

Kontinuumsmechanik

FS 2010

G.M. Graf

ETH Zürich

Inhaltsverzeichnis

1	Deformationen und Spannungen	1
1	Deformationen	1
2	Spannungen	6
3	Statik von Fluida	9
2	Elastizität	12
1	Elastische Energie	12
2	Das Hookesche Gesetz	13
3	Das elastische Randwertproblem	17
3	Beispiele zur Elastostatik	21
1	Biegung von Balken	21
2	Torsion von Balken	24
3	Belastung durch eine Einzelkraft	27
4	Elastische Randwertprobleme mit Translationssymmetrie	31
5	Die Methode der Finiten Elemente	33
4	Elastische Schwingungen	37
1	Wellen und Polarisationen	37
2	Anwendung: Die spezifische Wärme eines Festkörpers	39
3	Oberflächenwellen	42
5	Plastische Deformationen und Versetzungen	46

1	Die Grenzen des Hooke'schen Gesetzes	46
2	Scherung durch Verschiebung von Atomlagen	46
3	Versetzungen	47
4	Das Frenkel-Kontorova Modell	48
5	Makroskopische Beschreibung der Versetzungen	52
6	Die Kraft auf eine Versetzung	54
6	Dynamik der Fluida	56
1	Kinematik	56
2	Erhaltung der Masse	57
3	Der Impulssatz	58
4	Der Drehimpulssatz	59
5	Der Energiesatz	59
6	Einfache Bewegungsgleichungen	60
7	Ideale Fluida	64
1	Der Satz von Bernoulli	64
2	Wirbel	65
3	Zwei-dimensionale Wirbeldynamik	67
8	Schwingungen um das Gleichgewicht	72
1	Schallwellen	72
2	Die Jeans-Instabilität	73
3	Schwerewellen im Wasser	74
4	Kapillarwellen	78
5	Einschub: die Methode der stationären Phase	79
6	Ringwellen in Tiefwasser	81
7	Schiffswellen	83
9	Zweidimensionale Potentialströmungen	86
1	Allgemeines	86
2	Konstruktion von 2-dim. Potentialströmungen	90

3	Auftrieb und Widerstand	97
10	Inkompressible, reibende Fluida	100
1	Allgemeines	100
2	Beispiele von Strömungen	101
3	Instabilitäten	104
4	Stokes'sche Widerstandsformel	108
5	Grenzschichten	110
11	Turbulenz	115
1	Statistische Beschreibung	115
2	Der Limes kleiner Viskositäten	117
	Formelsammlung zur Vektoranalysis	122
	Literatur	123

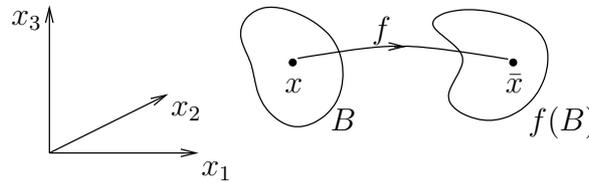
Dank gebührt W. Hunziker und K. Hepp auf deren Vorlesungsskripten dieser Text teilweise basiert, sowie Frau A. Schultze für die sorgfältige Textverarbeitung.

Erste Ausgabe: SS 2000.

1. Deformationen und Spannungen

1. Deformationen

Wir fassen **Deformationen** eines Körpers auf als orientierungstreue **Diffeomorphismen** $f : B \rightarrow f(B) \subset \mathbb{R}^3$ eines Gebiets $B \subset \mathbb{R}^3$ (**Referenzkonfiguration**).



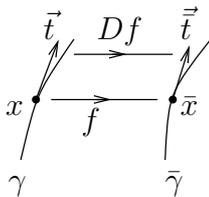
In kartesischen Koordinaten

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, x_3), \quad \det \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} > 0.$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$: **materielle** Koordinaten (Lagrange)

$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$: **räumliche** Koordinaten (Euler)

Wir benutzen vorderhand materielle Koordinaten. Lokal wird die Deformation beschrieben durch die Tangentialabbildung Df (Deformationsgradienten):



$$\vec{t} = (Df)\vec{t}, \quad \text{d.h.} \quad \bar{t}_i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} t_k.$$

Kurve γ

$\bar{\gamma}$

Für jedes $x \in B$ ist $Df(x)$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wir unterscheiden (für festes x)

(lokale) **Drehung**: $Df = R \in \text{SO}(3)$

(lokale) **Streckung**: $Df = S = S^T > 0$

Jede Streckung hat in einem passend gedrehten Koordinatensystem (Hauptstreckungsrichtungen bei x) die Form

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & s_2 & \\ & & s_3 \end{pmatrix}, \quad s_i > 0.$$

$\det S = s_1 s_2 s_3$ ist der Faktor, um den das Volumenelement bei x durch die Streckung verändert wird.

Jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\det A > 0$ lässt sich eindeutig zerlegen in

$$A = S_l \cdot R, \quad A = R \cdot S_r \tag{1.1}$$

(Polarzerlegung). Die zweite Zerlegung folgt aus der ersten durch

$$A = R R^{-1} S_l R, \quad \text{d.h.} \quad S_r = R^{-1} S_l R :$$

S_r und S_l haben dieselben Eigenwerte. Soll $A = S_l R$ gelten, und somit $A^T = R^T S_l$, so muss

$$AA^T = S_l^2, \quad \text{also} \quad S_l = (AA^T)^{1/2}$$

(positive Wurzel einer positiv definiten Matrix). Dann ist $R = S_l^{-1} A$ tatsächlich eine Drehung: $RR^T = S_l^{-1} AA^T S_l^{-1} = 1$; und wegen $\det A = \det S_l \cdot \det R$ ist $\det R > 0$, also $= +1$.

Anders gesagt: der Rotationsanteil R im Deformationsgradienten $A = Df(x)$ fällt heraus im linken, bzw. rechten Cauchyschen Verzerrungstensor

$$C_l = AA^T = S_l^2, \quad C_r = A^T A = S_r^2. \quad (1.2)$$

Eine **homogene Deformation** ($Df(x) \equiv A$, konstant) ist affin,

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0),$$

und lässt sich auffassen als eine Streckung, gefolgt von einer Drehung und einer Translation:

$$f(x) = RS_r x + a.$$

Der Fall $S_r = 1$ kann man verschiedentlich charakterisieren.

Satz (Liouville). $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$. Äquivalent sind

i) f ist eine Euklidische Bewegung: $f(x) = Rx + a$.

ii) f ist lokal eine Drehung: $Df(x) \in \text{SO}(3)$, ($x \in B$).

iii) f ist starr: für benachbarte $x_1, x_2 \in B$ gilt $|f(x_2) - f(x_1)| = |x_2 - x_1|$.

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): klar.

(ii) \Rightarrow (iii): Die Verbindungsstrecke $x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$, ($0 \leq t \leq 1$) liege in B . Mit

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_0^1 Df(x(t))(x_2 - x_1) dt$$

ist

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |Df(x(t))(x_2 - x_1)| = |x_2 - x_1|,$$

da $Df(x(t)) \in \text{SO}(3)$. Zumindest lokal existiert f^{-1} und dieselbe Überlegung für f^{-1} , mit $Df^{-1}(y) = (Df|_{f^{-1}(y)})^{-1} \in \text{SO}(3)$, liefert die umgekehrte Ungleichung.

(iii) \Rightarrow (i): Ableitung von

$$(f(x_1) - f(x_2)) \cdot (f(x_1) - f(x_2)) = (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

nach x_1 liefert $Df(x_1)^T (f(x_1) - f(x_2)) = x_1 - x_2$; davon nach x_2

$$Df(x_1)^T Df(x_2) = 1$$

Damit ist $Df(x_1) \in \text{SO}(3)$ (setze $x_2 = x_1$) und $Df(x_1) = Df(x_2)$. □

Die Cauchyschen Tensorfelder C_r und C_l enthalten die volle Angabe der Verzerrung (im Sinne von "Deformationen modulo Bewegungen"):

Satz. Seien $f_1, f_2 : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ zwei Deformationen mit $C_{r1}(x) = C_{r2}(x)$ (bzw. $C_{l1}(x) = C_{l2}(x)$) für alle $x \in B$. Dann ist

$$f_1(x) = Rf_2(x) + a \quad (1.3)$$

für ein $R \in \text{SO}(3)$, $a \in \mathbb{R}^3$ (bzw. $f_1(x) = f_2(Rx + a)$).

Beweis. Betrachte $f = f_1 \circ f_2^{-1} : f_2(B) \rightarrow f_1(B)$. Es ist $Df(y) = (Df_1(x))(Df_2(x))^{-1}$ mit $f_2(x) = y$, und somit

$$C_r(y) = (Df(y))^T(Df(y)) = \underbrace{(Df_2(x)^T)^{-1}}_{Df_2(x) \cdot C_{r2}(x)^{-1}} \cdot \underbrace{(Df_1(x))^T(Df_1(x))}_{C_{r1}(x)}(Df_2(x))^{-1} = 1 .$$

Nach dem vorigen Satz ist $f(y) = Ry + a$, was dasselbe wie (1.3) ist, (bzw. analog anhand von $f = f_2^{-1} \circ f_1$). \square

Kleine Deformationen

Eine Deformation kann durch die **Verschiebung** u ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(x) = x + u(x) , \\ Df(x) &= 1 + Du(x) , \\ C_l &= 1 + Du + (Du)^T + (Du)(Du)^T , \\ C_r &= 1 + Du + (Du)^T + (Du)^T(Du) . \end{aligned} \quad (1.4)$$

Sie ist klein, falls für den Deformationsgradienten $|\partial u_i / \partial x_k| \ll 1$ gilt. Linearisierung: nur Glieder 1. Ordnung in diesen Größen. In $Df = RS$, s. (1.1), ist dann

$$S(x) =: 1 + E(x) , \quad R(x) =: 1 + W(x) ,$$

mit $E = E^T$ (wegen $S = S^T$) und $W = -W^T$ (wegen $R^T R = 1$), und die Gleichung lautet $Du = W + E$. Somit:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}(Du - Du^T) , & W_{ik} &= \frac{1}{2}(u_{i,k} - u_{k,i}) , \\ E &= \frac{1}{2}(Du + Du^T) , & E_{ik} &= \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}) , \\ C_l &= C_r = 1 + 2E , \end{aligned} \quad (1.5)$$

($,_i = \partial_i = \partial / \partial x_i$). Hier ist W die Verdrehung und E der **Verzerrungstensor** (oder Deformationstensor).

Bemerkungen. 1) Wegen $W_{ik} = -W_{ki}$ ist $Wx = \omega \wedge x$, ($\omega_i = -W_{i+1i+2}$). Somit ist

$$u(x_0 + \vec{t}) = u(x_0) + E\vec{t} + \omega \wedge \vec{t} + o(\vec{t}) , \quad (\vec{t} \rightarrow 0) ,$$

wobei Du der Deformationsgradient bei x_0 ist.

2) Das Gegenstück zu (1.3) ist: $E(x)$ bestimmt $u(x)$ nur bis auf infinitesimale starre Verschiebungen, d.h. $E \equiv 0$ impliziert $u(x) = \omega \wedge x + a$ (infinitesimale starre Verschiebung). Denn es folgt $u_{i,kl} = -u_{k,il} = -u_{k,li}$ und, nach zwei weiteren zyklischen Permutationen, $u_{i,kl} = -u_{i,kl}$. Also $u_{i,kl} \equiv 0$, $u_{i,k} \equiv W_{ik} = \text{const}$, $u_i = W_{ik}x_k + a_i$, wie behauptet.

Der Verzerrungstensor ist symmetrisch und kann, in jedem festen Punkt, durch eine Drehung auf Hauptachsen (Hauptstreckungsrichtungen) transformiert werden:

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \varepsilon_2 & \\ & & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_i : \text{Hauptstreckungen} .$$

Wegen $\det S = 1 + \text{tr } E$ ist $\text{tr } E$ die relative Volumenzunahme unter der Deformation. Für eine isotrope Dilatation ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \equiv \varepsilon$; dann ist in jedem Koordinatensystem $E_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}$.

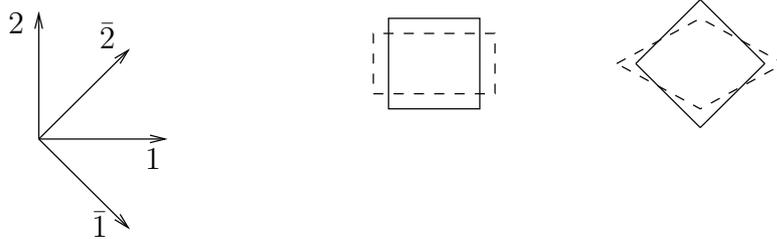
Jedes E kann in einen isotropen und einen volumentreuen (spurlosen) Teil zerlegt werden:

$$E_{ik} = \varepsilon \delta_{ik} + \hat{E}_{ik}; \quad \varepsilon = \frac{1}{3} \text{tr } E, \quad \text{tr } \hat{E} = 0. \quad (1.6)$$

Falls E volumentreu ist und ein Eigenwert verschwindet, spricht man von einer **Scherung**, z.B. in Hauptachsen 1, 2, 3

$$E = \begin{pmatrix} \varepsilon & & \\ & -\varepsilon & \\ & & 0 \end{pmatrix} .$$

Sie bildet ab:



Bezüglich $\bar{1}, \bar{2}, \bar{3} = 3$ ist

$$E = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

denn die ersten beiden neuen Basisvektoren sind $\vec{n}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \mp 1, 0)$ und $E\vec{n}_{\pm} = \varepsilon\vec{n}_{\pm}$.

Verträglichkeitsbedingungen

Man überprüft, dass (1.5) die sechs Bedingungen

$$\begin{aligned} 2E_{ij,ij} &= E_{ii,jj} + E_{jj,ii}, & (i \neq j) \\ E_{ii,i+1+i+2} &= \partial_i(E_{ii+1,i+2} + E_{ii+2,i+1} - E_{i+1i+2,i}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

zur Folge hat. Sie können auch zusammengefasst werden als

$$E_{il,jk} + E_{jk,il} - E_{ij,kl} - E_{kl,ij} = 0 .$$

Bemerkung zur geometrischen Bedeutung. Wegen $d\bar{x} = (Df)dx$ und $(d\bar{x})^T(d\bar{x}) = (dx)^T C_r(dx)$ ist die Euklidische Metrik $\bar{g} = 1$ auf dem deformierten Körper in materiellen Koordinaten durch $g = C_r(x) = 1 + 2E$ gegeben. Bei kleinen Verschiebungen lauten die Christoffel-Symbole

$$\Gamma^i_{lk} = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{lj,k} + g_{kj,l} - g_{lk,j}) = E_{li,k} + E_{ki,l} - E_{lk,i}$$

und der Riemann-Tensor

$$R^i{}_{jkl} = \Gamma^i{}_{lj,k} - \Gamma^i{}_{kj,l} + \Gamma^s{}_{lj}\Gamma^i{}_{ks} - \Gamma^s{}_{kj}\Gamma^i{}_{ls} = E_{il,jk} + E_{jk,il} - E_{ij,kl} - E_{kl,ij} ,$$

beide bis auf Terme höherer Ordnung. Letzterer verschwindet für die Euklidische Metrik, unabhängig von den verwendeten Koordinaten.

Behauptung. Umgekehrt sind die Gleichungen (1.8) auch hinreichend dafür, dass ein gegebenes, symmetrisches Feld $E(x)$ auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet von der Form (1.5) ist.

Analogie (s. Analysis). Ein gegebenes Vektorfeld $v(x)$ im \mathbb{R}^3 ist ein Gradientenfeld, d.h. es existiert eine Lösung $f(x)$ für $\partial_i f = v_i$, genau dann, falls die (aus $\partial_{ij}^2 f = \partial_{ji}^2 f$ folgenden) Integrabilitätsbedingungen

$$v_{i,j} = v_{j,i}$$

gelten.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass es ein Feld $W_{ij}(x) = -W_{ji}(x)$ gibt, sodass

$$Du = E + W \tag{1.9}$$

eine Lösung $u(x)$ zulässt: Dann ist nämlich $\frac{1}{2}(Du + (Du)^T) = E$. Äquivalent zu (1.9) sind folgende Gleichungen

$$u_{i,i} = E_{ii} , \quad u_{i+1,i+2} = E_{i+1,i+2} + \omega_i , \quad u_{i+2,i+1} = E_{i+2,i+1} - \omega_i , \tag{1.10}$$

wobei $\omega_i := W_{i+1,i+2}$. Wir suchen W , bzw. ω , mit der zusätzlichen Eigenschaft $\text{div } \omega = 0$, derart dass (1.10) eine Lösung u besitzt. Dies ist der Fall, falls die (aus $u_{i,jk} = u_{i,kj}$ folgenden) Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} u_{i,i+1,i+2} = u_{i,i+2,i+1} & : & E_{i,i+1,i+2} + \omega_{i+2,i+2} & = E_{i,i+2,i+1} - \omega_{i+1,i+1} , \\ u_{i+1,i+1,i+2} = u_{i+1,i+2,i+1} & : & E_{i+1,i+1,i+2} & = E_{i+1,i+2,i+1} + \omega_{i,i+1} , \\ u_{i+2,i+2,i+1} = u_{i+2,i+1,i+2} & : & E_{i+2,i+2,i+1} & = E_{i+1,i+2,i+2} - \omega_{i,i+2} , \end{aligned}$$

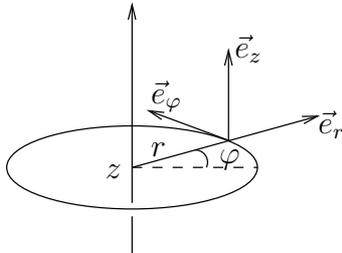
d.h. mit $\omega_{i,i} = -\omega_{i+1,i+1} - \omega_{i+2,i+2}$

$$\begin{aligned} \omega_{i,i} & = E_{i,i+1,i+2} - E_{i,i+2,i+1} , & (1.11) \\ \omega_{i,i+1} & = E_{i+1,i+1,i+2} - E_{i+1,i+2,i+1} , \\ \omega_{i,i+2} & = E_{i+1,i+2,i+2} - E_{i+2,i+2,i+1} . \end{aligned}$$

Dies ist seinerseits möglich, falls die (aus $\omega_{i,jk} = \omega_{i,kj}$ folgenden) Integrabilitätsbedingungen gelten: Es sind die Gl. (1.8). Die Bedingung $\text{div } \omega = 0$ ist dann wegen (1.11) erfüllt. \square

Krummlinige Koordinaten

Oft verwendet man "orthogonale krummlinige Koordinaten". Beispiel: Zylinderkoordinaten (r, φ, z) .



Man zerlegt dann Vektoren und Tensoren in jedem Punkt (r, φ, z) nach Komponenten im orthonormierten Dreibein $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$. Anschaulich (oder analytisch) berechnet man die Ableitungen der Basisvektoren

$$\vec{e}_{r,\varphi} = \vec{e}_\varphi , \quad \vec{e}_{\varphi,\varphi} = -\vec{e}_r , \tag{1.12}$$

(alle übrigen = 0).

Verschiebung:

$$u = u_r \vec{e}_r + u_\varphi \vec{e}_\varphi + u_z \vec{e}_z \equiv (u_r, u_\varphi, u_z) .$$

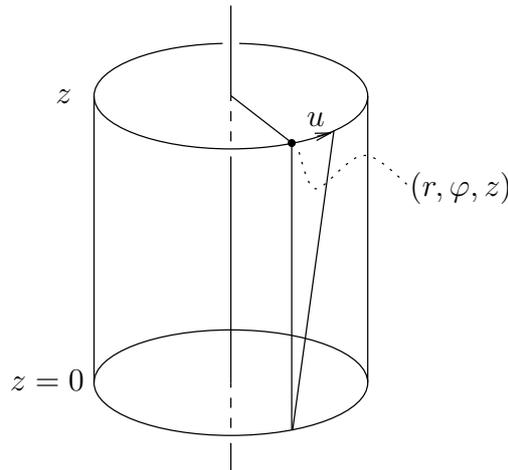
Wegen $(Du)\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})u$ hat Du die Spaltenvektoren (s. Figur) $\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla}u = \frac{\partial u}{\partial r}$, $\vec{e}_\varphi \cdot \vec{\nabla}u = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\vec{e}_z \cdot \vec{\nabla}u = \frac{\partial u}{\partial z}$, die man mit (1.12) leicht ausrechnet

$$Du = \begin{pmatrix} u_{r,r} & \frac{1}{r}(u_{r,\varphi} - u_\varphi) & u_{r,z} \\ u_{\varphi,r} & \frac{1}{r}(u_{\varphi,\varphi} + u_r) & u_{\varphi,z} \\ u_{z,r} & \frac{1}{r}u_{z,\varphi} & u_{z,z} \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Der symmetrische Teil davon ist der Verzerrungstensor

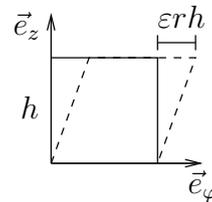
$$\begin{aligned} E_{rr} &= u_{r,r} \\ E_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r}(u_{\varphi,\varphi} + u_r) \\ E_{zz} &= u_{z,z} \\ E_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r}u_{r,\varphi} - \frac{1}{r}u_\varphi + u_{\varphi,r} \right) \\ E_{rz} &= \frac{1}{2}(u_{r,z} + u_{z,r}) \\ E_{\varphi z} &= \frac{1}{2} \left(u_{\varphi,z} + \frac{1}{r}u_{z,\varphi} \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Beispiel. Torsion:



$$u_r = 0, \quad u_\varphi = \varepsilon r z, \quad u_z = 0.$$

Dann ist $E_{\varphi z} = \frac{1}{2}\varepsilon r$, alle anderen = 0. Die Deformation eines Flächenelementes auf dem Zylinder $r = \text{const}$ ist eine reine Scherung.

