# Quantenmechanik II. Musterlösung 1.

*FS 11*

### 1. Bindung durch schwache Potentiale

i) Es gilt $\langle\psi|H|\psi\rangle < 0$ für ein $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zu zeigen; auf dessen Normierung kommt es nicht an. Für den Variationsansatz ist

$$\begin{aligned}
\langle\psi|-\Delta|\psi\rangle &= \int |\vec{\nabla}\psi(\vec{x})|^2\, d^n x = l^{n-2}\|\vec{\nabla}\psi_0\|^2 \,, \\
\langle\psi|V|\psi\rangle &= \int |\psi_0(\vec{x}/l)|^2 V(\vec{x})\, d^n x = |\psi_0(0)|^2\tilde{V} + o(1) \,, \qquad (l\to\infty) \,,
\end{aligned}$$

wobei $\tilde{V} := \int V(\vec{x}) < 0\, d^n x$. Zusammen

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = l^{n-2}\|\vec{\nabla}\psi_0\|^2 + \lambda\tilde{V}|\psi_0(0)|^2 + o(1) \,, \qquad (l\to\infty) \,. \tag{8}$$

Es genügt, dass rechts die beiden expliziten Terme zusammen $\le -c < 0$ sind, für ein $\psi_0$ und grosse $l$. Für $n=1$ trifft dies für jedes $\psi_0$ (mit $\|\vec{\nabla}\psi_0\| < \infty$) zu. Für $n=2$, wo $l^{n-2}=1$, kommt es auf $\psi_0$ an. Eine Skalierung von $\psi_0$, wie sie im Ansatz bereits inbegriffen ist, hilft nicht, da unter ihr sich keiner der beiden Terme ändert. Der vorgeschlagene Ansatz liefert hingegen

$$\psi_0(0) = 1 \,, \qquad \vec{\nabla}\psi_0(\vec{x}) = f'(|\vec{x}|^\varepsilon)\varepsilon|\vec{x}|^{\varepsilon-1}\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \,,$$

$$\|\vec{\nabla}\psi_0\|^2 = \varepsilon^2\int (f'(|\vec{x}|^\varepsilon))^2|\vec{x}|^{2\varepsilon-2}d^2x = 2\pi\varepsilon^2\int_0^\infty f'(r^\varepsilon)^2 r^{2\varepsilon-1}dr \le 2\pi\varepsilon\int_0^\infty f'(s)^2 s\, ds$$

nach Substitution $r = s^{1/\varepsilon}$, $dr = \varepsilon^{-1}s^{1/\varepsilon-1}ds$ und $s^{2-1/\varepsilon}s^{1/\varepsilon-1} = s$. Für $\varepsilon$ klein genug überwiegt die potentielle Energie in (8).

ii)

$$H \ge \left(\frac{n-2}{2}\right)^2\frac{1}{\vec{x}^2} + \lambda V(\vec{x}) \,.$$

Unter den Annahmen über $V$ steht rechts eine positive Funktion, falls $\lambda > 0$ klein ist.

### 2. Niederenergetische Streuung und Streulänge

i) Wir folgen dem Übungsblatt. Lösungen $u$ der freien radialen Schrödinger-Gleichung zur Energie 1,

$$-u'' + \frac{l(l+1)}{\rho^2}u - u = 0 \,, \tag{9}$$

haben die Asymptotik

$$u(\rho) = \alpha\cos(\rho - l\pi/2) + \beta\sin(\rho - l\pi/2) + O(\rho^{-1}) \,, \qquad (\rho\to\infty) \,,$$

und sind durch $\alpha$, $\beta$ eindeutig bestimmt. Somit ist $\tilde{\jmath}_l = \operatorname{Im}\tilde{h}_l$, denn für beide Lösungen ist $\alpha = 0$, $\beta = 1$, vgl. (5.20). Für $\tilde{n}_l = \operatorname{Re}\tilde{h}_l$ ist im Übrigen $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Für $\rho \to 0$ ist

$$u(\rho) = a\rho^{-l} + O(\rho^{-l+1}) \ , \qquad (\rho \to 0) \ ,$$

ausser für die reguläre Lösung

$$\tilde{\jmath}_l(\rho) = c_l \rho^{l+1} + O(\rho^{l+2}) \ , \qquad (\rho \to 0) \ ,$$

vgl.S. 43. Für die Wronski-Determinante von $\tilde{\jmath}_l$, $\tilde{n}_l$ ist

$$\begin{aligned} W(\rho) &= (\sin x \cos' x - \cos x \sin' x)\big|_{x=\rho-l\pi/2} + O(\rho^{-1}) \to -1 \ , \qquad (\rho \to \infty) \ , \\ W(\rho) &= c_l a \left(\rho^{l+1}(-l)\rho^{-l-1} - (l+1)\rho^l \rho^{-l}\right) + O(\rho) \to -(2l+1)c_l a \ , \qquad (\rho \to 0) \ . \end{aligned}$$

