Quantenmechanik II. Musterlösung 9.

FS 11

1. Weisser Zwerg, Teil 2

i) Ein quantenmechanischer Einteilchen-Zustand erfüllt die Unschärferelation $\Delta x_i \Delta p_i \gtrsim \hbar$, $(i = 1, 2, 3)$, d.h. er beansprucht grob gesprochen eine Zelle vom Volumen $\hbar^3$ im klassischen Phasenraum. Er, und damit die Zelle, kann nach dem Pauli-Prinzip höchstens einmal besetzt werden. Platz im Volumen R^3 mit Impuls $\leq p_F$ haben somit ungefähr $N \doteq R^3 p_F^3/\hbar^3$ Teilchen, d.h.

$$p_F \doteq \frac{\hbar N^{1/3}}{R} \ ;$$

(hier steht $\doteq$ für Gleichheit bis auf dimensionslose Faktoren). Die kinetische Energie ist

$$T \doteq N\big[c\big(\frac{\hbar^2 N^{2/3}}{R^2} + m^2c^2\big)^{1/2} - mc^2\big] \ , \tag{7}$$

die potentielle (mit $M = m_0 N/z$ und $z \doteq 1$)

$$V \doteq -G\frac{(m_0 N)^2}{R} \ .$$

Mit

$$\frac{dT}{dR} = -\frac{\hbar^2 c N^{5/3}}{\big(\hbar^2 N^{2/3} + m^2c^2R^2\big)^{1/2} R^2} \ , \qquad \frac{dV}{dR} = G\frac{m_0^2 N^2}{R^2}$$

ist $T + V$ minimal, also $dT/dR = -dV/dR$, dort, wo

$$\big(\hbar^2 N^{2/3} + m^2c^2R^2\big)^{1/2} \doteq \frac{\hbar^2 c}{G m_0^2 N^{1/3}} \ . \tag{8}$$

a) Für kleine N (und damit M) steht links mcR, also

$$N^{1/3} R \doteq \frac{\hbar^2}{G m_0^2 m} \ , \qquad \text{oder } MR^3 \doteq \frac{\hbar^6}{G^3 m_0^5 m^3} \ .$$

b) Mit wachsendem N nimmt R in (8) ab, und zwar bis nach $R = 0$ (Kollaps) wenn $\hbar N^{1/3}$ gleich der rechten Seite wird. Dies geschieht für

$$M_* \doteq m_0 N \doteq \frac{(\hbar c)^{3/2}}{G^{3/2} m_0^2} \ .$$

Bemerkung: Für kleine M (R gross) ist der erste Term unter der Wurzel (7) klein gegen m^2c^2 ($\rightarrow$ nicht-relativistischer Fall); umgekehrt für $M \rightarrow M_*$ (R klein) ($\rightarrow$ ultrarelativistischer Fall).

ii) Es sei an die Reskalierung

$$r = \lambda \xi = \frac{\xi}{K z_c}$$

erinnert. Der Radius $r = R$ entspricht dem Verschwinden der Teilchendichte, $n(r = R) = 0$, und damit $p_F(R) = 0$, $z_c\varphi(\xi) = 1$, vgl. (2). Also ist $\xi = \xi_1$ und (3) folgt. Die Massendichte $\rho = \rho(r)$ ist

$$\rho = \frac{m_0}{Z} n = \frac{m_0}{Z} \frac{1}{3\pi^2\hbar^3} p_F^3 = \frac{m_0}{Z} \frac{(mcz_c)^3}{3\pi^2\hbar^3} \Big(\varphi^2 - \frac{1}{z_c^2}\Big)^{3/2} .$$

Mit $r^2 dr = \lambda^3 \xi^2 d\xi$ und $\lambda z_c = K^{-1}$ wird

$$M = \frac{4\pi}{K^3} \frac{m_0}{Z} \frac{(mc)^3}{3\pi^2\hbar^3} \cdot I ,$$

wobei

$$I = \int_0^{\xi_1} d\xi\, \xi^2 \Big(\varphi(\xi)^2 - \frac{1}{z_c^2}\Big)^{3/2} = \xi^2 \varphi'(\xi)\Big|_0^{\xi_1} = -\xi_1^2 \varphi'(\xi_1)$$

unter Verwendung der Differentialgleichung (1). Der Vorfaktor von I entspricht den restlichen Faktoren in (4).

iii) Für $z_c \to \infty$ geht (1) über in

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \Big(\xi^2 \frac{d\varphi}{d\xi}\Big) = -\varphi^3 ,$$

und aus $\varphi(\xi_1) = z_c^{-1}$ wird $\varphi(\xi_1) = 0$. Somit wird ξ_1 unabhängig von z_c und aus (3, 4) folgt $R \to 0$, $M \to M_*$.