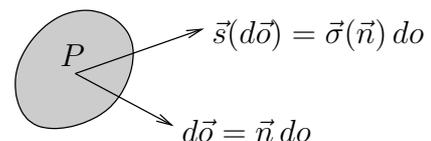


2. Spannungen

Wir benutzen räumliche Koordinaten, vgl. S. 1, und entsprechende Komponenten, lassen aber Querstriche weg. Benachbarte Teile eines Körpers wechselwirken über kurzreichwertige (“intermolekuläre”) Kräfte. Makroskopisch können sie als **Oberflächenkräfte** aufgefasst werden, die die Materie auf der Seite einer Schnittfläche, die in Richtung des Normalenvektors \vec{n} liegt, auf die der anderen ausübt.

Für eine infinitesimale Fläche $d\vec{\sigma} = \vec{n} do$ soll die Kraft $\vec{s}(d\vec{\sigma})$, bzw. das Drehmoment $\vec{m}(d\vec{\sigma})$ bzgl. eines Punkts P darin, von der Form

$$\vec{s}(d\vec{\sigma}) = \vec{\sigma}(\vec{n})do, \quad \vec{m}(d\vec{\sigma}) = 0$$



sein. Zudem gilt "actio=reactio", $\vec{\sigma}(-\vec{n}) = -\vec{\sigma}(\vec{n})$, und $\vec{\sigma}(\vec{n})$ sei stetig bzgl. P . Aus der mikroskopischen Perspektive sind intermolekuläre Kräfte, aber keine intermolekuläre Drehmomente zugelassen, zumindest nicht im Mittel.

Die **Impuls- und Drehimpulsbilanzgleichungen** für die Materie in einem Gebiet V lauten

$$\int_V \rho a_i d^3x = \int_V F_i d^3x + \int_{\partial V} s_i(d\vec{\sigma}) \quad (\text{Kraft}), \quad (1.15)$$

$$\int_V \rho(\vec{x} \wedge \vec{a})_i d^3x = \int_V (\vec{x} \wedge \vec{F})_i d^3x + \int_{\partial V} (\vec{x} \wedge \vec{s}(d\vec{\sigma}))_i \quad (\text{Drehmoment}), \quad (1.16)$$

wobei zuletzt $\int_{\partial V} \vec{m}(d\vec{\sigma}) = 0$ weggelassen wurde. Hier sind

$\rho(x)$: Massendichte

$\vec{a}(x)$: Beschleunigung des Massenpunktes bei x

$\vec{F}(x)$: Dichte der Volumenkräfte (z.B. Schwerkraft).

Bezogen auf ein orthonormiertes Dreibein $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ setzen wir

$$s_i(\vec{e}_k) = \sigma_{ik}.$$

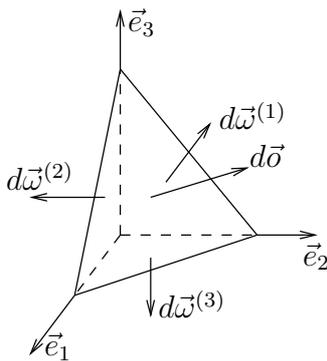
Satz. Die Oberflächenkraft \vec{s} ist linear in $d\vec{\sigma} = \vec{e}_k do_k$, d.h.

$$s_i(d\vec{\sigma}) = \sigma_{ik} do_k, \quad (1.17)$$

und der **Cauchysche Spannungstensor** σ_{ik} symmetrisch:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}.$$

Beweis. Für kleine V sind die Oberflächenkräfte in (1.15) im Gleichgewicht, denn die Volumenkräfte (inkl. dem Trägheitswiderstand $-\rho a$) verschwinden wie das Volumen, also rascher. In diesem Limes kann auch σ_{ik} als konstant über ∂V angenommen werden. Es ist $\int_{\partial V} d\vec{\sigma} = 0$, da $\int_{\partial V} do_i = \int_{\partial V} \vec{e}_i \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \text{div}(\vec{e}_i) d^3x = 0$.



$$d\vec{\omega}^{(k)} = -d\omega^{(k)} \vec{e}_k$$

$$d\vec{\sigma} = - \sum_{k=1}^3 d\vec{\omega}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 d\omega^{(k)} \vec{e}_k,$$

also hat $d\vec{\sigma}$ die Komponenten $do_k = d\omega^{(k)}$. Gleichgewicht:

$$\vec{s}(d\vec{\sigma}) = - \sum_k \vec{s}(d\vec{\omega}^{(k)}) = \sum_{ik} \sigma_{ik} \vec{e}_i \cdot d\omega^{(k)},$$

$$\text{also } s_i(d\vec{\sigma}) = \sigma_{ik} do_k.$$

Ebenso muss das resultierende Drehmoment der Oberflächenkräfte an einem kleinen Volumen verschwinden. Mit

$$\int_{\partial V} x_i do_k = \int_{\partial V} (x_i \vec{e}_k) \cdot d\vec{\sigma} = \int_V \delta_{ik} d^3x = V \delta_{ik}$$

ergibt sich die i -Komponente des Drehmoments:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} (x_{i+1}s_{i+2}(d\vec{o}) - x_{i+2}s_{i+1}(d\vec{o})) &= \int_{\partial V} (x_{i+1}\sigma_{i+2k} - x_{i+2}\sigma_{i+1k})do_k \\ &= V(\sigma_{i+2i+1} - \sigma_{i+1i+2}) . \end{aligned}$$

□

Gleichgewicht mit Volumenkräften

Sei $\vec{a} = 0$. Dann gilt, s. (1.15),

$$0 = \int_{\partial V} \sigma_{ik} do_k + \int_V F_i d^3x = \int_V d^3x \left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i \right)$$

für jedes Teilvolumen V des Mediums, also

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + F_i = 0 \quad (\text{Gleichgewicht}) \quad (1.18)$$

im Innern des Körpers. Die Momentbedingung (1.16) ist dann wegen $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ automatisch erfüllt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} (x_{i+1}\sigma_{i+2k} - x_{i+2}\sigma_{i+1k})do_k + \int_V (x_{i+1}F_{i+2} - x_{i+2}F_{i+1}) d^3x \\ = \int_V d^3x \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} (x_{i+1}\sigma_{i+2k} - x_{i+2}\sigma_{i+1k})}_{\sigma_{i+2i+1} - \sigma_{i+1i+2} + x_{i+1}\frac{\partial \sigma_{i+2k}}{\partial x_k} - x_{i+2}\frac{\partial \sigma_{i+1k}}{\partial x_k}} + x_{i+1}F_{i+2} - x_{i+2}F_{i+1} \right) = 0 . \end{aligned}$$

Zu den Volumenkräften können Kontaktkräfte $\vec{f}do$ hinzukommen, die an der Oberfläche des betrachteten Körpers angreifen. Als weitere Gleichgewichtsbedingung gilt

$$\sigma_{ik} do_k = f_i do \quad (1.19)$$

auf dem Rand.

Bemerkung. Die obigen Betrachtungen gelten in räumlichen Koordinaten, die wir vorübergehend wieder mit Querstrichen bezeichnen. Um sie auf materielle Koordinaten zu übersetzen, gehen wir aus von

$$d^3\bar{x} = (\det Df) d^3x , \quad d\bar{o}_k = (\text{cof } Df)_{kl} do_l$$

($\text{cof } A = (\det A)(A^{-1})^T$: Kofaktormatrix von A), sodass

$$\int_V F_i d^3x = \int_{\bar{V}} \bar{F}_i d^3\bar{x} , \quad \int_{\partial V} \sigma_{il} do_l = \int_{\partial \bar{V}} \bar{\sigma}_{ik} d\bar{o}_k$$

gilt, indem man setzt

$$F_i := (\det Df)\bar{F}_i , \quad \sigma_{il} = \bar{\sigma}_{ik}(\text{cof } Df)_{kl}$$

($\sigma_{il} \neq \sigma_{li}$). Für kleine Deformationen (1.4) ist

$$\det Df = 1 + \text{tr } Du , \quad \text{cof } Df = (1 + \text{tr } u)1 - (Du)^T .$$

Da sie selbst durch kleine $\bar{F}_i, \bar{\sigma}_{ik}$ erzeugt werden, ist

$$F_i = \bar{F}_i, \quad \sigma_{il} = \bar{\sigma}_{il}$$

bis auf vernachlässigbare Terme 2. Ordnung in Du .

Typische Spannungszustände

Diagonalkomponenten σ_{ii} heissen Normalspannungen, Ausserdiagonalkomponenten σ_{ik} , ($i \neq k$) Schubspannungen. Der Spannungstensor σ_{ik} kann stets auf Hauptachsen transformiert werden (Hauptspannungsrichtungen):

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_i : \text{Hauptspannungen} .$$

Falls alle σ_i gleich sind (isotroper Spannungszustand), hat σ_{ik} in jeder Basis die Form:

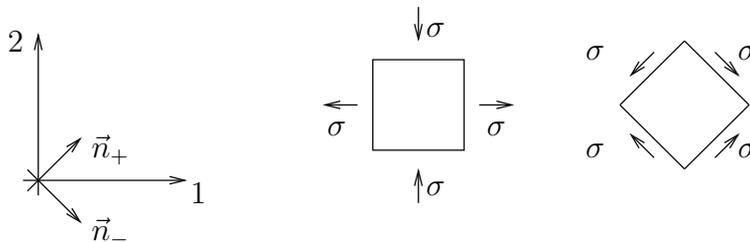
$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}, \quad \vec{s}(d\vec{\sigma}) = -p d\vec{\sigma}$$

(reiner Druck p). Man kann σ_{ik} in einen reinen Druck und einen spurlosen Spannungszustand zerlegen

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \hat{\sigma}_{ik}; \quad p = -\frac{1}{3} \text{tr } \sigma, \quad \text{tr } \hat{\sigma} = 0 .$$

Falls $\text{tr } \sigma = 0$ ist und ein Eigenwert $= 0$, so spricht man auch von einem "reinen Schub", z.B. in Hauptachsen

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma & & \\ & -\sigma & \\ & & 0 \end{pmatrix} .$$



Denn: Beim gedrehten Einheitswürfel gilt $\vec{s}(\vec{n}_{\mp}) = \sigma \vec{n}_{\pm}$ für die Flächen mit Normalenvektoren \vec{n}_{\pm} , vgl. (1.7):

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (1.20)$$

3. Statik von Fluida

Fluida ertragen im Gleichgewicht keine Schubspannungen:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} \quad (1.21)$$

und (1.18) vereinfacht sich zu

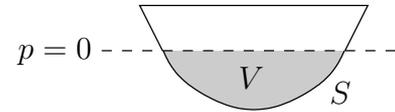
$$\vec{\nabla} p = \vec{F} . \quad (1.22)$$

Gleichgewicht ist nur möglich, falls die Kraftdichte \vec{F} ein Potential hat. Einfachstes Beispiel ist die **inkompressible** Flüssigkeit (Wasser) im Schwerfeld $\vec{F} = (0, 0, -\rho g) = -\vec{\nabla}(\rho g z)$:

$$p + \rho g z = \text{const} .$$

Anwendung: Auf die eingetauchte Fläche S wirkt der Auftrieb

$$\begin{aligned} \vec{A} &= - \int_S p d\vec{\sigma} = - \int_{\partial V} p d\vec{\sigma} = - \int_V \vec{\nabla} p d^3x \\ &= (0, 0, \rho g |V|) \end{aligned}$$



(Archimedes). Für jeden festen Vektor \vec{e} gilt ja (Gauss): $\vec{e} \cdot \int_{\partial V} p d\vec{\sigma} = \int_V \text{div}(p\vec{e}) d^3x = \vec{e} \cdot \int_V \vec{\nabla} p d^3x$.

Für **kompressible** Fluida braucht man eine Zustandsgleichung, z.B. die ideale Gasgleichung

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} , \quad (\mu: \text{molare Masse}) .$$

Für die isotherme Atmosphäre ist dann

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho = -\frac{g\mu}{RT} p ,$$

$$p(z) = p(0)e^{-\frac{g\mu}{RT}z} \quad (\text{Barometer-Formel}) .$$

Im Schwerfeld (oder in einer Zentrifuge) hat die Kraft \vec{g} pro **Masseneinheit** ein Potential:

$$\vec{g}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{x}) .$$

Im Gleichgewicht ist dann

$$\vec{\nabla}p = -\rho\vec{\nabla}\phi .$$

Für eine gegebene Zustandsgleichung $\rho = \rho(p)$ berechnet man zuerst das Druckkraftpotential

$$P(p) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} \quad (1.23)$$

mit p_0 beliebig; dann ist $\vec{\nabla}P = \rho^{-1}\vec{\nabla}p$, also

$$P(p(\vec{x})) + \phi(\vec{x}) = \text{const} .$$

Beispiel: "polytrope Atmosphäre": nicht isotherm, sondern adiabatische Zustandsgleichung (s. unten)

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n , \quad n = \frac{c_p}{c_v} \approx 1.4 \text{ (Luft)} ;$$

dabei ist (p_0, ρ_0) ein Referenzzustand, z.B. Werte auf Erdoberfläche $z = 0$. Man findet

$$P(p) = \frac{p_0^{1/n}}{\rho_0} \int_{p_0}^p \frac{dp'}{p'^{1/n}} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{n}{n-1} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} , \quad (n \neq 1)$$

also, mit $\phi(z) = gz$ und damit $\text{const} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{n}{n-1}$,

$$\frac{p(z)}{p_0} = \left(1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0}{p_0} gz\right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{n}{n-1}}$$

wo $h = \frac{p_0}{g\rho_0} \frac{n}{n-1}$ die Höhe der Atmosphäre bedeutet ($p(h) = 0$). Es folgen noch

$$\frac{\rho(z)}{\rho_0} = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

und, über die ideale Gasgleichung, der Temperaturverlauf $T = \mu p / R\rho$:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p/p_0}{\rho/\rho_0} = 1 - \frac{z}{h}.$$

(Luft: $n \cong 1.4$, $h = 28$ km).

Adiabatische Zustandsgleichung eines idealen Gases

(s. Thermodynamik) Die ideale Gasgleichung für 1 Mol ist

$$pV = RT \quad (\text{thermische Zustandsgleichung})$$

und die innere Energie ist proportional zu T

$$\begin{aligned} U &= cT \quad (\text{kalorische Zustandsgleichung}) \\ &= c \frac{pV}{R}. \end{aligned}$$

Der 1. Hauptsatz der Thermodynamik besagt $dU = \delta A + \delta Q$, wobei $\delta A = -pdV$ die reversibel zugeführte Arbeit ist, d.h. die reversibel zugeführte Wärme ist

$$\delta Q = dU + pdV$$

— konstantes Volumen: $\delta Q = dU = c dT$, also beträgt die spezifische Wärme

$$c_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = c$$

— konstanter Druck: $\delta Q = c_V dT + R dT$, also

$$c_p = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = c_V + R$$

— adiabatische Zustandsänderung: $\delta Q = 0$, also

$$0 = \frac{c_V}{R} d(pV) + pdV = \frac{1}{R} (c_p p dV + c_V V dp)$$

bzw.

$$-c_p \frac{dV}{V} = c_V \frac{dp}{p}, \quad \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{c_p} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{-c_p} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_V}.$$

In diesem Fall stimmt ferner P mit der molaren Enthalpie $H = U + pV$ überein, denn aus $dH = \delta Q + V dp$ wird $dH = \rho^{-1} dp = dP$.

2. Elastizität

1. Elastische Energie

Die äusseren Kräfte sind die Volumenkräfte $\vec{F}d^3x$ innerhalb von B und die Kontaktkräfte $\vec{f}do$ auf ∂B . Bei einer beliebigen Variation $\delta u(x)$ von u leisten sie die **Arbeit**

$$\begin{aligned}\delta A &= \int_{\partial B} \delta u_i f_i do + \int_B \delta u_i F_i d^3x \\ &= \int_B d^3x [\delta E_{ik} \sigma_{ik} + \delta u_i \underbrace{(\sigma_{ik,k} + F_i)}_0] \\ &= \int_B d^3x \sigma_{ik} \delta E_{ik} ,\end{aligned}\tag{2.1}$$

wobei für den ersten Beitrag (1.19) und

$$\begin{aligned}\int_{\partial B} \delta u_i \sigma_{ik} do_k &= \int_B d^3x (\delta u_{i,k} \sigma_{ik} + \delta u_i \sigma_{ik,k}) \\ &= \int_B d^3x \delta E_{ik} \sigma_{ik} + \int_B d^3x \delta u_i \sigma_{ik,k} \quad (\text{da } \sigma_{ik} = \sigma_{ki})\end{aligned}\tag{2.2}$$

benutzt wurde; und (1.18) für den zweiten. Findet die Änderung reversibel statt, so hängen die Spannungen nur vom Zustand (\equiv Verzerrung E und einer weiteren Zustandsgrösse ϑ , z.B. Temperatur T oder Entropie S) ab, d.h. es besteht eine **elastische Zustandsgleichung** $\sigma = \sigma(E, \vartheta)$. Wir nehmen an, der Zusammenhang sei **lokal** und **homogen**, $\sigma_{ij}(x) = \sigma_{ij}(E(x), \vartheta)$. Der Beitrag (2.1) pro Volumeneinheit schreibt sich dann

$$\delta A = \sum_i \sigma_{ii} \delta E_{ii} + 2 \sum_{i < k} \sigma_{ik} \delta E_{ik} = \sum_{i=1}^6 \sigma_i \delta E_i$$

mit der Notation

$$\begin{aligned}E_i &= E_{ii} , & E_{3+i} &= 2E_{i+1i+2} , \\ \sigma_i &= \sigma_{ii} , & \sigma_{3+i} &= \sigma_{i+1i+2} ,\end{aligned}\quad (i = 1, 2, 3)\tag{2.3}$$

(z.B. $E_4 = 2E_{23}$). Die E_i 's sind unabhängig, im Gegensatz zu den E_{ik} , die der Symmetriebedingung unterliegen. Findet die Änderung zudem am adiabatisch abgeschlossenen Volumenelement statt, so ist $dU = \delta A$ die Änderung der inneren Energiedichte U (1. Hauptsatz der Thermodynamik). Es folgt $\sigma_i = (\partial U / \partial E_i)_S$ und damit

$$\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial E_j} \right)_S = \left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial E_i} \right)_S .\tag{2.4}$$

Ist die Änderung hingegen isotherm, so ist $dF = \delta A$ (F : freie Energiedichte). Es folgt $(\partial \sigma_i / \partial E_j)_T = (\partial \sigma_j / \partial E_i)_T$. Diese Maxwell-Relationen kann man etwas abstrakter ohne Verwendung der Notation (2.3) ausdrücken. Ein Skalarprodukt für reelle Matrizen A, B ist

$$(A, B) = A_{ik} B_{ik} = \text{tr}(A^T B) .$$

Insbesondere ist $(A, B) = (B, A)$ und $(A, A) = 0 \Rightarrow A = 0$. Wir verwenden es auf dem Unterraum \mathcal{S} der symmetrischen Tensoren. Aus $\delta A = (\sigma, \delta E)$ folgt $(\sigma(E), E_1) = dW(E + t_1 E_1)/dt_1|_{t_1=0}$ mit $W = U$ oder F . Die Tangentiabbildung $\partial\sigma/\partial E : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial E} E_2 = \frac{d}{dt_2} \sigma(E + t_2 E_2)|_{t_2=0},$$

erfüllt dann

$$\left(\frac{\partial\sigma}{\partial E} E_2, E_1\right) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} W(E + t_1 E_1 + t_2 E_2)|_{t_1=t_2=0}.$$

Sie ist somit symmetrisch bzgl. des Skalarprodukts, denn die rechte Seite ist es unter Vertauschung von E_1, E_2 : $((\partial\sigma/\partial E)E_2, E_1) = (E_2, (\partial\sigma/\partial E)E_1)$.

2. Das Hookesche Gesetz

Die Referenzkonfiguration sei kräftefrei. Die einfachste elastische Zustandsgleichung ist **linear** $L : E \mapsto \sigma$ (als Abbildung im Raum der symmetrischen Tensoren). Einem gedrehten Verschiebungsfeld $Ru(R^{-1}x)$ entspricht die Verzerrung $REER^T$ (nicht zu verwechseln mit einer (kleinen) Drehung des Körpers, die nach S. 3 E unberührt lässt). Ist das Medium **isotrop**, also $L(REER^T) = RL(E)R^T$, so ist die Zustandsgleichung von der Form

$$\sigma = 2\mu E + \lambda(\text{tr } E)1 \quad (2.5)$$

mit **elastischen Konstanten** μ, λ : Lamésche Elastizitätsmodule.

