Quantenmechanik II. Musterlösung 8.

FS 11

1. Fermi-Druck

Die 1-Teilchenspektren aus (i) und (ii) sind beide monoton wachsend in $|\vec{k}|$. Die Fermi-Wellenzahl k_F legt somit die Besetzung im Grundzustand in beiden Fällen fest ($n_{\vec{k},\sigma} = 1$, bzw. 0 für $|\vec{k}| \le k_F$, bzw. $> k_F$) und bestimmt die Teilchendichte N/V der Elektronen : Im Quantisierungsvolumen $V = L^3$ ist $\Delta^3 k = (2\pi/L)^3$, also

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{V}\sum_{\vec{k},\sigma} n_{\vec{k},\sigma} \xrightarrow[V\to\infty]{} (2\pi)^{-3}(2j+1)\int_{|\vec{k}|\le k_F} d^3k = (2j+1)(2\pi)^{-3}\cdot\frac{4\pi}{3}k_F^3 = (2j+1)\pi^{-2}\frac{k_F^3}{6}\ ,$$

Die Grundzustandsenergie pro Volumeneinheit ist im selben Limes

$$\frac{E_0}{V} = (2\pi)^{-3}(2j+1)\int_{|\vec{k}|\le k_F} \varepsilon_{\vec{k},\sigma} d^3k = (2j+1)\pi^{-2}\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m}\frac{k_F^5}{10}\ , & ((\mathrm{i}) : \mathrm{nr}) \\ \hbar c\frac{k_F^4}{8}\ . & ((\mathrm{ii}) : \mathrm{ur}) \end{cases}\ ,$$

unter Verwendung von $\int_{|\vec{k}|\le k_F} k^n d^3k = 4\pi k_F^{n+3}/(n+3)$. Da $k_F \propto V^{-1/3}$ bei festem N, ist $E_0 \propto V^{-2/3}$ (nr), bzw. $V^{-1/3}$ (ur). Der Fermi-Druck ist damit

$$p = -\Big(\frac{\partial E_0}{\partial V}\Big)_N = \frac{E_0}{V}\begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{cases} = (2j+1)\begin{cases} \frac{1}{3\pi^2}\frac{\hbar^2}{m}\cdot\frac{1}{10}k_F^5\ , \\ \frac{1}{3\pi^2}\hbar c\cdot\frac{1}{8}k_F^4\ . \end{cases}$$

2. Weisser Zwerg, Teil 1

i) Die lokale Ladungsneutralität erfordert, dass das Einbringen eines Elektrons bei $\vec{x}$ durch das von Z^{-1} Kernen begleitet wird. Seine potentielle Energie ist damit nicht bloss $m\phi(\vec{x})$, wobei $\phi(\vec{x})$ das Gravitationspotential ist, sondern auch $(m_0/Z)\phi(\vec{x})$ mit $m_0/Z \gg m$. Die gesuchte Gleichung ist

$$\varepsilon(p_{\mathrm{F}}(\vec{x})) - mc^2 = \big(\mu - \frac{m_0}{Z}\phi(\vec{x})\big)_+\ . \tag{2}$$

Sie besagt, dass die maximale Energie eines Elektrons (kinetische + potentielle) "uberall dieselbe ($= \mu$) ist, soweit $(m_0/Z)\phi(\vec{x}) < \mu$; andernfalls $p_{\mathrm{F}}(\vec{x}) = 0$ und damit $n(\vec{x}) = 0$.

ii) Die massgebende Quelle von $\phi(\vec{x})$ ist die Masse der Kerne (Teilchendichte $n(\vec{x})/Z$), also

$$\Delta\phi = 4\pi G m_0 \cdot \frac{n}{Z}\ . \tag{3}$$

Das Gleichungspaar (2, 3) bestimmt "uber (1) ϕ und μ auf selbstkonsistente Weise. Aus

$$\varepsilon_{\mathrm{F}} = mc^2\sqrt{1 + (p_{\mathrm{F}}/mc)^2}$$

folgt f"ur $p_{\mathrm{F}}(\vec{x}) > 0$

$$mc^2\Delta\sqrt{1 + (p_{\mathrm{F}}/mc)^2} = -\frac{m_0}{Z}\Delta\phi$$

und damit

$$\Delta\sqrt{1+(p_{\mathrm{F}}/mc)^2} = -K^2(p_{\mathrm{F}}/mc)^3 \tag{4}$$

mit

$$K^2 = \frac{m_0}{Zmc^2}\cdot\frac{4\pi G m_0}{Z}\cdot\frac{1}{3\pi^2\hbar^3}\cdot(mc)^3 = \frac{4G(m_0/Z)^2m^2c}{3\pi\hbar^3}\ .$$

iii) Mit dem Hinweis,

$$\frac{d}{dr} = \frac{1}{\lambda}\frac{d}{d\xi}\ , \qquad \left(\frac{p_{\mathrm{F}}}{mc}\right)^2 = (z_c\varphi)^2 - 1$$

wird aus (4)

$$\frac{z_c}{\lambda^2}\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi}\Big) = -K^2\big((z_c\varphi)^2-1\big)^{3/2}$$

sofern $z_c\varphi > 1$, d.h.

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\Big(\xi^2\frac{d\varphi}{d\xi}\Big) = -\Big(\varphi^2-\frac{1}{z_c^2}\Big)^{3/2}$$

mit $\lambda = (z_cK)^{-1}$.

Im Unterschied zum Atom gibt es keine Punktquelle im Mittelpunkt des Sterns. Somit ist $n(\vec{x})$ dort glatt, also $\varphi'(\xi=0)=0$. Im Übrigen ist diese Randbedingung auch mathematisch zwingend, falls $\varphi(0)=0$. Mit $\varphi(\xi)=\varphi(0)+\varphi'(0)\xi+O(\xi^2)$ ist nämlich die linke Seite $2\varphi'(0)\xi^{-1}$, die rechte aber endlich für $\xi\to 0$ ($\xi=0$ ist ein singulärer Punkt der Differentialgleichung).