Quantitativ: Sei A die Anzahl Nukleonen eines Kerns und m_N deren Masse, also $m_0/Z = (A/Z)m_N$. Einsetzen der Naturkonstanten und von (5) liefert

$$M_* = (A/Z)^{-2} \cdot 11.609 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = \frac{5.84}{(A/Z)^2} M_\odot .$$

Für C, O ist $A/Z = 2$, also $M_* = 1.43 M_\odot$. Für relativistische Werte $z_c \gtrsim 1$ ist ξ_1 von der Grössenordnung 1, vgl. (5), und K^{-1} setzt nach (3) die Längenskala des Sterns:

$$K^{-1} = 7.8 \cdot 10^6 \cdot (A/Z)^{-1}\,\mathrm{m} ,$$

was mit dem Erdradius vergleichbar ist (ein Zwerg).

iv) Die linke Seite von (1) wird

$$z_c^2 \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \Big(\xi^2 \frac{df}{d\xi}\Big) ,$$

die rechte

$$z_c^{-3}\big((z_c\varphi)^2 - 1\big)^{3/2} = z_c^{-3}\big((z_c\varphi + 1)(z_c\varphi - 1)\big)^{3/2} \cong z_c^{-3}(2f)^{3/2}$$

und für $z_c \to 1$ entsteht (6). Zudem wird $\varphi'(\xi_1) = f'(\xi_1)$.

Die Differentialgleichung ist mitsamt Randbedingung $f'(0) = 0$ invariant unter $f(\xi) \mapsto a^4 f(a\xi)$: Einsetzen liefert links Faktoren $a^4 \cdot a^2$ und rechts $(a^4)^{3/2} = a^6$. Insbesondere ist

$$f(\xi) = \xi_1^{-4} f_0(\xi/\xi_1) ,$$

wobei f_0 die Lösung mit $f_0(1) = 1$ ist, denn beide Seiten erfüllen nebst der Differentialgleichung auch die selben zwei Randbedingungen $f'(0) = 0$, $f(\xi_1) = 0$. Es folgt

$$f'(\xi_1) = \xi_1^{-5} f_0'(1)$$

und aus (3, 4) für $z_c \to 1$

$$MR^3 = \frac{1}{K^3} \cdot \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/2} \cdot \frac{(\hbar c/G)^{3/2}}{(m_0/Z)^2} |f_0'(1)|$$

unter Verwendung von $\xi_1^3 \cdot \xi_1^2 |\varphi'(\xi_1)| = |f_0'(1)|$. Quantitativ für $A/Z = 2$:

$$MR^3 = 1.34 \cdot 10^{51}\,\mathrm{kg\,m^3} = 2.0 \cdot 10^{-6} M_\odot R_\odot^3 \,, \qquad (M \ll M_*) \,.$$

2. Zu den Hund'schen Regeln

Die Konfiguration entspricht $N = 2$ Elektronen in der Schale $l = 2$, $s = 1/2$. Die Entartung ist (s. Aufgabe 6.2)

$$\binom{2(2l+1)}{N} = \binom{10}{2} = 45 \,.$$

Die Darstellung der $SO(3)$ auf den Bahnzuständen zerfällt gemäss

$$\mathcal{D}_2 \otimes \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4 = \oplus_L \mathcal{D}_L \,,$$

jene der $SU(2)$ auf den Spinzuständen gemäss

$$\mathcal{D}_{1/2} \otimes \mathcal{D}_{1/2} = \mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_1 = \oplus_S \mathcal{D}_S \,.$$

Wie aus der Herleitung der Clebsch-Gordan-Reihe ersichtlich, ist die irreduzible Darstellung mit $L = l + l$, bzw. $S = s + s$ symmetrisch unter Vertauschung der Teilchen. Die (Anti-)Symmetrie der restlichen Darstellungen ist dann alternierend bei absteigenden L, S. Insbesondere ist sie $(-1)^L$.

Antisymmetrische Gesamtzustände (Pauli-Prinzip!) ergeben sich somit aus folgenden $\mathcal{D}_L \otimes \mathcal{D}_S$:

$$(\mathcal{D}_1 \oplus \mathcal{D}_3) \otimes \mathcal{D}_1 \oplus (\mathcal{D}_0 \oplus \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_4) \otimes \mathcal{D}_0 = {}^3P \oplus {}^3F \oplus {}^1S \oplus {}^1D \oplus {}^1G$$

Multiplett des Grundzustands nach Hund'schen Regeln:
1. Regel: ${}^3P$ oder ${}^3F$;
2. Regel: ${}^3F$.

Bei Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung ist nur noch die Summe $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ eine Symmetrie. Zerlegung:

$${}^3F = \mathcal{D}_3 \otimes \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 \oplus \mathcal{D}_3 \oplus \mathcal{D}_4 = {}^3F_2 \oplus {}^3F_3 \oplus {}^3F_4 \,.$$

Die Schale ist weniger als halb gefüllt. Term des Grundzustands:
3. Regel: ${}^3F_2$.