Beweis. Es ist

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \mapsto \sigma = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ & & \beta \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

denn links steht ein Tensor, der unter Drehungen um die 1-Achse invariant ist, und rechts der allgemeinste Tensor mit dieser Eigenschaft. Allgemein muss die Beziehung

$$\sigma = (\alpha - \beta)E + \beta(\text{tr } E)1 \quad (2.7)$$

lauten, denn zunächst gilt sie im Spezialfall (2.6); wegen Isotropie und Linearität gilt (2.7) ebenso für $E = \text{diag}(0, 1, 0)$ und $E = \text{diag}(0, 0, 1)$; für alle diagonalen E , ja für alle $E = E^T$. Gl. (2.5) ist (2.7) bei anderer Parametrisierung der Konstanten. \square

Im linearen Fall ist $L = \partial\sigma/\partial E$ und dies ist bei (2.5) symmetrisch, wie erforderlich: Mit $(1, A) = \text{tr } A$ ist

$$(L\tilde{E}, E) = 2\mu(\tilde{E}, E) + \lambda(\tilde{E}, 1)(1, E) = (\tilde{E}, LE). \quad (2.8)$$

In der Zerlegung (1.6),

$$E = \check{E} + \hat{E}; \quad \check{E} = \varepsilon 1 = \frac{1}{3}(\text{tr } \check{E})1, \quad (1, \hat{E}) = 0$$

sind die beiden Teile orthogonal, $(E, E) = (\check{E}, \check{E}) + (\hat{E}, \hat{E})$, und unabhängig voneinander wählbar. Die Beziehung (2.5) lautet somit auch

$$\sigma = (2\mu + 3\lambda)\check{E} + 2\mu\hat{E}. \quad (2.9)$$

Mit (2.8) folgt $\delta W = (\sigma, \delta E) = \delta(\sigma, E)/2$ und

$$W = \frac{2\mu + 3\lambda}{2}(\check{E}, \check{E}) + \mu(\hat{E}, \hat{E}) . \quad (2.10)$$

Die Energie ist positiv definit (d.h. positiv ausser für $E = 0$), d.h.

$$W > c(E, E) \quad (2.11)$$

mit $c > 0$, genau dann falls

$$\mu > 0 , \quad 2\mu + 3\lambda > 0 . \quad (2.12)$$

Bemerkung. Ein alternativer Beweis von (2.5) setzt etwas Darstellungstheorie voraus: Der Raum $\{E \mid E = E^T\}$ der symmetrischen Tensoren hat Dimension 6. Die Zerlegung $E = \check{E} + \hat{E}$ entspricht zwei unter Drehungen $R \mapsto RER^T$ irreduziblen invarianten Teilräumen $\{\check{E} \mid \check{E} = \varepsilon 1\}$ und $\{\hat{E} \mid \text{tr } \hat{E} = 0\}$ der Dimensionen 1 und 5 (sie tragen die Darstellungen \mathcal{D}_l der $SO(3)$ mit $l = 0, 2$). Nach dem Lemma von Schur lässt L die beiden invariant und wirkt auf jedem als ein Vielfaches der Identität. Also: $L(E) = L(\check{E}) + L(\hat{E}) = \check{\alpha}\check{E} + \hat{\alpha}\hat{E}$, was mit (2.9) übereinstimmt. \square

Mit

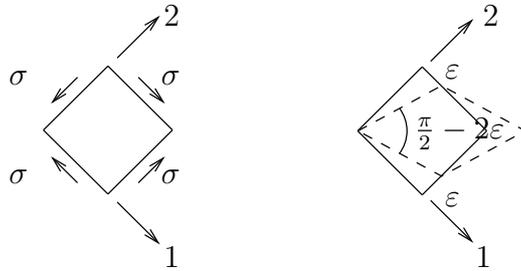
$$\text{tr } \sigma = (2\mu + 3\lambda) \text{tr } E \quad (2.13)$$

kann (2.5) nach E aufgelöst werden:

$$E = \frac{1}{2\mu}\sigma - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)}(\text{tr } \sigma)1 \equiv 2\mu'\sigma + \lambda'(\text{tr } \sigma)1 \quad (2.14)$$

mit μ', λ' : Voigtsche Module. Zur Veranschaulichung der beiden Grössen μ, λ betrachten wir einfache Zustände:

a) **Reiner Schub**, s. (1.20, 1.7):



$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad E_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma = \mu \cdot 2\varepsilon .$$

μ ist das **Schermodul**.

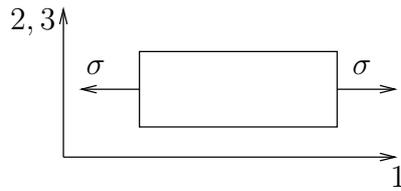
b) **Isotrope Kompression:**

Nach (2.13) ist bei allseitigem Druck dp , d.h. $\sigma_{ik} = -\delta_{ik} \cdot dp$, die relative Volumenänderung

$$\frac{dV}{V} = \text{tr } E = -\frac{3}{2\mu + 3\lambda} \cdot dp \equiv -\kappa dp ,$$

$$\kappa = \frac{3}{2\mu + 3\lambda} \quad \text{Kompressibilität .}$$

c) Axialer Zug



$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dann ist E nach (2.14) diagonal mit Hauptstreckungen

$$\begin{aligned} E_{11} &= (2\mu' + \lambda')\sigma , \\ E_{22} &= E_{33} = \lambda'\sigma . \end{aligned}$$

Andere Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\sigma}{E_{11}} = \frac{1}{2\mu' + \lambda'} = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda} : \text{ Youngsches Modul} \\ \nu &= -\frac{E_{22}}{E_{11}} = -\frac{\lambda'}{2\mu' + \lambda'} = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)} : \text{ Poissonsches Verh\u00e4ltnis der Querkontraktion} \end{aligned}$$

Man kann damit alle Module durch ε, ν ausdr\u00fccken:

$$\begin{aligned} \mu' &= \frac{1 + \nu}{2\varepsilon} , & \lambda' &= -\frac{\nu}{\varepsilon} , \\ \mu &= \frac{\varepsilon}{2(1 + \nu)} , & \lambda &= \frac{\nu\varepsilon}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} , & \kappa^{-1} &= \frac{\varepsilon}{3(1 - 2\nu)} . \end{aligned}$$

Aus (2.12) folgt $\varepsilon, \kappa^{-1} > 0$ und $-1 < \nu \leq 1/2$, was experimentell zutrifft. F\u00fcr die meisten Stoffe ist auch $\lambda > 0$, und damit $\nu > 0$, aber es gibt Ausnahmen.

Alternative Zustandsgleichungen. Die Zustandsgleichung (2.6) kann in verschiedener Weise verallgemeinert werden:

1) Lineare, **nicht isotrope** Zustandsgleichung. Dies ist typisch f\u00fcr **Kristallelastizit\u00e4t**: Invarianz bzgl. der vollen $SO(3)$ wird ersetzt durch die einer diskreten Untergruppe (**Punktgruppe**). In der Notation (2.3) lautet die allgemeinste lineare Beziehung

$$\sigma_i = \sum_{k=1}^6 \Gamma_{ik} E_k , \tag{2.15}$$

wobei $\Gamma_{ik} = \Gamma_{ki}$ wegen (2.4):

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & \Gamma_{14} & \Gamma_{15} & \Gamma_{16} \\ & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & \Gamma_{24} & \Gamma_{25} & \Gamma_{26} \\ & & \Gamma_{33} & \Gamma_{34} & \Gamma_{35} & \Gamma_{36} \\ & & & \Gamma_{44} & \Gamma_{45} & \Gamma_{46} \\ & & & & \Gamma_{55} & \Gamma_{56} \\ & & & & & \Gamma_{66} \end{pmatrix} .$$

Ohne Symmetriegruppe hat der Stoff $6(6 + 1)/2 = 21$ Elastizit\u00e4tskonstanten! (**triklines System**). Unter einer Drehung, $R : x_i \mapsto x'_i = R_{ij}x_j$, transformieren E_{ik}, σ_{ik} wie

$x_i x_k$. Daraus bestimmt man $\hat{R} : (E_1, \dots, E_6) \mapsto (E'_1, \dots, E'_6)$ und $\Gamma' = \hat{R}^{-1} \Gamma \hat{R}$; ist R eine Symmetrie, so gilt $\Gamma' = \Gamma$.

Beispiele: i) Eine **Inversion** $x_i \mapsto -x_i$, also $E_i \mapsto E_i$, $\sigma_i \mapsto \sigma_i$, liefert keine Einschränkung an Γ .

ii) **Monoklines System:** eine 2-zählige Drehachse (bis auf Inversionen)

$$x' = (-x_1, -x_2, x_3), \quad E' = (E_1, E_2, E_3, -E_4, -E_5, E_6).$$

Γ' entsteht aus Γ durch Vorzeichenumkehr der Zeilen und Spalten 4, 5.

$\Gamma' = \Gamma$ bedingt $\Gamma_{14} = \Gamma_{15} = \Gamma_{24} = \Gamma_{25} = \Gamma_{34} = \Gamma_{35} = \Gamma_{46} = \Gamma_{56} = 0$. Also noch **13 Konstanten**.

iii) **Kubisches System:** 4 dreizählige Drehachsen (Raumdiagonalen eines Würfels), nämlich

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1), (x_2, -x_3, -x_1), (-x_2, x_3, -x_1), (-x_2, -x_3, x_1).$$

Damit ist auch $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (-x_1, -x_2, x_3)$ (& zykl.) eine Symmetrie, wie in (ii). Unter $R : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, x_1)$ entsteht Γ' aus Γ durch zyklische Permutation (132), (465). Also ist Γ also von der Form

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & \Gamma_{22} & \Gamma_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & \Gamma_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \Gamma_{44} & 0 & 0 \\ & & & & \Gamma_{55} & 0 \\ & & & & & \Gamma_{66} \end{pmatrix}$$

mit $\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \Gamma_{33}$; $\Gamma_{12} = \Gamma_{13} = \Gamma_{23}$; $\Gamma_{44} = \Gamma_{55} = \Gamma_{66}$. Es verbleiben **3 Konstanten**.

2) **Nicht-lineare**, isotrope Zustandsgleichung: Die Spannung ist eine nicht lineare Funktion des Deformationsgradienten

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \sigma_{ij}(f(x)) = \hat{N}_{ij}(Df(x)),$$

($\hat{N}_{ij} = \hat{N}_{ji}$), die mit Drehungen verträglich ist:

$$\hat{N}(Df(x) \cdot R) = \hat{N}(Df(x)), \quad (2.16)$$

$$\hat{N}(RDf(x)R^T) = R\hat{N}(Df(x))R^T. \quad (2.17)$$

Die erste Gleichung beinhaltet die (triviale) Isotropie des Euklidischen Raums; die zweite die Isotropie des Stoffes. Nach (2.16) und (1.2) hängt \hat{N} nur vom linken Cauchyschen Verzerrungstensor ab:

$$\hat{N}(Df(x)) = N(\underbrace{Df(x)Df(x)^T}_{\equiv C(x)}),$$

wobei, wegen (2.17),

$$N(RCR^T) = RN(C)R^T.$$

Verwendet man eine Basis, bzgl. der C diagonal ist, so ist es auch $N(C)$, denn eine Matrix ist diagonal genau dann, falls sie kommutiert mit der Drehung $R = \text{diag}(1, -1, -1)$ und deren zyklischen Vertauschungen. Generisch sind die Eigenwerte von C verschieden, womit $1, C, C^2$ den 3-dimensionalen Raum der Diagonalmatrizen aufspannen:

$$N(C) = n_0(C)1 + n_1(C)C + n_2(C)C^2$$

mit $n_i(C) \in \mathbb{R}$. Da $1, C, C^2$ linear unabhängig sind, folgt

$$n_i(RCR^T) = n_i(C) ,$$

d.h. die n_i 's sind Invarianten von C : symmetrische Funktionen der Eigenwerte.

3. Das elastische Randwertproblem

(isotropes, lineares, homogenes Medium). Gesucht sind die **Feldgleichungen** für die Verschiebung $u(x)$. Aus

$$E_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}) , \quad \text{tr } E = u_{l,l}$$

und der Zustandsgleichung (2.5) folgt

$$\sigma_{ik} = \mu(u_{i,k} + u_{k,i}) + \lambda u_{l,l} \delta_{ik} ; \quad (2.18)$$

eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingung (1.18):

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma_{ik,k} + F_i \\ &= \mu(u_{i,kk} + u_{k,ki}) + \lambda u_{l,li} + F_i ; \end{aligned}$$

also

$$\mu \Delta \vec{u} + (\mu + \lambda) \text{grad}(\text{div } \vec{u}) + \vec{F} = 0 \quad (2.19)$$

(Navier Gl.). Dabei wurden λ, μ als konstant angenommen (Homogenität). Mit der Identität

$$\text{rot rot } \vec{u} = \text{grad div } \vec{u} - \Delta \vec{u}$$

kann man (2.19) auch schreiben als

$$-\mu \text{rot rot } \vec{u} + (2\mu + \lambda) \text{grad div } \vec{u} + \vec{F} = 0 . \quad (2.20)$$

Randbedingungen

Auf dem Rand, $x \in \partial B$, kann man entweder die Verschiebung $\hat{u}(x)$ oder die von aussen wirkende Kontaktkraft $f(x)$ vorschreiben:

$$\begin{aligned} \partial B &= R_1 \cup R_2 , & R_1 \cap R_2 &= \emptyset \\ x \in R_1 & : & u_i(x) &= \hat{u}_i(x) \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$x \in R_2 : \quad \sigma_{ik}(x)n_k(x) = f_i(x) \quad (2.22)$$

mit n : äussere Normale. (Man könnte allgemeiner die Aufteilung des Randes für verschiedene Richtungen separat ansetzen.) Setzt man in (2.22) den Ausdruck (2.18), so ergibt sich die entsprechende Randbedingung für $u_{i,k}$:

$$\mu(u_{i,k}n_k + u_{k,i}n_k) + \lambda u_{l,l}n_i = f_i , \quad (\text{auf } R_2) .$$

Der Teil von R_1 mit $\hat{u} = 0$ heisst **eingespannt**, jener von R_2 mit $f = 0$ heisst **frei**.

Durch die Feldgleichung (2.19) und die Randbedingungen (2.21, 2.22) ist das **elastische Randwertproblem** gestellt.

Variationsproblem

Mit (u, E, σ) bezeichnen wir eine Verschiebung u und die dazugehörigen Tensoren E, σ , s. (1.5, 2.18). Wir setzen nun (2.12) voraus und führen die Bilinearform zur elastischen Energie (2.10) ein:

Definition. Für zwei beliebige Verschiebungen $(u, E, \sigma), (\tilde{u}, \tilde{E}, \tilde{\sigma})$ sei

$$W[\tilde{u}, u] = \frac{1}{2} \int_B (\tilde{E}, \sigma) d^3x .$$

Lemma.

i) $W[\tilde{u}, u] = W[u, \tilde{u}]$ (Symmetrie)

ii) $W[u, u] \geq 0$, und $= 0$ nur für $u(x) = \omega \wedge x + a$ (infinitesimale starre Verschiebung)

iii)

$$\int_{\partial B} \tilde{u}_i \sigma_{ik} do_k = 2W[\tilde{u}, u] + \int_B \tilde{u}_i \sigma_{ik,k} d^3x . \quad (2.23)$$

Beweis.

i) ist (2.8).

ii) (2.11): $W[u, u] \geq 0$ und $= 0$ nur für $E = 0$. Dies entspricht der Behauptung nach der Bemerkung auf S. 3.

iii) ist (2.2). □

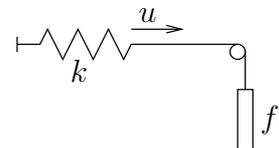
Das elastische Randwertproblem (2.19, 2.21, 2.22) ist äquivalent zu einem **Variationsproblem**: betrachte das Funktional

$$F[u] = W[u, u] - L[u] , \quad (2.24)$$

$$L[u] = \int_{R_2} u_i f_i do + \int_B u_i F_i d^3x .$$

Es die Summe der elastischen Energie W und der potentiellen Energie $-L$ der fest vorgegebenen äusseren Kräfte: Oberflächen-, f , bzw. Volumenkräften F . Die **gesamte Energie** ist also $F[u]$.

Analogie: In der Figur ist $F(u) = ku^2/2 - fu$; das Minimum $u = f/k$ beschreibt das Gleichgewicht.



Satz. Die Verschiebung u löst das Randwertproblem genau dann, falls u das Funktional $F[\tilde{u}]$ minimiert bzgl. allen Verschiebungen \tilde{u} mit festem \hat{u} auf R_1 .

Beweis. Für jede (endliche) Variation $\delta u(x)$ mit $\delta u = 0$ auf R_1 gilt

$$\begin{aligned} F[u + \delta u] - F[u] &= W[\delta u, \delta u] + 2W[\delta u, u] - L[\delta u] \\ &= \underbrace{W[\delta u, \delta u]}_{\geq 0} - \int_{R_2} \delta u_i (f_i - \sigma_{ik} n_k) do - \int_B \delta u_i (\sigma_{ik,k} + F_i) d^3x \quad (2.25) \end{aligned}$$

unter Verwendung von (2.23) und von $\int_{\partial B} \delta u_i \sigma_{ik} do_k = \int_{R_2} \delta u_i \sigma_{ik} n_k do$. Also:

$$u \text{ ist Lösung} \implies F[u + \delta u] - F[u] \geq 0 ;$$

und umgekehrt: es gilt dann

$$0 = \frac{d}{d\lambda} (F[u + \lambda \delta u] - F[u]) \Big|_{\lambda=0} = - \int_{R_2} \delta u_i (f_i - \sigma_{ik} n_k) do - \int_B \delta u_i (\sigma_{ik,k} + F_k) d^3x$$

für alle $\delta u : \sigma_{ik,k} + F_k \equiv 0$ in B , $\sigma_{ik} n_k = f_i$ auf R_2 . □

Ausser in Ausnahmefällen ist die Lösung des Randwertproblems **eindeutig**: Sind u und $u + \delta u$ Lösungen, so folgt $F[u + \delta u] = F[u]$, also nach (2.25) $W[\delta u, \delta u] = 0$, und damit $\delta u = \omega \wedge x + a$. Wegen der Bedingung $\delta u = 0$ auf R_1 , ist dies nur für $\delta u \equiv 0$ in B möglich, zumindest wenn R_1 positives Mass hat.

Die **Existenz** der Lösung, deren Beweis wir unten bloss skizzieren, beruht darauf, dass (2.24, 2.21) einen Minimierer besitzt. Das Variationsprinzip ist auch zur **numerischen** Berechnung approximativer Lösungen dienlich, s. S. 33.

Wir benötigen das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_H = \int_B d^3x (u(x) \cdot v(x) + (Du(x), Dv(x)))$$

und der entsprechende reelle Hilbert-Raum (Sobolev-Raum) $H = H(B, \mathbb{R}^3) = \{u = (u_1, u_2, u_3) \mid \|u\|_H^2 := \langle u, u \rangle_H < \infty\}$. Wichtig sind

- i) Bei vernünftigem Rand ∂B gilt $\int_{\partial B} do u(x)^2 \leq C \|u\|_H^2$ für eine Konstante C .
- ii) (Satz von Rellich) Jede Folge $u_n \in H$ mit $\|u_n\|_H$ beschränkt enthält eine konvergente Teilfolge in der Norm des Skalarprodukts $\langle u, v \rangle = \int_B d^3x u(x) \cdot v(x)$ (der entsprechende Hilbert-Raum ist $L^2 = L^2(B, \mathbb{R}^3)$).
- iii) Es gilt die Kornsche Ungleichung

$$\|u\|_H^2 \leq C (\|E\|^2 + \|u\|^2), \quad (u \in H),$$

wobei $\|E\|^2 = \langle E, E \rangle = \int_B d^3x (E(x), E(x))$.

Wir behandeln bloss den Fall, wo R_1 positives Mass hat und $\hat{u} = 0$ auf R_1 . Dann ist das Variationsproblem auf dem linearen Raum

$$V = \{u \in H \mid u = 0 \text{ auf } R_1\}$$

formuliert. Behauptung:

$$W[u, u] \geq c \langle u, u \rangle_H, \quad (u \in V) \tag{2.26}$$

für ein $c > 0$. Insbesondere ist $W[u, v]$ ein Skalarprodukt auf V .

Wegen (i) ist bei quadratintegrierbaren äusseren Kräften $|L[u]| \leq C \|u\|_H \leq C' W[u, u]^{1/2}$; mit dem Satz von Riesz folgt $L[u] = 2W[\tilde{f}, u]$ für ein $\tilde{f} \in V$. Quadratische Ergänzung zeigt, dass $u = \tilde{f}$ das Funktional $F[u] = W[u, u] - 2W[\tilde{f}, u]$ minimiert.

