Quantenmechanik II. Musterlösung 13.

FS 11

1. Hohlraumstrahlung

i) Wir betrachten ein Gas von unabhängigen Bosonen mit 1-Teilchenenergien $\varepsilon_{\vec{k},\lambda} = \hbar c|\vec{k}|$. Somit ist die grosskanonische Zustandsumme

$$\Xi(\beta, V) = \prod_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{\vec{k},\lambda}}} ,$$

wo wir $\mu = 0$ gesetzt haben. Dies ist gleich der kanonischen Zustandsumme $Z(\beta, V) = \prod_{\vec{k},\lambda} Z_{\vec{k},\lambda}$ von unabhängigen Oszillatoren der Frequenzen $\varepsilon_{\vec{k},\lambda}/\hbar$, vgl. Abschnitt 1.1 der QM I, $Z_{\vec{k},\lambda} = (1 - \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{\vec{k},\lambda}})^{-1}$. Die freie Energie $F = -\beta^{-1} \log Z$ ist damit

$$-\beta F(\beta, V) = \sum_{\vec{k},\lambda} \log(1 - \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon_{\vec{k},\lambda}}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \sum_{\vec{k},\lambda} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \log(1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar|\vec{k}|c})$$

und im thermodynamischen Limes erhält man

$$-\beta F(\beta, V) = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \, \log(1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar|\vec{k}|c}) = \frac{2V}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{c^3} \int_0^\infty d\omega \, \omega^2 \log(1 - \mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega})$$

mit der Substitution $|\vec{k}| = \omega/c$. Insbesondere liefert

$$U = \frac{\partial}{\partial\beta}(\beta F) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \, \omega^2 \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

dasselbe Resultat (1.14) für die Energie der Hohlraumstrahlung. Übrigens ist $\beta F \propto \beta^{-3}$ (Variablensubstitution!), also $U = (\partial/\partial\beta)(\beta F) = -3F$.

ii) Da $(1-t)^{-1} = \sum_{l=0}^\infty t^l$, ($|t| < 1$) und $\int_0^\infty dx \, x^3 \exp(-lx) = 6l^{-4}$ für $l > 0$, gilt

$$\int_0^\infty dx \, \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} = \int_0^\infty dx \, \frac{x^3 \mathrm{e}^{-x}}{1 - \mathrm{e}^{-x}} = \int_0^\infty dx \, x^3 \sum_{l=1}^\infty (\mathrm{e}^{-x})^l = \sum_{l=1}^\infty \frac{6}{l^4} ,$$

$$U = \frac{V}{\pi^2 c^3 \beta^4 \hbar^3} \int_0^\infty dx \, \frac{x^3}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{6V}{\pi^2 c^3 \beta^4 \hbar^3} \zeta(4) .$$

Die Zahl der Photonen ist

$$N = \sum_{\vec{k},\lambda} \langle n_{\vec{k},\lambda} \rangle = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon_{\vec{k},\lambda}} - 1} ,$$

was im thermodynamischen Limes

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \, \frac{\omega^2}{\mathrm{e}^{\beta\hbar\omega} - 1}$$

lautet. Mit $\int_0^\infty dx\, x^2 \exp(-lx) = 2l^{-3}$ ist analog

$$N = \frac{V}{\pi^2 c^3 \beta^3 \hbar^3} \int dx\, \frac{x^2}{\mathrm{e}^x - 1} = \frac{2V}{\pi^2 c^3 \beta^3 \hbar^3} \zeta(3)\ .$$

Für die Entropie pro Photon findet man daraus:

$$\frac{S}{N} = \frac{U - F}{NT} = \frac{4U}{3NT} = \frac{4}{3} 3k \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)}\ .$$

2. Bose-Einstein Kondensation in $d = 2$?

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir spinlose Teilchen. Die Teilchendichte ist, vgl. Vorlesung,

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu)} - 1}\ , \qquad (\mu < 0) \tag{5}$$

und im thermodynamischen Limes bei festem μ

$$\rho = \frac{N}{V} = (2\pi)^{-d} \int d^d k\, \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta(\frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} - \mu)} - 1}\ .$$

Die Dichte ρ ist monoton wachsend in $\mu \in (-\infty, 0)$ von 0 bis

$$\rho^* = (2\pi)^{-d} \int d^d k\, \frac{1}{\mathrm{e}^{\beta \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m}} - 1}\ .$$

Der Integrand ist singulär bei $\vec{k} = 0$, da der Nenner dort wie $O(k^2)$ verschwindet. Wegen $d^d k = |S_{d-1}| k^{d-1} dk$ ist das Integral für $d \geq 3$ trotzdem konvergent . In $d \leq 2$ ist hingegen $\rho^* = \infty$. Also:

$d \geq 3$ Sobald $\rho > \rho^*$ muss $\mu \nearrow 0$ für $V \to \infty$ (passend) gewählt werden. Dann ist der Term $\vec{k} = 0$ in (5) gesondert zu behandeln: da $n_0 = (\mathrm{e}^{-\beta\mu} - 1)^{-1}$ nun divergiert, vermag dieser Term (und nur dieser) den Überschuss aufzufangen, d.h.

$$\frac{n_0}{V} \to \rho - \rho^*\ .$$

Dies ist ein Kondensat: Die Besetzung eines Einteilteichenzustands ist proportional zu V.

$d \leq 2$ Jeder Wert von $\rho > 0$ enstspricht einem festen Wert $\mu < 0$ im thermodynamischen Limes. Dann ist für jedes $\vec{k}$

$$\frac{n_{\vec{k}}}{V} = O(V^{-1}) \to 0\ :$$

kein Kondensat.