Quantenmechanik II. Musterlösung 11.

FS 11

1. Korrelationsfunktionen

i) *Ein-Teilchen-Korrelationsfunktionen.* Anwendung von (7) auf die Slater-Determinante der Orbitale $|\varphi_{\vec{k},\sigma}\rangle$ liefert unter Verwendung von $1 = \int d\xi |\xi\rangle\langle\xi|$

$$\begin{aligned}\langle\Phi_0|d\Gamma(B)|\Phi_0\rangle &= \sum_{\substack{\vec{k},\sigma\\ |\vec{k}|\le k_F}} \langle\varphi_{\vec{k},\sigma}|B|\varphi_{\vec{k},\sigma}\rangle = \int d\xi d\xi' \sum_{\substack{\vec{k},\sigma\\ |\vec{k}|\le k_F}} \langle\varphi_{\vec{k},\sigma}|\xi\rangle\langle\xi|B|\xi'\rangle\langle\xi'|\varphi_{\vec{k},\sigma}\rangle\\ &= \int d\xi d\xi' \langle\xi|B|\xi'\rangle L^{-3} \sum_{\substack{\vec{k},\sigma\\ |\vec{k}|\le k_F}} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\delta_{\sigma s}\delta_{\sigma s'}\ .\end{aligned}$$

Dies ist (3) mit

$$g(\xi,\xi') = L^{-3} \sum_{\substack{\vec{k},\sigma\\ |\vec{k}|\le k_F}} e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\delta_{\sigma s}\delta_{\sigma s'}\ , \tag{12}$$

was für $L\to\infty$ gegen (6) strebt.

ii) *Paarkorrelationsfunktionen.* Anwendung von (11) auf dieselbe Slater-Determinante liefert für einen 2-Teilchenoperator der erwähnten diagonalen Form

$$\begin{aligned}\langle\Phi_0|d\Gamma(B)|\Phi_0\rangle =& \frac{1}{2} \sum_{\substack{\vec{k},\sigma,\vec{k}',\sigma'\\ |\vec{k}|,|\vec{k}'|\le k_F}} \langle\varphi_{\vec{k},\sigma}\otimes\varphi_{\vec{k}',\sigma'}|B|\varphi_{\vec{k},\sigma}\otimes\varphi_{\vec{k}',\sigma'}\rangle - \langle\varphi_{\vec{k}',\sigma'}\otimes\varphi_{\vec{k},\sigma}|B|\varphi_{\vec{k},\sigma}\otimes\varphi_{\vec{k}',\sigma'}\rangle\\ = \frac{1}{2}\int d\xi d\xi' & \sum_{\substack{\vec{k},\sigma,\vec{k}',\sigma'\\ |\vec{k}|,|\vec{k}'|\le k_F}} \big(\langle\varphi_{\vec{k},\sigma}\otimes\varphi_{\vec{k}',\sigma'}|\xi\otimes\xi'\rangle B(\xi,\xi')\langle\xi\otimes\xi'|\varphi_{\vec{k},\sigma}\otimes\varphi_{\vec{k}',\sigma'}\rangle\\ &- \langle\varphi_{\vec{k}',\sigma'}\otimes\varphi_{\vec{k},\sigma}|\xi\otimes\xi'\rangle B(\xi,\xi')\langle\xi\otimes\xi'|\varphi_{\vec{k},\sigma}\otimes\varphi_{\vec{k}',\sigma'}\rangle\big)\ .\end{aligned}$$

Dies ist (8) (beachte: Faktor 1/2 fehlt dort auf rechter Seite) mit

$$\begin{aligned}G(\xi,\xi') = L^{-6} &\sum_{\substack{\vec{k},\sigma,\vec{k}',\sigma'\\ |\vec{k}|,|\vec{k}'|\le k_F}} \Big(e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}'}\delta_{\sigma s}\delta_{\sigma' s'}\cdot e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}'}\delta_{\sigma s}\delta_{\sigma' s'}\\ &\qquad - e^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}}e^{-\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}'}\delta_{\sigma s'}\delta_{\sigma' s}\cdot e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}e^{\mathrm{i}\vec{k}'\cdot\vec{x}'}\delta_{\sigma s}\delta_{\sigma' s'}\Big)\\ = L^{-6} &\sum_{\substack{\vec{k},\sigma,\vec{k}',\sigma'\\ |\vec{k}|,|\vec{k}'|\le k_F}} \Big(\delta_{\sigma s}\delta_{\sigma' s'} - e^{-\mathrm{i}\vec{k}'\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\delta_{\sigma' s}\delta_{\sigma' s'}\cdot e^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot(\vec{x}-\vec{x}')}\delta_{\sigma s'}\delta_{\sigma s}\Big)\\ = g(\xi,\xi)&g(\xi',\xi') - g(\xi,\xi')g(\xi',\xi)\end{aligned}$$

wegen (12).