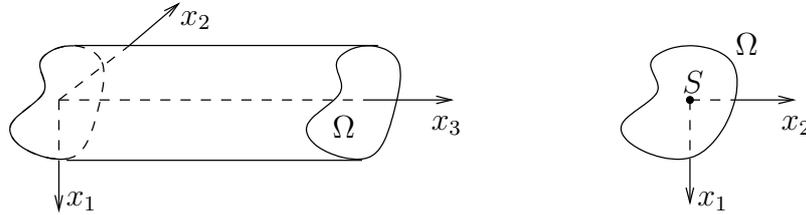
Es bleibt (2.26) zu zeigen. Gäbe es keine Konstante c wie behauptet, so gäbe es eine Folge $u_n \in V$ mit (a) $\langle u_n, u_n \rangle_H = 1$, und (b) $W[u_n, u_n] \rightarrow 0$. Nach (ii) können wir (a) annehmen $u_n \rightarrow u_*$ in L^2 . Insbesondere ist u_n eine Cauchy-Folge, und (b) so ist E_n , da $\|E_n\|^2 \rightarrow 0$ nach (2.11). Nach (iii) ist u_n auch eine in H , sodass die Konvergenz $u_n \rightarrow u_*$ in H gilt. Es folgt $E_* = 0$, womit u_* eine infinitesimale starre Verschiebung ist, was wegen der Randbedingung nur $u_* = 0$ zulässt. Dies aber steht im Widerspruch zu $\|u_*\|_H = 1$. □

Im Fall $R_1 = \emptyset$ ist für die Existenz notwendig, dass die äusseren Kräfte und Drehmomente insgesamt verschwinden, vgl. (1.15, 1.16):

$$\int_B F_i d^3x + \int_{\partial B} f_i do = 0 ,$$
$$\int_B (x \wedge F)_i d^3x + \int_{\partial B} (x \wedge f)_i do = 0 .$$

3. Beispiele zur Elastostatik

1. Biegung von Balken

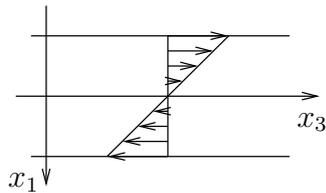


Homogener Zylinder mit beliebigem Querschnitt Ω und freier Mantelfläche. Die 1, 2-Achsen seien Hauptachsen des Flächenträgheitstensors von Ω durch den ‘‘Schwerpunkt’’ S von Ω , d.h.

$$0 = \int_{\Omega} do x_1 = \int_{\Omega} do x_2 = \int_{\Omega} do x_1 x_2 . \quad (3.1)$$

Biegung bedeutet: Die Summe \vec{F} der Kräfte auf die Stirnflächen hat $F_3 = 0$ und ebenso das Drehmoment \vec{M} bzgl. S , $M_3 = 0$ (**Biegemoment**). Dank Superposition reicht der Fall, wo nur \vec{F} oder \vec{M} herrscht und parallel zu einer Hauptachse ist.

a) **Reine Biegung:** $\vec{F} = 0$, keine Volumenkräfte. Im obigen Koordinatensystem betrachten wir den Spannungszustand



$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha x_1 \end{pmatrix} . \quad (3.2)$$

Es ist $\sigma_{ik,k} = 0$ im Innern und $\sigma_{ik}n_k = 0$ auf dem Mantel. Die Wahl (3.1) des Koordinatensystems und (3.2) des Spannungszustandes bewirkt, dass auf die Stirnfläche Ω keine resultierende Kraft wirkt,

$$\vec{F} = \int do (0, 0, -\alpha x_1) = 0 ,$$

sondern nur ein Drehmoment in 2-Richtung

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int do \vec{x} \wedge (0, 0, -\alpha x_1) = \int do (-\alpha x_1 x_2, \alpha x_1^2, 0) \\ &= (0, \alpha I \equiv M, 0) . \end{aligned}$$

$I = \int do x_1^2$ ist das ‘‘Flächenträgheitsmoment’’ von Ω bzgl. der 2-Achse.

Verzerrungstensor. Nach (2.14) ist E_{ik} diagonal mit

$$E_{11} = E_{22} = -\lambda' \alpha x_1 = \frac{\nu M}{\varepsilon I} x_1 , \quad E_{33} = -(2\mu' + \lambda') \alpha x_1 = -\frac{M}{\varepsilon I} x_1$$

wegen $2\mu' + \lambda' = \varepsilon^{-1}$, $\lambda' = -\nu \varepsilon^{-1}$.

Verschiebung. u_i ist als Lösung von $(u_{i,k} + u_{k,i})/2 = E_{ik}$ bestimmt:

$$u_{1,1} = u_{2,2} = \frac{\nu M}{\varepsilon I} x_1, \quad u_{3,3} = -\frac{M}{\varepsilon I} x_1,$$

$$u_{1,2} + u_{2,1} = u_{1,3} + u_{3,1} = u_{2,3} + u_{3,2} = 0.$$

Eine spezielle Lösung ist

$$u_1 = \frac{\nu M}{2\varepsilon I} (x_1^2 - x_2^2) + \frac{M}{2\varepsilon I} x_3^2, \quad u_2 = \frac{\nu M}{\varepsilon I} x_1 x_2, \quad u_3 = -\frac{M}{\varepsilon I} x_1 x_3,$$

und die allgemeine Lösung ergibt sich durch Addition einer beliebigen, infinitesimalen starren Verschiebung $\vec{u} = \vec{\omega} \wedge \vec{x} + \vec{a}$, vgl. Bemerkung auf S. 3.

Eigenschaften der Lösung

i) Die Verschiebung der Schwerpunktslinie $S : (x_1 = 0, x_2 = 0, x_3)$ beträgt $\vec{u} = (\frac{M}{2\varepsilon I} x_3^2, 0, 0)$; ihre **Krümmung** ist

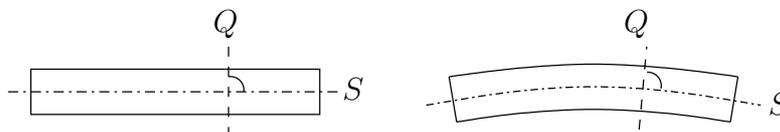
$$\frac{d^2 u_1}{dx_3^2} = \frac{M}{\varepsilon I} \quad (3.3)$$

und ist damit **proportional zum Drehmoment**.

ii) Die **neutrale Ebene** $(x_1 = 0, x_2, x_3)$ wird **nicht verzerrt**:

$$E_{22} = E_{23} = E_{33} = 0.$$

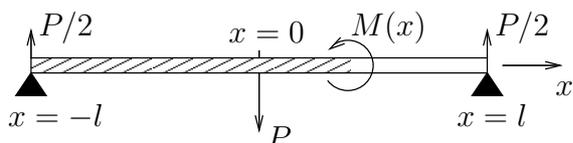
iii) Der **Querschnitt** $Q : (x_1, x_2, x_3 = l)$ steht vor und nach der Deformation **senkrecht** auf den Fasern $x_1, x_2 = \text{const}$, denn E ist überall diagonal, d.h. 1,2,3 sind Hauptstreckungsrichtungen. Zudem bleibt er **eben**, denn sein Krümmungstensor verschwindet: $(u_{3,ij})_{i,j=1,2} = 0$.



Approximative Methode

Die Gleichung (3.3) wurde anhand des translationsinvarianten (bzgl. x_3) Spannungszustandes (3.2) hergeleitet; sie gilt aber (exakt oder annähernd) auch in Fällen mit $\vec{F} \neq 0$ und mit Volumenkräften und liefert die Grundlage einer approximativen Behandlung der Balkenbiegung nach Bernoulli und Euler: Die Verschiebung $u = u_1$ der Schwerpunktslinie erfüllt (3.3) mit dem Drehmoment $(0, M = M(x), 0)$ der Kräfte auf den Querschnitt $x_3 = x$ und bezogen auf dessen Schwerpunkt. Im Folgenden einige Beispiele:

b) **Balken** aufgelegt bei $x = \pm l$, Last bei $x = 0$.



$$M(x) = -\frac{P}{2}(l - x), \quad (x > 0).$$

Für die (kleine) Auslenkung $u(x)$ der Schwerpunktslinie in Richtung von P gilt die Differentialgleichung

$$u''(x) = \frac{M(x)}{\varepsilon I} = -\frac{P}{2\varepsilon I}(l - x), \quad (x > 0)$$

mit den Randbedingungen $u(l) = 0$, $u'(0) = 0$. Lösung

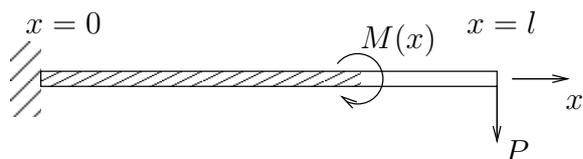
$$u'(x) = -\frac{P}{2\varepsilon I} \left(-\frac{1}{2}(l-x)^2 + \frac{1}{2}l^2 \right), \quad (u'(0) = 0)$$

$$u(x) = -\frac{P}{2\varepsilon I} \left(\frac{1}{6}(l-x)^3 - \frac{1}{2}l^2(l-x) \right), \quad (u(l) = 0)$$

Insbesondere beträgt die Durchbiegung

$$u(0) = \frac{Pl^3}{6\varepsilon I}.$$

c) **Balken** eingespannt bei $x = 0$; Last bei $x = l$.



$$M(x) = P(l-x)$$

Auslenkung der Schwerpunktslinie in Richtung von P :

$$u''(x) = \frac{M(x)}{\varepsilon I} = \frac{P}{\varepsilon I}(l-x)$$

mit Randbedingung $u(0) = 0$ und $u'(0) = 0$, vgl. (iii).

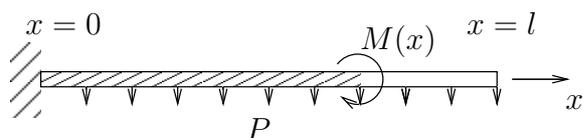
$$u'(x) = \frac{P}{\varepsilon I} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right),$$

$$u(x) = \frac{P}{\varepsilon I} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Speziell

$$u(l) = \frac{Pl^3}{3\varepsilon I}.$$

d) **Balken** eingespannt bei $x = 0$; Eigengewicht.



$$M(x) = \frac{P}{l}(l-x) \cdot \frac{l-x}{2}.$$

Die Auslenkung $u(x)$ erfüllt

$$u''(x) = \frac{M(x)}{\varepsilon I} = \frac{P}{2\varepsilon Il}(x^2 - 2lx + l^2) \quad (3.4)$$

mit $u(0) = u'(0) = 0$:

$$u(x) = \frac{P}{2\varepsilon Il} \left(\frac{1}{12}x^4 - \frac{l}{3}x^3 + l^2\frac{x^2}{2} \right).$$

Speziell

$$u(l) = \frac{Pl^3}{8\varepsilon I}.$$

Bemerkungen. 1) Im Unterschied zu (a) wirken bei (b-d) Schubspannungen σ_{i3} ($i \neq 3$) auf die Querschnitte. In den Fällen (b, c) ist $M = M(x_3)$ linear inhomogen und σ_{i3} unabhängig von x_3 . Die exakte Lösung kann dann anhand folgender Verallgemeinerung des Ansatzes (3.2)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & -(M/I)x_1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

gefunden werden, und zwar über ein Randwertproblem für $\sigma_{i3}(x_1, x_3)$ auf Ω . Die Eigenschaft (i) gilt nach wie vor, denn mit $E_{13,3} = 0$ folgt $u_{1,33} = -u_{3,13} = -E_{33,1} = -\varepsilon^{-1}\sigma_{33,1} = (\varepsilon I)^{-1}M$; ebenso (ii), aber nicht (iii).

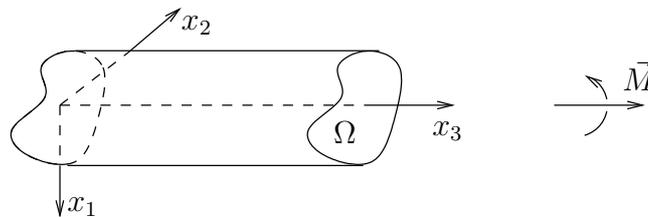
2) Im Fall (d) gelten (i-iii) nicht. Die exakte Lösung für einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius a liefert für die Krümmung bei $x = 0$

$$u''(0) = \frac{Pl}{2\varepsilon I} \left(1 - \frac{7 + 12\nu + 4\nu^2 a^2}{6(1 + \nu) l^2} \right),$$

was für $l \gg a$ (dünne Balken) mit (3.4) übereinstimmt.

3) In konkreten Situationen ist die Verteilung der äusseren Kräfte auf der Stirnfläche (mit resultierenden Kraft \vec{F} und Drehmoment \vec{M}) nicht wie die der Lösungen (3.2) oder (3.5). Abgesehen von der unmittelbaren Umgebung der Stirnfläche ist die Lösung trotzdem brauchbar. Auf die Differenz zweier Verteilungen kann das **Prinzip von de Saint-Venant** angewendet werden: Eine auf einen Teil Σ des Randes ∂B angelegte Kräfteverteilung mit $\vec{F} = 0$, $\vec{M} = 0$ erzeugt Spannungen, die nur in der Umgebung von Σ merklich von Null verschieden sind.

2. Torsion von Balken



Stirnfläche: Kraft $\vec{F} = 0$, Drehmoment $\vec{M} = (0, 0, M)$; freie Mantelfläche.

a) **Kreisförmiger Querschnitt** (Radius a)

Wir betrachten die Deformation

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos \alpha x_3 & -\sin \alpha x_3 & 0 \\ \sin \alpha x_3 & \cos \alpha x_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(α : Drehwinkel pro Längeneinheit) bzw. die (kleine) Verschiebung/Verzerrung

$$u = \alpha \begin{pmatrix} -x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x_2 \\ 0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Wegen $\text{tr } E = 0$ ist $\sigma = 2\mu E$ und es gilt $\sigma_{ik,k} = 0$, also $F_i = 0$ (Volumenkräfte). Die Normale der Mantelfläche ist $\vec{n} = a^{-1}(x_1, x_2, 0)$, also $\sigma_{ik}n_k = 0$; auf der Stirnfläche gilt

$$\begin{aligned} F_i &= \int_{\Omega} do \sigma_{i3} = 0, \\ \vec{M} &= \mu\alpha \int_{\Omega} do \vec{x} \wedge (-x_2, x_1, 0) = \mu\alpha \int do (-x_1x_3, -x_2x_3, x_1^2 + x_2^2) \\ &= (0, 0, M = \mu\alpha I). \end{aligned}$$

$I = \int do(x^2 + y^2) = \frac{\pi}{2}a^4$ ist das Trägheitsmoment von Ω bzgl. der 3-Achse.

b) Beliebiger Querschnitt

Der Ansatz (3.6) liefert i.A. keine freie Mantelfläche; Verallgemeinerung (de Saint-Venant):

$$u = \alpha \begin{pmatrix} -x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ \varphi(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad E = \frac{\alpha}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_{,1} - x_2 \\ 0 & 0 & \varphi_{,2} + x_1 \\ \varphi_{,1} - x_2 & \varphi_{,2} + x_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

wobei φ die **Verwölbung** der Querschnitte beschreibt. Wiederum ist $\sigma = 2\mu E$. Gleichgewicht, $\sigma_{ik,k} = 0$, bedeutet

$$\Delta\varphi = 0. \quad (3.8)$$

Die spannungsfreie Mantelfläche (Normale: $\vec{n} = (n_1, n_2, 0) \equiv (\underline{n}, 0)$) verlangt

$$(\varphi_{,1} - x_2)n_1 + (\varphi_{,2} + x_1)n_2 = 0,$$

d.h.

$$\underline{\nabla}\varphi \cdot \underline{n} = (x_2, -x_1) \cdot \underline{n} \quad (3.9)$$

auf $\partial\Omega$ (Neumann Randbedingung). Als Folge davon gilt für jede Funktion f auf Ω

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f_{,1}(\varphi_{,1} - x_2) + f_{,2}(\varphi_{,2} + x_1)) d^2x &= \int_{\Omega} (\partial_1(f(\varphi_{,1} - x_2)) + \partial_2(f(\varphi_{,2} + x_1))) d^2x \\ &= \int_{\partial\Omega} f(\underline{\nabla}\varphi - (x_2, -x_1)) \cdot d\underline{o} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Bemerkung. Nicht jede Vorgabe \hat{g} der Neumann Randbedingung ist zulässig: Aus

$$\underline{\nabla}\varphi \cdot \underline{n} = \hat{g}$$

folgt als notwendige Bedingung an \hat{g}

$$\int_{\partial\Omega} \hat{g} do = \int_{\partial\Omega} \underline{\nabla}\varphi \cdot d\underline{o} = \int_{\Omega} \Delta\varphi d^2x = 0.$$

Bei (3.9) ist sie erfüllt:

$$\int_{\partial\Omega} \hat{g} do = \int_{\partial\Omega} (x_2, -x_1) \cdot d\underline{o} = \int_{\Omega} \text{div}(x_2, -x_1) d^2x = 0.$$

Stirnflächen:

$$F_1 = \int_{\Omega} \sigma_{13} d^2x = \mu\alpha \int_{\Omega} (\varphi_{,1} - x_2) d^2x = 0$$

wegen (3.10) mit $f = x_1$. Analog $F_2 = 0$, ferner $F_3 = \int_{\Omega} \sigma_{33} d^2x = 0$, sowie

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_{\Omega} (-x_3 \sigma_{23}) d^2x = -x_3 F_2 = 0, & M_2 &= 0, \\ M_3 &= \int_{\Omega} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{13}) d^2x = \mu \alpha \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \varphi_{,2} - x_2 \varphi_{,1}) d^2x \\ &= \int_{\Omega} (\underline{x}^2 - (\underline{\nabla} \varphi)^2) d^2x, \end{aligned} \quad (3.11)$$

d.h. alle Randbedingungen sind erfüllt. Die letzte Form folgt durch Subtraktion von (3.10) mit $f = \varphi$.

Das Problem ist somit auf die Lösung von (3.8, 3.9) zurückgeführt. Ein dazu äquivalentes Randwertproblem ergibt sich durch Einführung der zu $\varphi(x_1, x_2)$ **konjugierten harmonischen** Funktion $\psi(x_1, x_2)$:

$$\varphi_{,1} = \psi_{,2}, \quad \varphi_{,2} = -\psi_{,1} \quad (\text{Cauchy-Riemann})$$

(d.h. $\varphi + i\psi$ ist analytisch). Es folgt

$$\Delta \psi = 0.$$

Wegen $\underline{v} \cdot d\underline{o} = \underline{v}^{\perp} \cdot d\underline{s}$, $\underline{v}^{\perp} = (-v_2, v_1)$ und $\underline{\nabla} \varphi^{\perp} = \underline{\nabla} \psi$ lautet nun die Randbedingung

$$\underline{\nabla} \psi \cdot d\underline{s} = (x_1, x_2) \cdot d\underline{s},$$

und damit

$$\psi = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + C \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.12)$$

c) **Elliptischer Querschnitt** (Halbachsen a, b)

$$\partial\Omega : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Der Ansatz

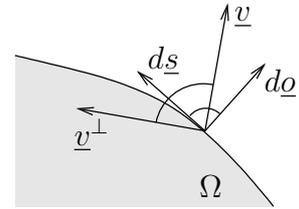
$$\psi(x_1, x_2) = A \cdot (x_1^2 - x_2^2)$$

ist harmonisch ($\Delta \psi = 0$) mit

$$\begin{aligned} \varphi_{,1} &= -2Ax_2, & \varphi_{,2} &= -2Ax_1, \\ \varphi(x_1, x_2) &= -2Ax_1x_2. \end{aligned}$$

Auf $\partial\Omega$ soll (3.12) gelten, also

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{1}{2}\right)x_1^2 &= \left(A + \frac{1}{2}\right)x_2^2 + C \\ &= \left(A + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)b^2 + C \\ &= -\left(A + \frac{1}{2}\right)\frac{b^2}{a^2}x_1^2 + \left(A + \frac{1}{2}\right)b^2 + C \end{aligned}$$



d.h.

$$\begin{aligned} \left(A - \frac{1}{2}\right)a^2 &= -\left(A + \frac{1}{2}\right)b^2, \\ A &= \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Es folgt, s. (3.7),

$$u = \alpha \begin{pmatrix} -x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

und, s. (3.11),

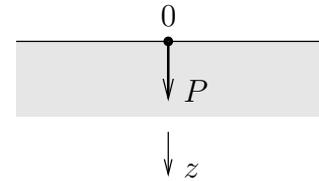
$$\begin{aligned} M_3 &= \mu\alpha \int_{\Omega} \left(x_1^2 + x_2^2 + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}(-x_1^2 + x_2^2)\right) d^2x \\ &= \frac{2\mu\alpha}{a^2 + b^2} \int_{\Omega} (b^2 x_1^2 + a^2 x_2^2) d^2x = \mu\alpha \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Beachte, dass im Unterschied zum kreisförmigen Querschnitt, der Faktor $\pi a^3 b^3 / (a^2 + b^2)$ verschieden vom Trägheitsmoment bzgl. der 3-Achse ist:

$$I = \int_{\Omega} (x_1^2 + x_2^2) dx = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2).$$

3. Belastung durch eine Einzelkraft

(Problem von Boussinesq) Kraft wirkt in 0 senkrecht auf einen elastischen Halbraum $z \geq 0$. Zylinderkoordinaten (r, φ, z) . Das **Verschiebungsfeld** ist rotationssymmetrisch um die z -Achse (also unabhängig von φ) und symmetrisch bzgl. Spiegelung an einer Ebene, die die z -Achse enthält ($u_{\varphi} \equiv 0$):



$$\vec{u} = (u_r(r, z), 0, u_z(r, z)).$$

Nach (1.14) ist der Verzerrungstensor

$$\begin{aligned} E_{rr} &= u_{r,r}, & E_{r\varphi} &= 0, \\ E_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} u_r, & E_{rz} &= \frac{1}{2} (u_{r,z} + u_{z,r}), \\ E_{zz} &= u_{z,z}, & E_{\varphi z} &= 0 \end{aligned}$$

mit der Spur

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + u_{z,z} =: \theta(r, z). \quad (3.13)$$

Spannungstensor

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2\mu u_{r,r} + \lambda\theta, & \sigma_{r\varphi} &= 0, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= 2\mu \frac{1}{r} u_r + \lambda\theta, & \sigma_{rz} &= \mu (u_{r,z} + u_{z,r}), \\ \sigma_{zz} &= 2\mu u_{z,z} + \lambda\theta, & \sigma_{\varphi z} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Randbedingungen

$$z = 0, r > 0 : \quad \sigma_{rz} = \sigma_{\varphi z} = \sigma_{zz} = 0 \text{ (freie Oberfläche)} \quad (3.15)$$

$$z > 0 : \quad 2\pi \int_0^\infty dr r \sigma_{zz}(r, z) = -P \quad (3.16)$$

$$r^2 + z^2 \rightarrow \infty : \quad u, E, \sigma \rightarrow 0 .$$

Feldgleichungen

Aus den Feldgleichungen (2.19) folgt $\mu\Delta\theta + (\mu + \lambda)\Delta\theta = 0$, d.h.