Da $W$ konstant ist, folgt der zweite Teil von (4). Die Konstanz selbst folgt aus $W' = u_1 u_2'' - u_1'' u_2$ und aus (9).

Für $r > R_0$ ist $u_l(k = 0, r)$ Lösung der freien Schrödinger-Gleichung zur Energie Null, also von der Form (6). Wäre $b_l = 0$, so wäre dies die Energie eines gebundenen Zustandes (zumindest für $l \neq 0$), entgegen der Annahme. Einerseits folgt aus (5) und $\tilde{h}_l = \tilde{n}_l + \mathrm{i}\tilde{\jmath}_l$, dass (7) gilt mit

$$A_l = C_l(e^{2\mathrm{i}\delta_l} - 1) \ , \qquad B_l = \mathrm{i}C_l(e^{2\mathrm{i}\delta_l} + 1)$$

und insbesondere

$$\frac{A_l}{B_l} = \frac{\sin \delta_l}{\cos \delta_l} = \tan \delta_l \ .$$

Andererseits folgt aus $u_l(k, r) \to u_l(k = 0, r)$, $(k \to 0)$, und (6)

$$a_l = \frac{1}{(2l+1)c_l} \lim_{k\to 0} A_l(k)k^{-l} \ , \qquad b_l = c_l \lim_{k \to 0} B_l(k)k^{l+1} \ .$$

Zusammen erhält man

$$\frac{a_l}{b_l} = \frac{1}{(2l+1)c_l^2} \lim_{k\to 0} (\tan \delta_l(k))k^{-(2l+1)} \ .$$

Dies verlangt $\delta_l(k) \to 0$, $(k \to 0)$, und zwar

$$\delta_l(k) \cong \frac{a_l}{b_l}(2l+1)c_l^2 k^{2l+1} \ . \tag{10}$$

Gl. (2) folgt nun aus (5.14) und der Gl. vor (5.22).

ii) Für $l = 0$ ist Folgendes aus (9) ersichtlich: $\tilde{h}_0(\rho) = e^{\mathrm{i}\rho}$ (exakt!), also $\tilde{\jmath}_0(\rho) = \sin \rho$, $\tilde{n}_0(\rho) = \cos \rho$ und damit $c_0 = 1$. So liefern (3, 10) $a = -a_0/b_0$. Gl. (6) ist

$$u(r) = u_0(k = 0, r) = a_0 + b_0 r \ , \qquad u'(r) = b_0 \ ;$$

damit ist

$$r - \frac{u(r)}{u'(r)} = r - \left(\frac{a_0}{b_0} + r\right) = a \ .$$

Für eine harte Kugel vom Radius $R_0$ ist $u(r) = r - R_0$, $(r > R_0)$, die reguläre Lösung, und somit $a = R_0$.

iii) Mit der ersten Greenschen Identität, bzw. mit $\mathrm{div}(\overline{\psi}\vec{\nabla}\psi) = |\vec{\nabla}\psi|^2 + \overline{\psi}\Delta\psi$ ist

$$\int\limits_{|\vec{x}|\leq R} \big(|\vec{\nabla}\psi(\vec{x})|^2 + \mathscr{V}(|\vec{x}|)|\psi(\vec{x})|^2\big) d^3x = \int\limits_{|\vec{x}|\leq R} \overline{\psi}(-\Delta\psi + \mathscr{V}\psi) d^3x + \int\limits_{|\vec{x}|=R} \overline{\psi}\vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{o}\ .$$

Der erste Integrand rechts verschwindet. Für $r > R_0$ ist

$$\psi(\vec{x}) = 1 - \frac{a}{r}\ , \qquad \vec{\nabla}\psi = a\frac{\vec{x}}{r^3}\ ,$$

also strebt das zweite Integral für $R \to \infty$ gegen

$$a \int\limits_{|\vec{x}|=R} \frac{\vec{x}}{r^3} \cdot d\vec{o} = 4\pi a\ .$$