_{(13)} + P_{(123)} + P_{(132)})
\end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{S} + \mathcal{A} = \frac{1}{3}(1 + P_{(123)} + P_{(132)}) \ . \tag{8}$$

Folglich ist

$$\mathcal{G} = 1 - (\mathcal{S} + \mathcal{A}) = \frac{1}{3}(2 - P_{(123)} - P_{(132)}) \ .$$

ii) Die Unterräume von $\otimes^2\mathcal{H}$ zu $s = 0$ (Singulett-) und $s = 1$ (Triplettzustände) werden aufgespannt (vgl. Vorlesung) durch

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \ , \qquad \text{bzw.} \quad |\uparrow\uparrow\rangle \ , \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \ , \ |\downarrow\downarrow\rangle \ .$$

Erstere sind antisymmetrisch bezüglich Vertauschung der Spins, letztere symmetrisch, und (2) folgt. Gl. (3) folgt ebenfalls durch Inspektion: beide Seiten liefern die Eigenwerte 0, 2 auf dem Singlett bzw. dem Triplett. Alternativ:

$$(\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 = \sum_{s=0,1} s(s+1)P(s) = 2P(1) = 1 + P_{(12)} \ .$$

iii) Die Werte $s = 1/2, 3/2$ des Gesamtspins ergeben sich aus der Clebsch-Gordan-Reihe (7.30)

$$\mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} = (\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1) \otimes \mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_{1/2} \oplus \mathcal{D}_{1/2} \oplus \mathcal{D}_{3/2} \; .$$

Es ist $\dim \otimes^3 \mathbb{C}^2 = 2^3 = 8$; ferner $\mathcal{H}_a^{(3)} = \{0\}$, da $d = 2 < N = 3$ in Gl. (6), und mit Gl. (5) folgt

$$\dim \mathcal{H}_{\mathrm{s}}^{(3)} = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4 \; .$$

So folgt $\mathcal{A} = 0$, $\mathcal{S} \neq 0, 1$ und daraus $\mathcal{G} \neq 0$.

Die Spektralzerlegung von $\vec{S}^2$ ist

$$\begin{aligned} 1 &= P(1/2) + P(3/2) \; , \\ \vec{S}^2 &= \sum_{s=1/2,3/2} s(s+1)P(s) = \frac{3}{4}P(1/2) + \frac{15}{4}P(3/2) \; , \end{aligned}$$

so dass

$$P(3/2) = \frac{1}{3}\big(\vec{S}^2 - \frac{3}{4}\big) \; , \qquad P(1/2) = -\frac{1}{3}\big(\vec{S}^2 - \frac{15}{4}\big) \; .$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \vec{S}^2 &= (\vec{S}_1 + \vec{S}_2)^2 + (\vec{S}_2 + \vec{S}_3)^2 + (\vec{S}_1 + \vec{S}_3)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2 - \vec{S}_3^2 \\ &= \frac{3}{4} + P_{(12)} + P_{(23)} + P_{(13)} \end{aligned}$$

wegen Gl. (3) und $3 - 3 \cdot (3/4) = 3/4$; und daraus

$$P(3/2) = \frac{1}{3}(P_{(12)} + P_{(23)} + P_{(13)}) \; , \qquad P(1/2) = \frac{1}{3}(3 - P_{(12)} - P_{(13)} - P_{(23)}) \; .$$

In Anbetracht dessen, dass $\mathcal{A} = 0$, ist auch

$$P(3/2) = P(3/2) + \mathcal{A} = \mathcal{S} \; , \qquad P(1/2) = P(1/2) - 2\mathcal{A} = \mathcal{G} \; .$$