$$\Delta\theta = 0 . \quad (3.17)$$

Von den Feldgleichungen selbst ist die für $u_z = \vec{e}_z \cdot \vec{u}$ am einfachsten, da \vec{e}_z konstant ist:

$$\Delta u_z = \vec{e}_z \cdot \Delta \vec{u} = -\frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial z} . \quad (3.18)$$

Vorgehen: Bestimme sukzessive θ , u_z , u_r aus (3.17, 3.18, 3.13). Der Ansatz

$$\theta = \alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{s} = -\alpha \frac{z}{s^3}, \quad (s = |\vec{x}| = \sqrt{r^2 + z^2})$$

erfüllt (3.17), da $\Delta \frac{\partial}{\partial z} s^{-1} = \frac{\partial}{\partial z} \Delta s^{-1} = 0$, ($s \neq 0$), z.B. weil in sphärischen Polarkoordinaten für $v = v(s)$ gilt

$$\Delta v = \frac{1}{s} \frac{d^2}{ds^2} s v .$$

Damit lautet (3.18)

$$\Delta u_z = -\alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{1}{s} . \quad (3.19)$$

oder hinreichend dafür

$$u_z = -\alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad \text{mit} \quad \Delta v = \frac{1}{s} .$$

Spezielle Lösung: $v = \frac{1}{2}s$, also

$$u_z = -\alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \left(\frac{1}{s} - \frac{z^2}{s^3} \right) .$$

Zu dieser speziellen Lösung von (3.19) können wir eine beliebige (sogar bei $s = 0$ singuläre) harmonische Funktion der richtigen Symmetrie addieren. Wir wählen

$$u_z = \frac{\gamma}{s} + \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \frac{z^2}{s^3}$$

mit unbestimmtem γ . Dann ist in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -\left(\gamma - \alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \right) \frac{z}{s^3} - \alpha \frac{\mu + \lambda}{\mu} \cdot \frac{3z^3}{2s^5} .$$

So wird schliesslich (3.13) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung für u_r :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) &= r\left(\theta - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \\ &= -\left(\gamma - \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu}\right)z \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{s} - \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} z^3 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{s^3}\end{aligned}$$

mit der Lösung

$$ru_r = -\left(\gamma - \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu}\right) \frac{z}{s} - \alpha \cdot \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \frac{z^3}{s^3} + \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ die Integrationskonstante bei festem z ist. Sie ist bestimmt durch $(ru_r)|_{r=0} = 0$ (für $z > 0$); da dort $z = s$, also durch

$$\varphi(z) = \gamma - \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu} + \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} = \gamma - \alpha \frac{3\mu + \lambda}{2\mu},$$

was unabhängig von z ist. Wegen $(z/s) - 1 = O(r^2)$ und $(z/s) - 1 = O(r^2)$ ist dann sogar $u_r = O(r)$ für $r \rightarrow 0$. Resultat:

$$u_r = \left(\gamma - \alpha \frac{3\mu + \lambda}{2\mu}\right) \frac{1}{r} - \left(\gamma - \alpha \frac{2\mu + \lambda}{\mu}\right) \frac{z}{rs} - \alpha \frac{\mu + \lambda}{2\mu} \frac{z^3}{rs^3}.$$

Die Randbedingungen (3.15, 3.16) lassen sich nun durch die Wahl von α, γ erfüllen:

Am Rand $z = 0, r > 0$ ist $\theta = 0$ und $u_{z,z} = 0$, da $\partial s / \partial z = z/s = 0$. Aus (3.14) folgt $\sigma_{zz} = 0, \sigma_{\varphi z} = 0$. Die Bedingung $\sigma_{rz} = 0$ führt zur Bestimmung von γ :

$$0 = u_{r,z} + u_{z,r} = -\left(\gamma - \frac{\alpha(2\mu + \lambda)}{\mu}\right) \frac{1}{rs} - \gamma \frac{r}{s^3}$$

liefert für $z = 0$ (dort ist $r = s$)

$$\gamma = \alpha \frac{2\mu + \lambda}{2\mu}.$$

Damit wird

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{\alpha}{2s} \left(\frac{2\mu + \lambda}{\mu} + \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{z^2}{s^2} \right), \\ u_r &= -\frac{\alpha}{2r} \left(1 - \frac{2\mu + \lambda}{\mu} \frac{z}{s} + \frac{\mu + \lambda}{\mu} \frac{z^3}{s^3} \right).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Zur Bestimmung von α aus (3.16) berechnet man zunächst σ_{zz} für $z > 0$:

$$\sigma_{zz} = 2\mu u_{z,z} + \lambda \theta = -3\alpha(\mu + \lambda) \frac{z^3}{s^5},$$

also

$$P = 6\pi\alpha(\mu + \lambda) \int_0^\infty dr r \underbrace{\frac{z^3}{(z^2 + r^2)^{5/2}}},\tag{3.21}$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^\infty du u^{-5/2} = \frac{1}{3} \text{ unabhängig von } z$$

$$\alpha = \frac{P}{2\pi(\mu + \lambda)}.\tag{3.22}$$

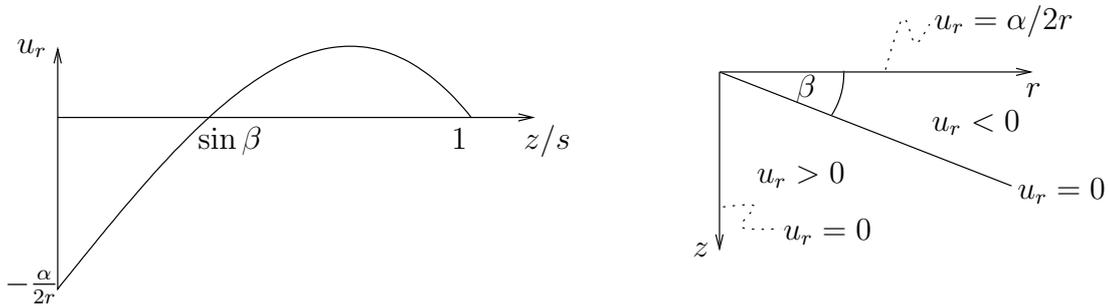
Gl. (3.20) und (3.22) stellen die Lösung des Randwertproblems dar.

Diskussion ($P > 0$, d.h. $\alpha > 0$)

Die Verschiebung u divergiert für $s \rightarrow 0$, und zwar $Du = \alpha O(s^{-2})$: die Voraussetzungen der linearen Theorie, nämlich kleine Verzerrungen $u_{i,j} \ll 1$ (s. S. 3), ist in Abständen $\lesssim \alpha^{1/2}$ vom Auflagepunkt der Kraft nicht erfüllt.

Überall ist $u_z > 0$ und $\sigma_{zz} < 0$. Für $z = 0$ ist $u_r < 0$; im Innern ($z > 0$) hängt das Vorzeichen von u_r vom Wert von z/s ab: An der Oberfläche ziehen sich die Ringe $r = \text{const}$ zusammen, in der Tiefe dehnen sie sich aus. Der neutrale Winkel β ist bestimmt durch

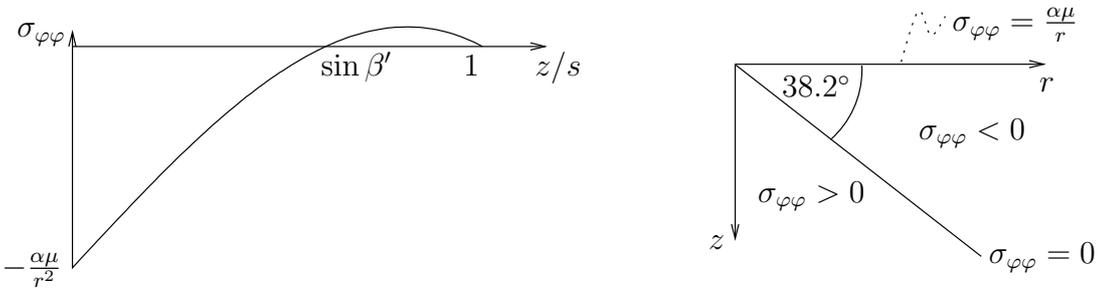
$$\sin \beta = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\mu}{\mu + \lambda}}.$$



Für die Ringspannung $\sigma_{\varphi\varphi}$ (Hauptspannung senkrecht zu den Meridian-Ebenen $\varphi = \text{const}$) findet man aus (3.14):

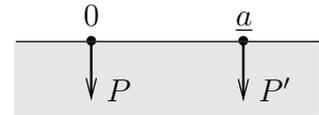
$$\sigma_{\varphi\varphi} = -\frac{\alpha\mu}{r^2} \left(1 - 2\frac{z}{s} + \frac{z^3}{s^3} \right).$$

Der neutrale Winkel ist hier durch $\sin \beta' = (\sqrt{5} - 1)/2$ gegeben.



Ersetzt man die Einzelkraft P durch eine beliebige Verteilung von Normalkräften auf dem Rand, so kann man die entsprechende Lösung durch Superposition finden.

Anwendung. Zwei Gewichte im Abstand a . Wie hängt die gesamte Energie (elastische Energie des Halbraums und potentielle Energie der Gewichte) vom Abstand ab?



Lösung der Feldgleichungen: $u_0 + u_a$, wo u_a die um $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ translatierte Lösung (3.20) ist. Die gesamte Energie ist

$$\begin{aligned} F_{0a}[u_0 + u_a] &= W[u_0 + u_a, u_0 + u_a] - L_0[u_0 + u_a] - L_a[u_0 + u_a] \\ &= F_0[u_0] + F_a[u_a] + \underbrace{2W[u_0, u_a] - L_0[u_a] - L_a[u_0]}_{=0}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei der unterklammerte Term verschwindet, da u_0 Minimierer von F_0 ist, s. (2.25). Sie unterscheidet sich von der Summe der Energien der separaten Belastungen $F_0[u_0] + F_a[u_a]$ um

$$\begin{aligned}\Delta F(\underline{a}) &= -L_a[u_0] = -P' u_z(\underline{a}) \\ &= -\frac{PP'}{4\pi} \frac{2\mu + \lambda}{\mu(\mu + \lambda)} \cdot \frac{1}{a}\end{aligned}$$

(für $f_a = P'\delta^{(2)}(\underline{x} - \underline{a})\vec{e}_z$): **effektive Anziehung!**

4. Elastische Randwertprobleme mit Translationssymmetrie

Gebiet $B = D \times \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \in D \subset \mathbb{R}^2$, $\partial D = R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ mit Randbedingung $\hat{f}_3 \equiv 0$ auf ∂D und Vorgabe von

$$\begin{cases} \hat{u}_1, \hat{u}_2 & \text{auf } R_1, \\ \hat{f}_1, \hat{f}_2 & \text{auf } R_2, \end{cases} \quad (3.24)$$

und Volumenkräfte mit Dichte

$$\vec{F} = (F_1, F_2, 0) = \vec{F}(x_1, x_2).$$

Gesucht: Verschiebung $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ mit x_3 -unabhängige 1, 2-Komponenten

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad (3.25)$$

die

$$\sigma_{ik,k} + F_i = 0, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.26)$$

$$\sigma = 2\mu E + \lambda(\text{tr } E)1 \quad (3.27)$$

löst. Dies liefert ein 2-dimensionales Randwertproblem bei einer der folgenden Zusatzbedingungen.

i) **Ebener Verschiebungszustand:** $u_3 \equiv 0$

Dann ist

$$E = \left(\begin{array}{cc|c} \underline{E} & & 0 \\ & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \sigma = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\sigma} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline & \sigma_{33} \end{array} \right)$$

mit

$$\underline{\sigma} = 2\mu \underline{E} + \lambda(\text{tr } \underline{E})1, \quad (3.28)$$

$$\sigma_{33} = \lambda(\text{tr } \underline{E}) \quad (\neq 0 \text{ i.A.}). \quad (3.29)$$

Die Gleichungen (3.26) _{$i=1,2$} , (3.24), (3.28) stellen ein 2-dim. Randwertproblem für (3.25). Gl. (3.26) _{$i=3$} ist dann wegen $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_1, x_2)$, s. (3.29), identisch erfüllt.

ii) **Ebener Spannungszustand:**

$$\sigma_{31} = \sigma_{32} = \sigma_{33} \equiv 0. \quad (3.30)$$

Dann ist

$$E = \left(\begin{array}{c|c} \underline{E} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & E_{33} \end{array} \right), \quad \sigma = \left(\begin{array}{c|c} \underline{\sigma} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

woraus folgt

$$0 = \sigma_{33} = 2\mu E_{33} + \lambda(\operatorname{tr} \underline{E} + E_{33}),$$

d.h.

$$E_{33} = -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \operatorname{tr} \underline{E}, \quad \operatorname{tr} E = \operatorname{tr} \underline{E} + E_{33} = \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \operatorname{tr} \underline{E}$$

und damit die effektive Spannungs-Dehnungsbeziehung

$$\underline{\sigma} = 2\mu \underline{E} + \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} (\operatorname{tr} \underline{E}) \underline{1} \quad (3.31)$$

in der Ebene. Wiederum stellen (3.26)_{i=1,2}, (3.24) und (3.31) ein 2-dim. Randwertproblem für (3.25) dar, und (3.26)_{i=3} ist identisch erfüllt. Zur Bestimmung von u_3 bleiben aber noch die Gleichungen

$$u_{3,1} = 0, \quad u_{3,2} = 0, \quad u_{3,3} = E_{33}(x_1, x_2) \quad (3.32)$$

zu lösen. Letztere hat die Lösung

$$u_3 = E_{33}(x_1, x_2) \cdot x_3, \quad (3.33)$$

die aber die ersten beiden i.A. nicht erfüllt. Anders gesagt: die aus (3.32) folgende Verträglichkeitsbedingung (1.8),

$$E_{33,12} = \partial_3(E_{31,2} + E_{32,1} - E_{12,3}) = 0,$$

gilt i.A. nicht: (3.30) ist **inkompatibel** mit (3.25). Trotzdem liefert die aus (3.25, 3.33) gebildete Verschiebung $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ eine gute Näherungslösung für **dünne Platten** mit freien Deckflächen.

Im Fall $\vec{F} = 0$ lauten die Feldgleichungen (3.26)_{i=1,2}

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0. \quad (3.34)$$

Liegt eine Lösung $\underline{\sigma}$ vor, so ist zu überprüfen, dass sie der verbleibenden Verträglichkeitsbedingung (1.8)

$$2E_{12,12} = E_{11,22} + E_{22,11} \quad (3.35)$$

genügt. Die Umkehrung von (3.28) oder (3.31) ist $\underline{E} = 2\tilde{\mu}\underline{\sigma} + \tilde{\lambda}(\operatorname{tr} \underline{\sigma})\underline{1}$ mit verschiedenen Koeffizienten $\tilde{\mu}$ und $\tilde{\lambda}$ in beiden Fällen, vgl. (2.14). Da die Gl. (3.35) für alle Werte von $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$ gelten soll, muss sie durch beide Beiträge zu \underline{E} separat befriedigt werden. Beide verlangen unter Berücksichtigung von (3.34)

$$\Delta(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = 0. \quad (3.36)$$

Der Ansatz (Airy)

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.37)$$

mittels einer **Spannungsfunktion** $\psi = \psi(x_1, x_2)$ erfüllt (3.34) **identisch**, und es gilt $\text{tr } \underline{\sigma} = \Delta \psi$. Die Lösung ist nach (3.36) zulässig, falls

$$\Delta \Delta \psi = 0. \quad (3.38)$$

5. Die Methode der Finiten Elemente

Einfachheitshalber behandeln wir statt den (vektoriellen) elastischen Feldgleichungen (2.19) die (skalare) Poissongleichung:

$$\Delta u = -\rho \quad \text{in } B,$$

mit Randbedingungen auf $\partial B = R_1 \cup R_2$, $R_1 \cap R_2 = \emptyset$

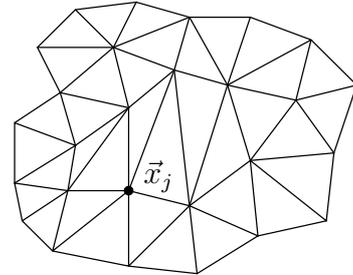
$$\begin{aligned} u &= \hat{u}, & (x \in R_1), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= \sigma, & (x \in R_2), \end{aligned} \quad (3.39)$$

und zwar in Dimension 2. Die Lösung u ist der Minimierer des zu (2.24) analogen Funktionals

$$\begin{aligned} F[u] &= W[u, u] - L[u] \\ &\equiv \frac{1}{2} \int_B (\nabla u)^2 d^2x - \int_B \rho u d^2x - \int_{R_2} \sigma u do \end{aligned}$$

unter der Randbedingung (3.39).

Triangulation T des Gebiets B mit Knoten \vec{x}_j :



Im Raum Φ der Funktionen mit $\int_B (\nabla u)^2 d^2x < \infty$, betrachten wir die Funktionen $\varphi_j(x)$ (j ein Knoten).

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1, & (x = x_j), \\ 0, & (x = x_i, i \neq j), \\ \text{linear interpoliert über jedes Dreieck.} \end{cases}$$

Der Graph von φ_j ist eine "Pyramide". Für die Linearkombination der $\varphi_j(x)$,

$$u(x) = \sum_{j \in \text{Knoten}} u_j \varphi_j(x), \quad (3.40)$$

gilt $u(x_j) = u_j$: sie sind bestimmt durch die Funktionswerte an den Knoten:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

mit $N = \#(\text{Knoten})$. Statt nun $F[u]$ über $u \in \Phi$ ($\dim \Phi = \infty!$) zu minimieren, wird F im Sinne einer Approximation nur über den Raum Φ_T der Linearkombinationen (3.40) minimiert (Rayleigh-Ritz Verfahren). Es ist $\dim \Phi_T = N$. Auf Φ_T eingeschränkt lautet das Funktional

$$F[u] \equiv F[\underline{u}] = \underline{u}^T \underline{W} \underline{u} - \underline{\rho}^T \underline{u} - \underline{\sigma}^T \underline{u},$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \int_B \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_j d^2x, \quad \rho_i = \int_B \rho \varphi_i d^2x, \quad \sigma_i = \int_{R_2} \sigma \varphi_i do.$$

Die Minimierung von $F[\underline{u}]$ hat bei vorgegebenen $u_j = \hat{u}_j$, ($\vec{x}_j \in R_1$) zu erfolgen. Wir nummerieren die Knoten so, dass die auf R_1 zuletzt kommen und zerlegen Vektoren und Matrizen entsprechend in Blöcke:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \hat{u} \end{pmatrix}, \quad \underline{W} = \begin{pmatrix} \tilde{W} & \hat{W} \\ \hat{W}^T & * \end{pmatrix}.$$

Die Minimierung bzgl. \tilde{u} ist äquivalent zum linearen inhomogenen Gleichungssystem

$$2\tilde{W}\tilde{u} = -2\hat{W}\hat{u} + \tilde{\rho} + \tilde{\sigma},$$

für welches es numerische Lösungsverfahren gibt. Beachte, dass \underline{W} singular ist, da $\underline{W}\underline{u} = 0$, falls alle u_j gleich sind; hingegen ist \tilde{W} regulär, falls $R_1 \neq \emptyset$. Beides folgt aus $\underline{u}^T \underline{W} \underline{u} = \int_B (\nabla u)^2 d^2x$ und aus $\underline{u}^T \underline{W} \underline{u} = \tilde{u}^T \tilde{W} \tilde{u}$ für $\hat{u} = 0$.

Die Matrix \underline{W} ist durch die Geometrie der Triangulation bestimmt: Jedes Dreieck Δ (Fläche $|\Delta|$) liefert einen Beitrag

$$w = \frac{1}{8|\Delta|} ((\vec{x}_{i+2} - \vec{x}_{i+1}) \cdot (\vec{x}_{j+2} - \vec{x}_{j+1}))_{i,j=1}^3 \quad (3.42)$$

zu der Untermatrix $(W_{ij})_{i,j=1,2,3}$.

Beweis. (Notation: $\vec{x} = (x^1, x^2)$). Die Gerade durch die Knoten $i+1, i+2$ ist $f_i(\vec{x}) = 0$ mit

$$f_i(\vec{x}) = \begin{vmatrix} 1 & x^1 & x^2 \\ 1 & x_{i+1}^1 & x_{i+1}^2 \\ 1 & x_{i+2}^1 & x_{i+2}^2 \end{vmatrix} = \vec{a}_i \cdot \vec{x} + b_i,$$

$$\vec{a}_i = (-(x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2), x_{i+2}^1 - x_{i+1}^1) = (\vec{x}_{i+2} - \vec{x}_{i+1})^\perp.$$

Der Vektor \vec{a}_i ist der Oberflächenvektor der Seite, die dem Knoten i gegenüber liegt. Beachte, dass

$$f_i(\vec{x}_i) = \begin{vmatrix} 1 & x_i^1 & x_i^2 \\ 1 & x_{i+1}^1 & x_{i+2}^2 \\ 1 & x_{i+2}^1 & x_{i+2}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_i^1 & x_i^2 \\ 0 & x_{i+1}^1 - x_i^1 & x_{i+2}^2 - x_i^2 \\ 0 & x_{i+2}^1 - x_i^1 & x_{i+2}^2 - x_i^2 \end{vmatrix}$$

$$= (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) \wedge (\vec{x}_{i+2} - \vec{x}_i) \quad (3.43)$$

(dies ist unabhängig von i und $= 2|\Delta|$). Damit lautet die lineare Interpolation

$$u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{f_i(\vec{x})}{2|\Delta|}, \quad \vec{\nabla} u = \frac{1}{2|\Delta|} \sum_{i=1}^3 u_i \vec{a}_i,$$

und der Beitrag des Dreiecks zu $W[u, u]$ ist

$$\frac{1}{2} \int_{\Delta} (\vec{\nabla} u)^2 d^3x = \frac{|\Delta|}{2} (\vec{\nabla} u)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4|\Delta|} \sum_{i,j=1}^3 u_i u_j \vec{a}_i \cdot \vec{a}_j,$$

wobei

$$\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = (\vec{x}_{i+2} - \vec{x}_{i+1}) \cdot (\vec{x}_{j+2} - \vec{x}_{j+1}) \quad (3.44)$$

□

Ein weiterer Ausdruck für w ist

$$w = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & -c_3 & -c_2 \\ -c_3 & c_1 + c_3 & -c_1 \\ -c_2 & -c_1 & c_1 + c_2 \end{pmatrix},$$

wobei $c_i = (2 \tan \theta_i)^{-1}$. Wegen (3.44) ist $\vec{a}_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+2} = (\vec{x}_i - \vec{x}_{i+2}) \cdot (\vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i) = -l_{i+2} l_{i+1} \cos \theta_i$ und wegen (3.43) auch $2|\Delta| = l_{i+1} l_{i+2} \sin \theta_i$, also

$$\frac{\vec{a}_{i+1} \cdot \vec{a}_{i+2}}{4|\Delta|} = -c_i;$$

ferner wegen $\sum_{i=1}^3 \vec{a}_i = 0$ noch

$$\frac{\vec{a}_i \cdot \vec{a}_i}{4|\Delta|} = c_{i+1} + c_{i+2}.$$

Auch die ρ_i können approximativ über die Dreiecke berechnet werden:

$$\int_{\Delta} \rho u d^2x \cong |\Delta| \rho(x_0) u(\vec{x}_0),$$

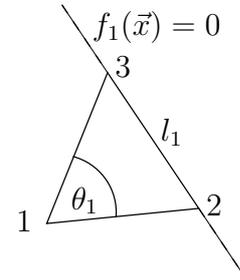
wobei \vec{x}_0 der Mittelpunkt von Δ ist. Dort ist

$$u(\vec{x}_0) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 u_i.$$

Desgleichen für die σ_i . In Dimension 3 lautet (3.42) analog

$$w = \frac{1}{2(3!)^2 |\Delta|} (\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j)_{i,j=1}^4,$$

wobei \vec{a}_i nun der Oberflächenvektor der Seite ist, die dem Knoten i gegenüber liegt, und $|\Delta|$ das Volumen des Tetraeders ist.



Um die Resultate auf die Elastostatik zu übertragen, ist jeder Eintrag $u_j \in \mathbb{R}$ in (3.41) durch $u_j \in \mathbb{R}^3$ (oder, bei ebenen Verschiebungszuständen, \mathbb{R}^2) zu ersetzen; entsprechend sind die Matrixelemente von \underline{W} , und damit die der Matrix w zu Δ , selbst 3×3 Matrizen.

Mit (2.10) ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Delta} (E, \sigma) d^3x &= \mu \int_{\Delta} (E, E) d^3x + \frac{\lambda}{2} \int_{\Delta} (\text{tr } E)^2 d^3x, \\ (E, E) &= \frac{1}{2} ((Du, Du) + ((Du)^T, Du)), \quad \text{tr } E = \text{tr } Du, \\ Du &= \frac{1}{3!|\Delta|} \sum_{i=1}^3 u_i a_i^T, \quad (Du)^T = \frac{1}{3!|\Delta|} \sum_{i=1}^3 a_i u_i^T, \quad \text{tr } Du = \frac{1}{3!|\Delta|} \sum_{i=1}^3 a_i^T u_i. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$w_{ij} = \frac{1}{2(3!)^2|\Delta|} \left(\mu ((a_i^T a_j) 1_3 + a_j a_i^T) + \lambda a_i a_j^T \right).$$

4. Elastische Schwingungen

1. Wellen und Polarisationen

Die Bewegungsgleichung für das Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{x}, t)$ ergibt sich aus (1.18), indem man zu \vec{F} den Trägheitswiderstand $-\rho\ddot{\vec{u}}$, ($\cdot = \partial/\partial t$) addiert

$$\sigma_{ik,k} + F_i - \rho\ddot{u}_i = 0$$

(ρ : Massendichte). Für eine Lösung u wird (2.23) mit $\tilde{u} = \dot{u}$ zum **Energiesatz**

$$\int_{\partial V} \dot{u}_i \sigma_{ik} do_k + \int_V d^3x (F_i - \underbrace{\rho\ddot{u}_i}_{\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\dot{u}^2}) \dot{u}_i = \underbrace{2W[\dot{u}, u]}_{\frac{d}{dt}W[u, u]},$$

also

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \underbrace{\left(\frac{1}{2}\rho\dot{u}^2 + \frac{1}{2}(E, \sigma) \right)}_{\text{Energiedichte (kinetische+potentielle)}} = \underbrace{\int_{\partial V} \dot{u}_i \sigma_{ik} do_k}_{\text{Leistung der Volumenkräfte}} + \underbrace{\int_V \vec{F} \cdot \dot{\vec{u}} d^3x}_{\text{Leistung der Volumenkräfte}} .$$

Der erste Term rechts ist die durch ∂V zugeführte Energie, d.h.

$$j_k = -\dot{u}_i \sigma_{ik} \tag{4.1}$$

ist die k -Komponente der **Energiestromdichte** (Vorzeichen: $d\vec{\sigma}$ ist nach aussen gerichtet.) Speziell ist $\vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = 0$ falls $\vec{u} = 0$ oder $\sigma_{ik} n_k = 0$: eingespannte bzw. freie Oberfläche.

Wir setzen im Folgenden $\vec{F} = 0$ und betrachten zuerst Wellen im unbegrenzten, **homogenen und isotropen Elastikum**. Aus den statischen Feldgleichungen (2.19) wird die elastische Wellengleichung

$$\rho\ddot{\vec{u}} = \mu\Delta\vec{u} + (\mu + \lambda) \text{grad div } \vec{u} . \tag{4.2}$$

Ansatz für **ebene Welle**:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{e} \cdot \vec{x} - ct) , \quad (|\vec{e}| = 1) ,$$

$\vec{f}(s)$ = Vektorfunktion einer Variablen. Die Flächen $s = \vec{e} \cdot \vec{x} - ct = \text{const}$ sind Ebenen $\perp \vec{e}$, die sich mit Geschwindigkeit c in Richtung \vec{e} bewegen. Einsetzen in (4.2) liefert

$$\rho c^2 \vec{f}'' = \mu \vec{f}'' + (\mu + \lambda) \vec{e}(\vec{e} \cdot \vec{f}'') \tag{4.3}$$

mit $' = \partial/\partial s$. Wir unterscheiden:

a) **Transversalwellen**

$$\vec{f} \perp \vec{e}: \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} .$$

b) **Longitudinalwellen**

$$\vec{f} \parallel \vec{e}: \quad c_l = \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} > c_t .$$

Es gibt keine Dispersion: ebene Wellen behalten ihre Form, sofern sie rein transversal oder longitudinal sind.

Da die elastische Wellengleichung linear und reell ist, ist das Rechnen mit komplexen Lösungen legitim: Real- und Imaginärteil einer komplexen Lösung sind wieder Lösungen. Wir fassen den Realteil als das physikalische Feld auf.

Monochromatische ebene Wellen sind dann von der Form:

$$\vec{u} = \vec{A} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \quad (4.4)$$

mit Frequenz $\omega > 0$ und Wellenvektor $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}$. Die komplexe Amplitude \vec{A} erfüllt nach (4.3) ($\vec{f}(s) = \vec{A} e^{i\frac{\omega}{c}s}$) entweder

$$\vec{A} \perp \vec{k} : \quad \omega_t = kc_t = k\sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

oder

$$\vec{A} \parallel \vec{k} : \quad \omega_l = kc_l = k\sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}}.$$

Durch Superposition lassen sich nun allgemeine Wellen aufbauen (Fourier-Integral):

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \int d^3k [\vec{A}_t^{(+)}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + \vec{A}_t^{(-)}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega t)}] + \int d^3k [t \leftrightarrow l].$$

Sie sind reell, falls $\vec{A}_{t/l}^{(+)}(\vec{k})^* = \vec{A}_{t/l}^{(-)}(-\vec{k})$. Die Amplituden $\vec{A}_{t/l}^{(\pm)}(\vec{k})$ sind durch $\vec{u}(\vec{x}, t = 0)$, $\dot{\vec{u}}(\vec{x}, t = 0)$ bestimmt.

Polarisation transversaler Wellen

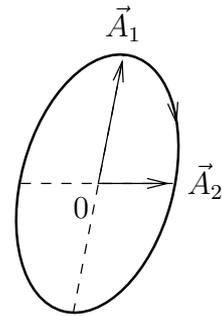
Wir betrachten

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \text{Re}(\vec{A} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}), \quad \vec{A} \perp \vec{k}, \quad \omega = \omega_t$$

und zerlegen $\vec{A} = \vec{A}_1 + i\vec{A}_2$, ($\vec{A}_{1,2}$ reell). An einer festen Stelle \vec{x} , z.B. $\vec{x} = 0$, ist dann

$$\vec{u}(t) = \vec{A}_1 \cos \omega t + \vec{A}_2 \sin \omega t, \quad (4.5)$$

was eine **Ellipse** beschreibt. Spezialfälle sind die **lineare Polarisation** ($\vec{A}_1 \parallel \vec{A}_2$) und die **zirkulare Polarisation** ($\vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$, $|\vec{A}_1| = |\vec{A}_2|$). Durch Wahl einer Basis \vec{e}_1, \vec{e}_2 im komplexen 2-dimensionalen Raum $\perp \vec{k}$ lässt sich jede Welle in 2 speziell polarisierte Komponenten zerlegen.



Beispiele. Sei $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ eine reelle, positiv-orientierte, orthonormierte Basis im \mathbb{R}^3 mit $\vec{k} = k\vec{e}_3$.

a) Zerlegung in zwei zueinander senkrechte linear polarisierte Wellen:

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_2 = \vec{e}_2.$$

b) Zerlegung in rechts (+) und eine links (-) -zirkular polarisierte Welle:

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2).$$

Intensität

Um die Energiestromdichte (4.1) der Welle (4.4) auszurechnen, muss man zuerst zu den reellen Feldern übergehen, da \vec{j} quadratisch ist in \vec{u} . Im **Zeitmittel** gilt dann

$$\begin{aligned}\langle j_k \rangle &= -\langle \text{Re } \dot{u}_i \text{Re } \sigma_{ik} \rangle = -\frac{1}{2} \langle \text{Re } \dot{u}_i \text{Re } \sigma_{ik} + \text{Im } \dot{u}_i \text{Im } \sigma_{ik} \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \langle \text{Re } \bar{\dot{u}}_i \sigma_{ik} \rangle.\end{aligned}$$

Man findet

$$\begin{aligned}\dot{u}_i &= -i\omega u_i, & u_{i,j} &= ik_j u_i \\ \sigma_{ij} &= i(\mu(k_j u_i + k_i u_j) + \lambda(\vec{k}\vec{u})\delta_{ij}) \\ \bar{\dot{u}}_i \sigma_{ij} &= -\omega(\mu((\vec{u}^* \vec{u})k_j + (\vec{u}^* \vec{k})u_j) + \lambda(\vec{k}\vec{u})\bar{u}_j) \\ \vec{j} &= \frac{\omega}{2}(\mu(\vec{u}^* \vec{u})\vec{k} + (\mu + \lambda)\text{Re}(\vec{u}^* \vec{k})\vec{u})\end{aligned}\tag{4.6}$$

- $\vec{A} \perp \vec{k}$

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\omega_t}{2} \cdot \mu |\vec{A}|^2 \vec{k} = \frac{\mu}{2} k^2 \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} |\vec{A}|^2 \vec{e}$$

zeigt erwartungsgemäss in die Fortpflanzungsrichtung \vec{e} und hat den Betrag (**Intensität**)

$$I_t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu^3}{\rho}} k^2 |\vec{A}|^2.$$

- $\vec{A} \parallel \vec{k}$

$$\langle \vec{j} \rangle = \frac{\omega_t}{2} (2\mu + \lambda) |\vec{A}|^2 \vec{k} = \frac{2\mu + \lambda}{2} k^2 \sqrt{\frac{2\mu + \lambda}{\rho}} |\vec{A}|^2 \vec{e},$$

$$I_l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2\mu + \lambda)^3}{\rho}} k^2 |\vec{A}|^2.$$

Bemerkung. Für die Superposition von zwei senkrecht zueinander linear polarisierter Wellen (mit gleichem \vec{k}) sind die **Intensitäten** additiv, da die Mischterme verschwinden. Analog für zwei entgegengesetzt zirkular polarisierte Wellen.

2. Anwendung: Die spezifische Wärme eines Festkörpers

Als Vorbereitung berechnen wir die Eigenschwingungen eines elastischen Quaders. Dieser sei gegeben durch $0 \leq x_i \leq L_i$ ($i = 1, 2, 3$). Die Randbedingung für die elastische Wellengleichung (4.2) wählen wir "gemischt" (\vec{n} : Aussennormale):

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{n} \wedge (\sigma \vec{n}) = 0 : \tag{4.7}$$

auf dem Rand ist \vec{u} tangential und es wirkt nur eine Normalspannung; z.B. auf den Seiten $x_1 = 0, L_1$:

$$u_1 = 0, \quad \sigma_{21} = \sigma_{31} = 0.$$

Insbesondere ist $\vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = -\vec{u} \cdot \sigma \vec{n} do = 0$ auf der ganzen Oberfläche, d.h. das Elastikum ist energetisch abgeschlossen. Für andere Randbedingungen (z.B. $\vec{u} = 0$ auf dem ganzen Rand) gibt es keine elementare Darstellung der Eigenschwingungen.

Als Verschiebungsfeld betrachten wir stehende Wellen (Eigenschwingungen) $\vec{u}(\vec{x})e^{-i\omega t}$ der Form

$$\begin{aligned} u_1 &= A_1 \sin k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \cos k_3 x_3 \\ u_2 &= A_2 \cos k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos k_3 x_3 \\ u_3 &= A_3 \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \sin k_3 x_3 \end{aligned} \quad (4.8)$$

und setzen $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$, $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$. Die Randbedingung (4.7) legt die zulässigen Werte für \vec{k} fest:

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{\pi}{L_i} m_i \\ m_i &\text{ ganz und } \geq 0, \text{ ausser } m_1 = m_2 = m_3 = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wir betrachten bloss die Seiten $x_1 = 0$ und $x_1 = L_1$ des Quaders, denn die anderen sind gleich. Dort ist $u_1 = 0$ und

$$\sigma_{21} = -\mu(k_1 A_2 + k_2 A_1) \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2 \cos k_3 x_3 = 0.$$

Mit

$$\begin{aligned} \Delta \vec{u} &= -k^2 \vec{u}, \\ \operatorname{div} \vec{u} &= (\vec{k} \cdot \vec{A}) \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2 \cos k_3 x_3, \\ \partial_i \operatorname{div} \vec{u} &= -k_i (\vec{k} \cdot \vec{A}) (u_i / A_i) \end{aligned}$$

ist die elastische Wellengleichung (4.2) erfüllt für die "Moden"

$$\begin{aligned} \vec{A} \perp \vec{k} &\quad \text{mit } \omega = \omega_t = kc_t \\ \vec{A} \parallel \vec{k} &\quad \text{mit } \omega = \omega_l = kc_l. \end{aligned}$$

Beachte allerdings, dass die beiden Fälle keine blosse transversale/longitudinale Eigenschwingung (4.8) zur Folge haben.

Debye'sche Theorie

Ein Kristallgitter aus N Ionen lässt sich auffassen als schwingendes System mit $3N$ Freiheitsgraden und somit als System von $3N$ ungekoppelten Oszillatoren mit Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_{3N}$ (Eigenfrequenzen des Kristalls). Nach der Quantenstatistik ist dann die Energie des Kristalls bei der absoluten Temperatur T :

$$U(T) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\hbar \omega_i}{e^{\beta \hbar \omega_i} - 1}, \quad (4.10)$$

($\beta = (kT)^{-1}$; k : Boltzmannkonstante). Debye ersetzt die $\omega_1, \dots, \omega_{3N}$ durch die **tiefsten $3N$ Eigenfrequenzen eines elastischen Kontinuums** desselben Volumens $V = L^3$ (L : Kantenlänge). Nach (4.9) ist die Zahl der Eigenschwingungen mit Frequenz $\omega_l < \omega$ gleich

der Zahl der Gitterpunkte $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ im positiven Oktanten von \mathbb{Z}^3 innerhalb der Kugel

$$|\vec{m}| < \frac{L \omega}{\pi c_l},$$

als asymptotisch

$$N_l(\omega) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{L}{\pi c_l}\right)^3 \omega^3.$$

Addiert man dazu die Zahl der transversalen Schwingungen (2 Polarisationen) mit $\omega_t < \omega$, so ergibt sich

$$N(\omega) = \frac{V}{6\pi^2} \left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right) \omega^3.$$

Die Debye'sche Abschnidefrequenz ω_D ist bestimmt durch $N(\omega_D) = 3N$, d.h. $\omega_D \propto (N/V)^{1/3}$ ist unabhängig von der Grösse des Würfels und ist eine durch Teilchendichte und Schallgeschwindigkeiten bestimmte Materialkonstante. Es folgt

$$N(\omega) = 3N \left(\frac{\omega}{\omega_D}\right)^3.$$

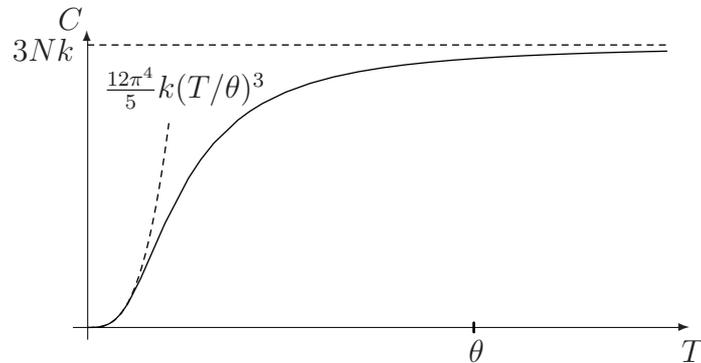
Da die Eigenfrequenzen für grosse N zunehmend dicht liegen, wird (4.10) zum Integral

$$\begin{aligned} U(T) &= \int_0^{\omega_D} dN(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \\ &= \frac{9N}{\omega_D^3} \int_0^{\omega_D} d\omega \omega^2 \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \\ &= 9NkT \left(\frac{T}{\theta}\right)^3 \int_0^{\theta/T} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \end{aligned}$$

mit der "Debye-Temperatur" $\theta := \hbar\omega_D/k$ (Variablensubstitution $x = \beta\hbar\omega$). Sie trennt zwei Gebiete

$$\begin{aligned} T \gg \theta &: U(T) \cong 3NkT \\ T \ll \theta &: U(T) \cong \frac{3\pi^4}{5} \frac{Nk}{\theta^3} \cdot T^4, \quad \left(\int_0^\infty dx \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}\right). \end{aligned}$$

Die **spezifische Wärme** ist dann $C(T) = dU/dT$:



(Nicht inbegriffen ist ein Beitrag der Elektronen.)

3. Oberflächenwellen

Im Halbraum gibt es Wellen, die sich entlang des Randes fortpflanzen (Rayleigh).

Als Vorbereitung notieren wir: 1) Für eine ebene Welle

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = \vec{A} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)},$$

lautet der Spannungstensor (4.6), also für eine **Transversalwelle** und $\vec{k} = k_t \vec{e}$

$$\sigma_{ij} = i\mu k_t (u_i e_j + u_j e_i),$$

bzw. für eine **Longitudinalwelle** mit $\vec{u} = u \vec{e}$

$$\sigma_{ij} = ik_l u (2\mu e_i e_j + \lambda \delta_{ij}).$$

2) Gl. (4.4) ist eine Lösung von (4.2) selbst für $\vec{k} \equiv k\vec{e} = (\omega/c)\vec{e}$ mit $\vec{e} \in \mathbb{C}^3$, sofern $\vec{e}^2 \equiv \vec{e} \cdot \vec{e} = 1$; dabei ist $c = c_t$ oder $c = c_l$ je nachdem, ob die Welle transversal, $\vec{A} \cdot \vec{e} = 0$, oder longitudinal ist, $\vec{A} = A\vec{e}$. Zerlegt man $\vec{e} = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ ($\vec{e}_{1,2}$ reell), so lautet

$$\vec{u} = \vec{A} e^{i(k\vec{e}_1 \cdot \vec{x} - \omega t)} e^{-k\vec{e}_2 \cdot \vec{x}}, \quad (4.11)$$

wobei $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ und $\vec{e}_1^2 = 1 + \vec{e}_2^2$. Dies beschreibt eine **quergedämpfte Welle**: Sie pflanzt sich in Richtung \vec{e}_1 mit Geschwindigkeit

$$\frac{\omega}{k_i |\vec{e}_1|} = \frac{c_i}{|\vec{e}_1|} < c_i, \quad (i = t, l) \quad (4.12)$$

fort und ist senkrecht dazu gedämpft.

Auf dem Halbraum $\{x = (x_1, x_2, x_3) \mid x_2 > 0\}$ ist die Welle (4.11) zulässig, sofern ihr unphysikalisches, exponentielles Wachstum im komplementären Halbraum zu liegen kommt, also falls \vec{e}_2 in die positive 2-Richtung weist. OEDA liegt dann \vec{e}_1 in 1-Richtung. Ferner braucht die Welle die freie Randbedingung $\sigma_{12} = \sigma_{22} = \sigma_{32} = 0$ zu erfüllen.

Ersteres formuliert sich wegen $\text{ch}^2 \delta = 1 + \text{sh}^2 \delta$ wie folgt: Im transversalen Fall

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \text{ch } \delta \\ i \text{ sh } \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = A_t \begin{pmatrix} \text{sh } \delta \\ i \text{ ch } \delta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\delta > 0)$$

(oder $\vec{A} = (0, 0, 1)$); im longitudinalen

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} \text{ch } \gamma \\ i \text{ sh } \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{A} = A_l \vec{e}, \quad (\gamma > 0).$$

Die Spannungen am Rand sind, bis auf die Phase,

Welle	σ_{12}	σ_{22}
t	$-\mu k_t A_t \underbrace{(\text{ch}^2 \delta + \text{sh}^2 \delta)}_{\text{ch } 2\delta}$	$-i\mu k_t A_t \cdot \underbrace{2 \text{ch } \delta \text{ sh } \delta}_{\text{sh } 2\delta}$
l	$-\mu k_l A_l \text{ sh } 2\gamma$	$i k_l A_l (-2\mu \text{ sh}^2 \gamma + \lambda)$

ferner $\sigma_{32} = 0$. Nur eine Superposition einer longitudinalen und einer transversalen Welle kann die Randbedingung erfüllen, wobei für die zweite die Polarisation $\vec{A} = (0, 0, 1)$ wegen $\sigma_{32} \neq 0$ nicht in Frage kommt. Die beiden Anteile (4.11) haben dann dieselbe Frequenz ω , was wegen $k_t = \omega/c_t$, $k_l = \omega/c_l$

$$k_l = nk_t, \quad \text{mit } n \equiv \frac{c_t}{c_l}, \quad n^2 = \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \quad (4.13)$$

impliziert; ferner dieselbe Wellenzahl $k\vec{e}_1$, also

$$\text{ch } \delta = n \text{ch } \gamma. \quad (4.14)$$

Dann ist im letzten Eintrag der Tabelle

$$\begin{aligned} \text{sh}^2 \gamma &= \text{ch}^2 \gamma - 1 = n^{-2} \text{ch}^2 \delta - 1, \\ -2 \text{sh}^2 \gamma + \frac{\lambda}{\mu} &= n^{-2}(1 - 2 \text{ch}^2 \delta) = -n^{-2} \text{ch } 2\delta \end{aligned}$$

und damit $\sigma_{22} = -i\mu k_l A_l n^{-2} \text{ch } 2\delta$. Nach Weglassen gleicher Faktoren lauten die Randbedingungen

$$\begin{aligned} A_t \text{ch } 2\delta + n A_l \text{sh } 2\gamma &= 0, \\ A_t \text{sh } 2\delta + \frac{1}{n} A_l \text{ch } 2\delta &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen eine nicht triviale Lösung zu, falls

$$\text{ch}^2 2\delta = n^2 \text{sh } 2\delta \text{sh } 2\gamma, \quad (4.15)$$

und diese ist wegen der Homogenität des Problems nur bis auf einen Faktor bestimmt:

$$\frac{A_l}{A_t} = -n \text{th } 2\delta. \quad (4.16)$$

Die Gleichungen (4.14, 4.15) haben eine einzige Lösung (δ, γ) mit $\delta, \gamma > 0$, wie im Folgenden gezeigt.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \text{ch } \delta &=: x, & \text{sh } \delta &= \sqrt{x^2 - 1}, & (\delta > 0), \\ \text{ch } \gamma &= \frac{x}{n}, & \text{sh } \gamma &= \sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1}, & (\gamma > 0, \text{ beachte } n < 1), \\ \text{sh } 2\delta &= 2 \text{sh } \delta \text{ch } \delta = 2x\sqrt{x^2 - 1}, \\ \text{ch } 2\delta &= 2 \text{ch}^2 \delta - 1 = 2x^2 - 1, \\ \text{sh } 2\gamma &= \frac{2x}{n} \sqrt{\frac{x^2}{n^2} - 1} = \frac{2x}{n^2} \sqrt{x^2 - n^2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

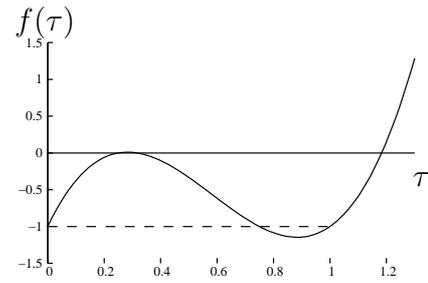
Die Gleichung (4.15) lautet damit

$$(2x^2 - 1)^2 = 4x^2(x^2 - n^2)^{1/2}(x^2 - 1)^{1/2}.$$

Wir setzen $\tau = x^2 = \text{ch}^2 \delta$ und quadrieren. Dies liefert die kubische Gleichung

$$f(\tau) \equiv 16\tau^3 - 24\tau^2 + 8\tau - 1 - 16n^2(\tau^3 - \tau^2) = 0.$$

Es gilt $f(0) = f(1) = -1$ und $f \rightarrow +\infty$, ($\tau \rightarrow +\infty$) wegen $n < 1$; folglich hat f' mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0, 1)$ und f selbst eine oder drei in $(1, +\infty)$. Letzterer Fall würde zwei Nullstellen von f' im selben Intervall bedingen, insgesamt also mindestens drei, was nicht möglich ist. Demzufolge hat $f(\tau) = 0$ genau eine physikalische Lösung $\tau = \text{ch}^2 \delta > 1$.



Die Oberflächenwelle ist nun bestimmt:

$$\vec{u}(\vec{x}, t) = Ae^{i(kx_1 - \omega t)} \cdot \left[\underbrace{\begin{pmatrix} \text{sh } \delta \\ i \text{ch } \delta \\ 0 \end{pmatrix} e^{-k_t \text{sh } \delta \cdot x_2}}_{\text{transversaler Anteil}} - n \text{th } 2\delta \underbrace{\begin{pmatrix} \text{ch } \gamma \\ i \text{sh } \gamma \\ 0 \end{pmatrix} e^{-k_l \text{sh } \gamma \cdot x_2}}_{\text{longitudinaler Anteil}} \right], \quad (4.18)$$

($k = k_t \text{ch } \delta = k_l \text{ch } \gamma$). Beachte die Phasenverschiebung $i = e^{i\pi/2}$ zwischen u_1 und u_2 . An der Oberfläche ist $\vec{u}(x_1, x_2 = 0, t) = \vec{A}e^{i(kx_1 - \omega t)}$ mit $\vec{A} = \vec{A}_1 + i\vec{A}_2$, wobei

$$\vec{A}_1 = A \begin{pmatrix} \text{sh } \delta - n \text{th } 2\delta \cdot \text{ch } \gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \text{sh } \delta - \text{th } 2\delta \cdot \text{ch } \delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{A}_2 = A \begin{pmatrix} 0 \\ \text{ch } \delta - n \text{th } 2\delta \cdot \text{sh } \gamma \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die **Geschwindigkeit** der transversalen und der longitudinalen Anteile der Oberflächenwelle ist nach (4.12)

$$c = \frac{c_l}{\text{ch } \gamma} = \frac{c_t}{\text{ch } \delta} < c_t < c_l$$

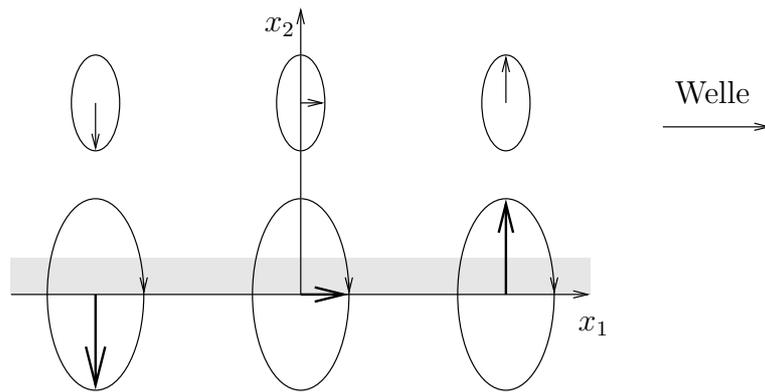
Verschieden sind jedoch die Eindringtiefen d_t , d_l , entsprechend den Dämpfungsfaktoren:

$$\begin{aligned} \text{transversal :} & \quad e^{-(k_t \text{sh } \delta)x_2} = e^{-x_2/d_t} : & d_t &= \frac{1}{k_t \text{sh } \delta}, \\ \text{longitudinal :} & \quad e^{-(k_l \text{sh } \gamma)x_2} = e^{-x_2/d_l} : & d_l &= \frac{1}{k_l \text{sh } \gamma}. \end{aligned}$$

Für das Verhältnis findet man aus (4.17)

$$\frac{d_l}{d_t} = \frac{\text{sh } \delta}{n \text{sh } \gamma} = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 - n^2} \right)^{1/2} < 1,$$

d.h. der transversale Teil der Oberflächenwelle dringt tiefer ein. Nach (4.5) ergibt sich für $\text{Re } \vec{u}(\vec{x}, t)$ folgendes Bild der **Polarisation** der Oberflächenwellen ($A > 0$).

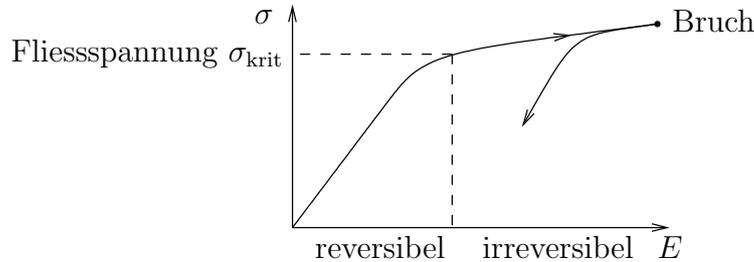


Anwendung. Bei Erdbeben kommt die Hauptwirkung von den Oberflächenwellen: Ihre Intensität klingt wegen des Flächencharakters nur wie r^{-1} ab ($r =$ Distanz vom Zentrum an der Oberfläche), die der Raumwellen aber wie r^{-2} . Zeitlich kommen die Raumwellen wegen ihrer grösseren Geschwindigkeit aber früher an (Vorläufer), und zwar zuerst die longitudinal und dann die transversalen Wellen. Sie heissen deshalb auch p-Wellen (Primärwellen oder “pressure waves”), bzw. s-Wellen (Sekundärwellen oder “shear waves”).

5. Plastische Deformationen und Versetzungen

1. Die Grenzen des Hooke'schen Gesetzes

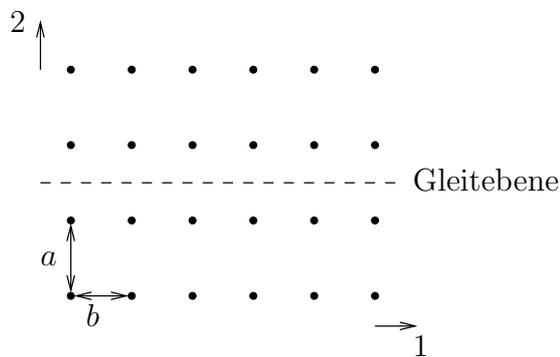
Der lineare Zusammenhang $E \mapsto \sigma$ gilt nur in einem begrenzten Bereich. Darauf folgt ein nicht-linearer, allerdings reversibler Bereich und anschliessend ein irreversibler (plastischer) Vorgang, der mit einem Bruch endet. Schematisch:



Die Grösse der verschiedenen Bereiche hängt vom Material ab (spröde oder duktil). Die für den reversiblen Bereich kritische Spannung σ_{krit} hängt von der Art der Beanspruchung ab (Zug, Schub). Am kleinsten ist sie typischerweise bei Schub/Scherung, s. S. 9.

2. Scherung durch Verschiebung von Atomlagen

Mikroskopische Vorstellung



Eine horizontale Verschiebung der Lagen oberhalb der Gleitebene um $u \ll a$ (keine Verschiebung unterhalb) bedeutet

$$E_{12} \cong \frac{1}{2} \frac{\Delta u}{\Delta x_2} = \frac{u}{2a}$$

und entspricht einer Spannung

$$\sigma_{12} = 2\mu E_{12} = \mu \frac{u}{a}. \quad (5.1)$$

Die Verschiebung um einen Gittervektor, $u = b$, bewirkt keine Änderung der lokalen Verhältnisse und somit keine Kraft. Daher sollte σ_{12} eine periodische Funktion von u sein

$$\sigma_{12}(u + b) = \sigma_{12}(u)$$

mit (5.1) für $u \ll a$. Ein einfacher Ansatz ist

$$\sigma_{12}(u) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{b}{a} \sin\left(\frac{2\pi}{b}u\right).$$

Die maximale Spannung (bei $u = b/4$), die vom Kristall aufrechterhalten werden kann, ist

$$\sigma_{\text{krit}} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{b}{a} \sim 10^{-1} \mu. \quad (5.2)$$

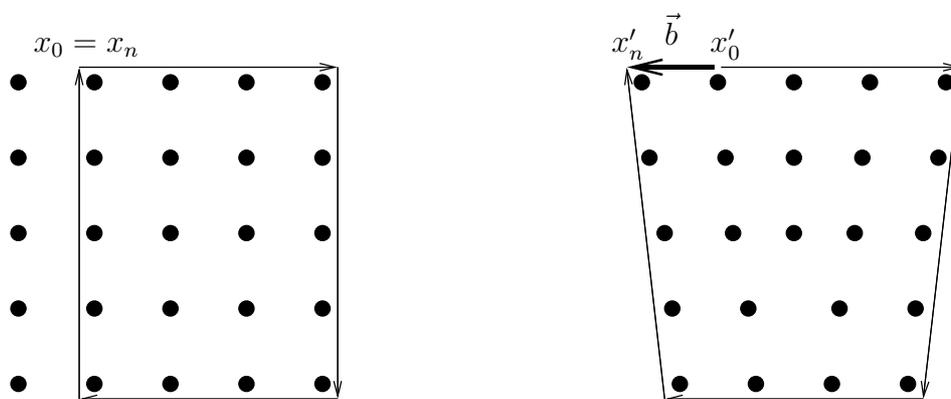
Experimentell ist

$$\sigma_{\text{krit}} \sim 10^{-4} \mu.$$

Obige Vorstellung zur Festigkeit der Kristalle ist zu naiv!

3. Versetzungen

Gitterdefekte sind Stellen im Kristall, wo die Periodizität defekt ist. Wir betrachten hier den Fall von **Versetzungen**, wie durch die Figur illustriert:



- Schleife im idealen Gitter: Folge von nächsten Nachbarn $x_0, \dots, x_n \equiv x_0$. Damit sind $\vec{a}_i = x_i - x_{i-1}$ Gittervektoren und

$$\sum_{i=1}^n \vec{a}_i = x_n - x_0 = 0. \quad (5.3)$$

- Im realen Kristall kann der Defekt umfahren werden längs einer Schleife, die im "guten" Material verläuft: ausgehend von x'_0 sei x'_i der nächste Nachbar von x'_{i-1} , sodass

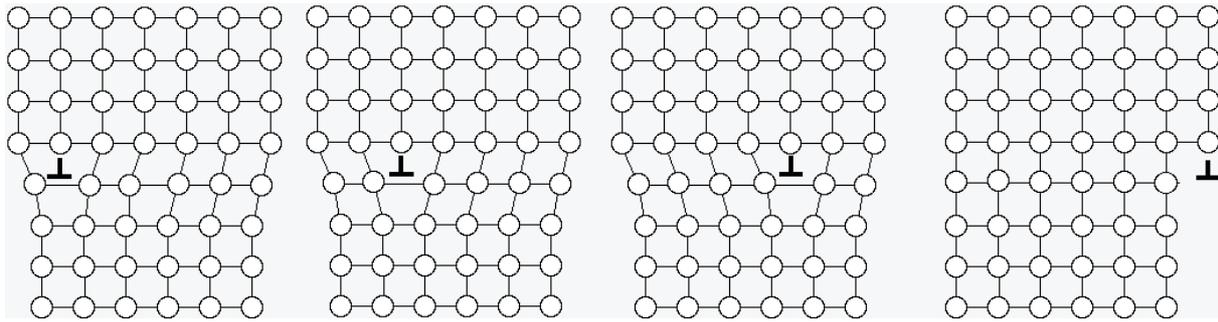
$$x'_i \cong x'_{i-1} + \vec{a}_i$$

(\cong bedeutet = bis auf Fehler \ll Gitterkonstante). Dann ist $x'_n \neq x'_0$ und der Gittervektor

$$\vec{b} = x'_n - x'_0$$

heißt **Burgers-Vektor** der Versetzung (bzw. $-\vec{b}$ bei Umkehrung der Orientierung der Schleife). Er ändert sich bei lokaler Änderung der Schleife nicht, solange sie den Defekt meidet, denn für den Unterschied gilt (5.3): \vec{b} ist **topologisch**. Insbesondere kann \vec{b} anhand einer beliebig grossen Schleife bestimmt werden. Es folgt auch, dass die Versetzung nicht von einer Fläche umschlossen werden kann, die ganz im guten Material liegt.

Figur: wiederholte Verschiebung einer Versetzung verschiebt Atomlagen gegeneinander (Orowan, Polanyi, Taylor).



Erwartung: Die dazu erforderliche Spannung ist kleiner als (5.2).

4. Das Frenkel-Kontorova Modell

Die Atome $n \in \mathbb{Z}$ einer 1-dimensionalen Kette befinden sich in einem periodischen Potential $V_1(x) = V_1(x + b)$. Zwischen ihnen wirkt ein Paarpotential $V_2(x - x')$, für welches die periodische Anordnung der Atome ein stabiles Gleichgewicht ist: $V_2'(b) = 0$, $V_2''(b) \geq 0$ und (oEdA) $V_2(b) = 0$. Die **Energie** einer Konfiguration $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ist

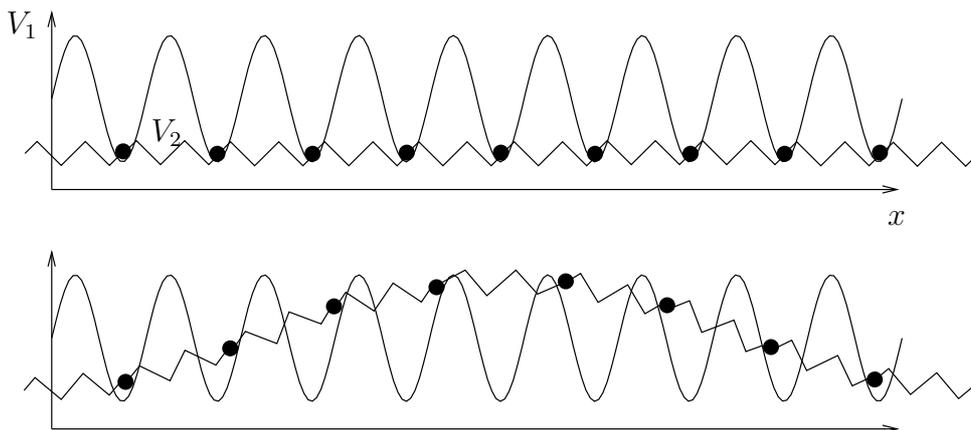
$$E = \sum_n V_1(x_n) + \sum_n V_2(x_{n+1} - x_n) .$$

Periodische Konfigurationen sind von der Form

$$x_n = nb + u \tag{5.4}$$

mit u fest. Wir betrachten langsam veränderliche Abweichungen davon:

$$x_n = nb + u_n , \quad |u_{n+1} - u_n| \ll b .$$



Damit ist

$$\begin{aligned} V_2(x_{n+1} - x_n) &= V_2(b + u_{n+1} - u_n) \\ &\cong \underbrace{V_2(b)}_{=0} + \underbrace{V_2'(b)}_{=0}(u_{n+1} - u_n) + \frac{1}{2}V_2''(b)(u_{n+1} - u_n)^2 + \dots \end{aligned}$$

und

$$E = \sum_n V_1(u_n) + \frac{1}{2} V_2''(b) \sum_n (u_{n+1} - u_n)^2 . \quad (5.5)$$

Gesucht: Lösung minimaler Energie bei Randbedingung

$$u_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow -\infty) , \quad u_n \rightarrow b \quad (n \rightarrow \infty) . \quad (5.6)$$

Analogie zur Versetzung: Atome unterhalb der Gleitebene seien fest (periodisches Substrat), oberhalb beweglich mit Wechselwirkungen V_2 untereinander und V_1 mit dem Substrat. Starres Gleiten entspricht Änderung von u in (5.4). Dann ist

$$\sigma_G = \max_u \frac{V_1'(u)}{b} \quad (5.7)$$

die dazu erforderliche Spannung, vgl. (5.2). Die Lösung (5.6) ist eine Versetzung mit Burgers-Vektor b .

Kontinuumsapproximation: u_n als Funktionswerte einer langsam veränderlichen Funktion u :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{b}{2\pi} u(n) , \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{b}{2\pi} u'(n) , \quad (|u'(n)| \ll 1) \end{aligned} \quad (5.8)$$

(es ist zweckmässig, u_n in Einheiten von $b/2\pi$ zu messen). Die Summen (5.5) werden zu Riemann-Summen mit $\Delta n = 1$:

$$\begin{aligned} E &= \int V_1\left(\frac{b}{2\pi} u(n)\right) dn + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 V_2''(b) \int u'(n)^2 dn \\ &= \int v_1(u(n)) dn + \frac{1}{2} v_2''(2\pi) \int u'(n)^2 dn \end{aligned} \quad (5.9)$$

mit den 2π -periodischen Funktionen

$$v_i(u) = V_i\left(\frac{b}{2\pi} u\right) .$$

Beide Funktionale (5.5, 5.9) sind invariant unter der diskreten Symmetrie

$$u_n \mapsto u_n + b , \quad \text{bzw.} \quad u(n) \mapsto u(n) + 2\pi .$$

Sie ist nicht zu verwechseln mit der Symmetrie

$$u_n \mapsto \tilde{u}_n = u_{n-1} , \quad \text{bzw.} \quad u(n) \mapsto \tilde{u}(n) = u(n - n_0) , \quad (5.10)$$

die im ersten Fall diskret, aber im zweiten Fall kontinuierlich geworden ist: $n_0 \in \mathbb{R}$. Als Folge davon ist die Translatierte $u(n - n_0)$ eines Minimierers $u(n)$ auch einer; ein solcher erfüllt

$$\frac{1}{2} v_2''(2\pi) u'(n)^2 - v_1(u(n)) = \text{const} . \quad (5.11)$$

und

$$v_2''(2\pi) u''(n) - v_1'(u(n)) = 0 . \quad (5.12)$$

Dies ist die Euler-Lagrange Gleichung zu (5.9), und (5.11) ist der Erhaltungssatz zur Symmetrie (5.10).

Beispiel. $V_i(x) = \gamma_i(1 - \cos \frac{2\pi}{b}x)$, d.h. $v_i(n) = \gamma_i(1 - \cos u)$. Dann ist

$$v'_i(u) = \gamma_i \sin u, \quad v''_i(2\pi) = \gamma_2$$

und (5.11, 5.12) lauten

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}K u'(n)^2 - (1 - \cos u) &= C, \\ K u''(n) - \sin u &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

mit $K = \gamma_2/\gamma_1$. Für die Lösung (5.6), d.h. $u(n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow -\infty$), $u(n) \rightarrow 2\pi$ ($n \rightarrow \infty$) folgt $C = 0$. Zusammen mit

$$1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}, \quad \frac{du}{\sin u \cos u} = d \log \tan u$$

folgt

$$\begin{aligned} \frac{du}{dn} &= \frac{2 \sin \frac{u}{2}}{\sqrt{K}} = \frac{4 \sin \frac{u}{4} \cos \frac{u}{4}}{\sqrt{K}}, \\ d \log \tan \frac{u}{4} &= d \frac{n}{\sqrt{K}}, \\ u &= 4 \arctan(e^{\frac{n-n_0}{\sqrt{K}}}) \\ &= \pi + 2 \arctan(\operatorname{sh} \frac{n-n_0}{\sqrt{K}}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die beiden letzten Ausdrücke, d.h.

$$\begin{aligned} e^{\frac{n-n_0}{\sqrt{K}}} &= \tan \frac{u}{4} \\ \operatorname{sh} \frac{n-n_0}{\sqrt{K}} &= \tan \frac{u-\pi}{2} = -\frac{1}{\tan \frac{u}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\tan \frac{u}{4} - (\tan \frac{u}{4})^{-1} \right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

sind nämlich äquivalent.

Die Lösung u von (5.13) legt nach (5.8) eine Folge

$$u_n = \frac{b}{2\pi} u(n - n_0)$$

fest. Ihre Energie (5.5) hängt aber von n_0 ab, und zwar periodisch, $E(n_0) = E(n_0 + 1)$, vgl. (5.10), (erst im Kontinuumsmlimes wird $E(n_0)$ konstant). Damit sind die Minima von $E(n_0)$ energetisch voneinander getrennt durch sog. **Peierls-Barrieren**. Zu berechnen ist anstelle des Integrals (5.9) die Summe

$$E(n_0) = \sum_n v_1(u(n - n_0)) + \frac{1}{2} v''_2(2\pi) \sum_n u'(n - n_0)^2 \equiv \sum_n f(n - n_0). \quad (5.16)$$

Dazu die Poisson-Formel

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_0(k),$$

$$\hat{f}_0(k) = \int f_0(n) e^{-2\pi i k n} dn.$$

Beweis. Der δ -Kamm $h(n) = \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \delta(n - n')$ ist \mathbb{Z} -periodisch und hat Fourierkoeffizienten $\hat{h}_k = \int_{-1/2}^{1/2} h(n) e^{-2\pi i k n} dn = 1, (k \in \mathbb{Z})$. Somit ist $h(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{h}_k e^{2\pi i k n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i k n}$ und $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_0(n) = \int h(n) f_0(n) dn = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}_0(k)$. \square

Der Term $\hat{f}_0(k=0) = \int f_0(n) dn$ entspricht dem Riemann-Integral; für glatte f_0 fallen die Korrekturen $\hat{f}_0(k)$ mit wachsendem $|k|$ rasch ab. In der Anwendung ist $f_0(n) = f(n - n_0)$, also $\hat{f}(k) = e^{2\pi i k n_0} \hat{f}(k)$; zudem ist f oft gerade (und damit \hat{f}). Damit ist

$$\sum_n f(n - n_0) = \int f(n) dn + 2\hat{f}(1) \cos 2\pi n_0 + \dots \quad (5.17)$$

und die Peierls-Barriere beträgt in dieser Näherung $2\hat{f}(1)$.

Beispiel (Fortsetzung). Die beiden Terme in (5.16) sind wegen (5.11) (mit $\text{const} = 0$, vgl. (5.13)) gleich, also

$$\begin{aligned} f(n) &= 2v_1(u(n)) = 2\gamma_1(1 - \cos u(n)) \\ &= 4\gamma_1 \sin^2 \frac{u(n)}{2} = 4\gamma_1 \cos^2 \frac{u(n) - \pi}{2} \\ &= \frac{4\gamma_1}{1 + \text{sh}^2\left(\frac{n}{\sqrt{K}}\right)} \end{aligned}$$

unter Verwendung von (5.15). Es folgt

$$\hat{f}(k) = 4\gamma_1 \sqrt{K} \frac{\pi^2 |k| \sqrt{K}}{\text{sh}(\pi^2 k \sqrt{K})}$$

und insbesondere die Peierls-Barriere

$$2\hat{f}(1) = \gamma_1 \sqrt{K} \cdot \frac{8\pi^2 \sqrt{K}}{\text{sh}(\pi^2 \sqrt{K})}.$$

Die Kraft, um die Versetzung zu bewegen, ist nach (5.16, 5.17)

$$2\hat{f}(1) \max_{n_0} \frac{1}{b} \frac{d}{dn_0} \cos 2\pi n_0 = 2\hat{f}(1) \cdot \frac{2\pi}{b}.$$

Sie ist über die Atome verteilt, die am "Soliton" (5.15) teilhaben. Seine Breite ist $\sim 2 \cdot \frac{b}{2\pi} \sqrt{K}$, was eine kritische Spannung

$$\sigma_V = \frac{2\pi}{b^2} \cdot \frac{2\pi}{\sqrt{K}} \hat{f}(1) = \frac{2\pi}{b^2} \gamma_1 \cdot \frac{8\pi^2 \sqrt{K}}{\text{sh}(\pi^2 \sqrt{K})}$$

zur Folge hat. Im Vergleich dazu ist nach (5.7)

$$\sigma_G = \frac{2\pi}{b^2} \max |v'_1| = \frac{2\pi}{b^2} \gamma_1 ,$$

also

$$\frac{\sigma_V}{\sigma_G} = \frac{8\pi^2 \sqrt{K}}{\text{sh}(\pi^2 \sqrt{K})} \cong 16\pi^2 \sqrt{K} e^{-\pi^2 \sqrt{K}}$$

für $\pi^2 \sqrt{K} \gtrsim 1$. Für $\gamma_1 = \gamma_2$, d.h. $K = 1$, ist das Verhältnis $\approx 8 \cdot 10^{-3}$.

Qualitative Folgerungen: Ein realer Kristall (d.h. mit Versetzungen) ist weitaus plastischer als ein idealer. Verunreinigungen können Haftzentren für Versetzungen bilden und dadurch den Kristall härten (Bsp.: Beigabe von Nickel oder Chrom zur Härtung von Stahl).

5. Makroskopische Beschreibung der Versetzungen

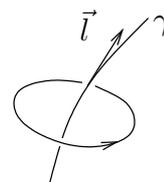
Weit weg von der Versetzung kann man eine makroskopische Beschreibung durch ein Verschiebungsfeld $\vec{u}(x)$ versuchen:

$$x'_i = x_i + \vec{u}(x_i) ,$$

wobei x_i (bzw. x'_i) die Lagen der Atome im idealen (bzw. realen) Kristall sind. Entlang einer Schleife wie in der Fig. auf S. 47 ist

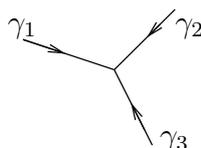
$$\begin{aligned} \vec{u}(x_n) - \vec{u}(x_0) &= \sum_{i=1}^n \vec{u}(x_i) - \vec{u}(x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^n (x'_i - x_i) - (x'_{i-1} - x_{i-1}) = (x'_n - x'_0) - (x_n - x_0) \\ &= \vec{b} \end{aligned}$$

wegen $x_n = x_0$: Es müssen **mehrwertige** Funktionen $\vec{u}(x)$ zugelassen werden. In einer solchen Beschreibung bilden die Verzweigungspunkte von \vec{u} eine Kurve γ (mit Tangentialvektor \vec{l}): die **Versetzungslinie**. Das Vorzeichen von \vec{b} ist nun festgelegt durch Verwendung von Schleifen, die \vec{l} im positiven Sinn umfahren (das gemeinsame Vorzeichen, $(\vec{l}, \vec{b}) \rightsquigarrow (-\vec{l}, -\vec{b})$, bleibt unbestimmt):



$$\oint \frac{d\vec{u}}{ds} ds = \vec{b} . \quad (5.18)$$

Enden kann die Kurve nur am Rand des Materials; im Innern kann sie sich schliessen oder auf andere treffen:

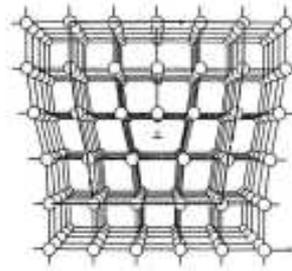


$$\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0 .$$

Spezialfälle: \vec{l} konstant (gerade Versetzungslinie) und (a) $\vec{l} \parallel \vec{b}$: **Schraubenversetzung**, oder (b) $\vec{l} \perp \vec{b}$: **Stufenversetzung**.



(a) Schraubenversetzung



(b) Stufenversetzung

Um $\vec{u}(x)$ zu bestimmen, sollten grundsätzlich die Navier-Gl. für Kristallelastizität, s. S. 15, verwendet werden. Wir verwenden stattdessen die isotrope Form (2.19) (Volterra).

a) **Schraubenversetzung** ($\vec{b} = b\vec{e}_3$). Ansatz:

$$\vec{u} = u_3\vec{e}_3 \quad \text{mit} \quad u_3 = u_3(x_1, x_2),$$

d.h. in Zylinderkoordinaten ($\vec{e}_z = \vec{e}_3$)

$$\vec{u} = u_z\vec{e}_z \quad \text{mit} \quad u_z(r, \varphi) = u_3(x_1, x_2).$$

Die Gl. (2.19) lautet wegen $\text{div } \vec{u} = u_{3,3} = 0$

$$\Delta u_3 = 0,$$

d.h.

$$\Delta u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} = 0$$

mit $\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} d\varphi = b$ wegen (5.18). Eine Lösung ist

$$u_z = b \frac{\varphi}{2\pi}, \quad \text{d.h.} \quad u_3 = \frac{b}{2\pi} \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Der Verzerrungstensor ist, s. (1.14),

$$E_{\varphi z} = \frac{b}{4\pi r}$$

bzw.

$$E_{13} = -\frac{b}{4\pi} \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad E_{23} = \frac{b}{4\pi} \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

(restliche Komponenten = 0); $\sigma = 2\mu E$.

b) **Stufenversetzung** ($\vec{b} = b\vec{e}_1$). Ebener Verschiebungszustand (3.25)

$$\vec{u} = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2), 0),$$

ermittelt über eine Spannungsfunktion $\psi = \psi(x_1, x_2)$ mit $\Delta^2\psi = 0$, s. (3.38). Zu erwarten ist ein Spannungstensor σ , der wie in a) homogen vom Grad -1 in $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ ist: dann ist $\Delta\psi = \sigma_{11} + \sigma_{22}$, s. (3.37), homogen vom selben Grad. Ansatz ($r \neq 0$):

$$\Delta\psi := 2A \frac{x_2}{r^2} = 2A \partial_2 \log r$$

erfüllt $\Delta\Delta\psi = 0$ wegen $\Delta \log r = \delta(x_1, x_2)/2\pi$, s. (7.16). Für ψ selbst findet man

$$\psi = -Ax_2 \log r .$$

Mit (3.37) folgt

$$\sigma_{11} = A \frac{x_2(3x_1^2 + x_2^2)}{r^4}, \quad \sigma_{22} = -A \frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{r^4}, \quad \sigma_{12} = -A \frac{x_1(x_1^2 - x_2^2)}{r^4} .$$

Über die Verzerrung E findet man die Verschiebung

$$u_1 = -A \frac{1-\nu}{2\mu} \varphi - \frac{A}{2\mu} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2},$$

$$u_2 = A \frac{1-2\nu}{\mu} \log r + \frac{A}{2\mu} \frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}$$

mit $\varphi = \arctan(x_2/x_1)$. Es gilt

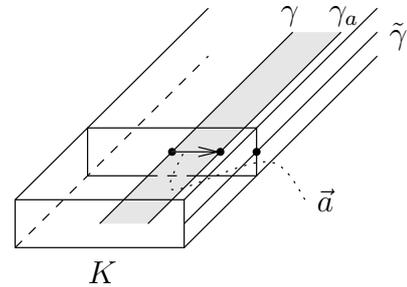
$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} d\varphi = u_i \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = \begin{cases} -A \frac{1-\nu}{2\mu} \cdot 2\pi, & (i=1) \\ 0, & (i=2) \end{cases}$$

was gleich $(b, 0)$ ist für $A = -\frac{\mu}{\pi(1-\nu)}b$.

6. Die Kraft auf eine Versetzung

Die äusseren Kräfte erzeugen einen Spannungszustand $\sigma(x)$. Wir berechnen deren Arbeit bei Verschiebung γ_a der Versetzungslinie γ um $\vec{a}(s)$ (s : Bogenlänge auf γ). Weder ist γ gerade, noch \vec{a} konstant; lokal trifft dies aber mit hinreichender Genauigkeit zu.

Beim Überschreiten eines Schnitts zwischen den beiden Versetzungen γ und γ_a wird $\Delta u = u_a - u$ mehrwertig. Um in (2.1) dennoch den Satz von Gauss anwenden zu können, vgl. (2.2), sparen wir einen kleinen Schlauch K um den Schnitt aus. Sein länglicher Querschnitt ist längs \vec{a} ausgerichtet, aber unabhängig von $|\vec{a}| \rightarrow 0$. Erst an diesen Limes anschliessend wird er unendlich klein und länglich.



In der Nähe von $\gamma(s)$ ist $\Delta u(x) \cong u(x - \vec{a}(s)) - u(x)$. Im Limes ($\vec{a} \rightsquigarrow \delta\vec{a}$) wird damit aus (2.1)

$$\delta A = \int_{B \setminus K} d^3x \sigma_{ik} \delta E_{ik} + \int_{\partial K} \delta u_i \sigma_{ik} d\sigma_k + \int_K \delta u_i F_i d^3x$$

mit $\delta u_i = -u_{i,l} \delta a_l$. Das letzte Integral ist klein mit K , da $\delta u_i = O(r^{-1})$, ($r \rightarrow 0$; r Abstand zu γ). Im mittleren Integral ist δu_i einwertig; u_i selbst nur auf $\partial K \setminus \tilde{\gamma}$, s. $\tilde{\gamma}$ in der Figur. Dann ist es gleich

$$- \int_{\partial K} u_{i,l} \delta a_l \sigma_{ik} d\omega_k = \int_{\partial K \setminus \tilde{\gamma}} \text{rot}(\delta \vec{a} \wedge \sigma \vec{u}) \cdot d\vec{\sigma} - \int_{\partial K \setminus \tilde{\gamma}} (\text{div} \sigma \vec{u}) \delta \vec{a} \cdot d\vec{\sigma}$$

unter Verwendung von

$$\text{rot}(\delta \vec{a} \wedge \vec{v}) = \delta \vec{a} (\text{div} \vec{v}) - (\delta \vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$$

für $\vec{v} = \sigma \vec{u}$ und σ annähernd konstant über K . Nach dem Satz von Stokes ist das erste Integral rechts

$$\int_{\tilde{\gamma}} (\delta \vec{a} \wedge \sigma \vec{u} \Big|_{-}^{+}) \cdot d\vec{l} = \int_{\tilde{\gamma}} (\delta \vec{a} \wedge \sigma \vec{b}) \cdot d\vec{l} = \int_{\gamma} (\sigma \vec{b} \wedge d\vec{l}) \cdot \delta \vec{a};$$

das zweite verschwindet wegen der Gestalt von ∂K : $\delta \vec{a} \perp d\vec{\sigma}$. Resultat:

$$\delta A = \int_{B \setminus \gamma} d^3x \sigma_{ik} \delta E_{ik} + \int_{\gamma} (\sigma \vec{b} \wedge d\vec{l}) \cdot \delta \vec{a}.$$

Das erste Integral ist die Regularisierung durch Hauptwert von (2.1) und stellt die Änderung der elastischen Energie dar. Das zweite entspricht einer Kraft pro Länge $d\vec{l}$ der Versetzungslinie

$$d\vec{f} = \sigma \vec{b} \wedge d\vec{l},$$

(Peach, Koehler). Beachte die formale Analogie zur Kraft $d\vec{f} = (I/c) \vec{B} \wedge d\vec{l}$ eines Magnetfelds \vec{B} auf einen vom Strom I durchflossenen Leiter.

Beispiel. Die Ebene der Figur auf S. 48 sei die 12-Ebene. Auf den Kristall wirke eine Schubspannung $\sigma_{12} = \sigma_{21} > 0$, die die oberen Lagen nach rechts, bzw. die unteren nach links zieht (restliche $\sigma_{ik} = 0$). Die Versetzung hat $\vec{l} = \vec{e}_3$ und $\vec{b} = \vec{e}_1$, also $\sigma \vec{b} = \sigma_{12} \vec{e}_2$. Auf sie wirkt somit die Kraft pro Längeneinheit $\sigma_{12} \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = \sigma_{12} \vec{e}_1$, deren Richtung wie erwartet ist.

6. Dynamik der Fluida

1. Kinematik

Natürlich ist hier die Verwendung **räumlicher Koordinaten** \vec{x} (Eulersche Beschreibung, vgl. S. 1). Zentrale Grösse ist das **Geschwindigkeitsfeld** $\vec{v}(\vec{x}, t)$. Die Bewegung der “Teilchen” ist beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t), t) . \quad (6.1)$$

Sei $\vec{x}(t, s, \vec{y})$ die Lösung zur Anfangsbedingung $\vec{x}(s) = \vec{y}$, und

$$\phi_{(t,s)} : \vec{y} \mapsto \vec{x}(t, s, \vec{y}) .$$

Diese 2-parametrische Schar von Abbildungen $\phi_{(t,s)}$ beschreibt die Bewegung des Fluidums. Es gilt offensichtlich

$$\phi_{(t,t)} = \text{id} ; \quad \phi_{(t,r)} \circ \phi_{(r,s)} = \phi_{(t,s)} .$$

Umgekehrt hat jede solche Schar ein erzeugendes Vektorfeld

$$v(\vec{x}, s) = \frac{d}{dt} \phi_{(t,s)}(\vec{x}) \Big|_{t=s} .$$

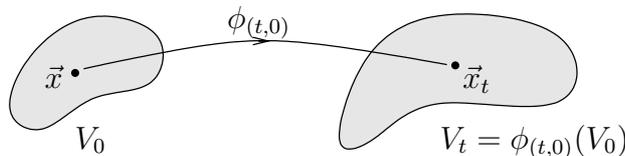
Für stationäre Strömungen ist $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ unabhängig von t . Dann ist $\vec{x}(t, s, \vec{y}) = \vec{x}(t - s, 0, \vec{y})$, und entsprechend

$$\begin{aligned} \phi_{(t,s)} &= \phi_{(t-s,0)} \equiv f_{t-s} , \\ f_0 &= \text{id} , \quad f_t \circ f_s = f_{t+s} . \end{aligned}$$

Umgekehrt definiert jeder solcher 1-parametrische Fluss ein stationäres Vektorfeld

$$\vec{v}(\vec{x}) = \frac{d}{dt} f_t(\vec{x}) \Big|_{t=0} .$$

Wir zeichnen zur Zeit $t = 0$ ein beliebiges Teilsystem “Fluidum im Raumgebiet V_0 ” aus und verfolgen seine Bewegung:



Wichtig sind Grössen der Form $\int_{V_t} d^3x \psi(\vec{x}, t)$, die eine (volumenbezogene) Dichte ψ besitzen (z.B. Volumen, Masse, Impuls, ...). Das **Reynoldsche Transporttheorem** drückt deren zeitliche Änderung aus: Für jedes Feld $\psi(\vec{x}, t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} d^3x \psi(\vec{x}, t) = \int_{V_t} d^3x \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi \vec{v}) \right) . \quad (6.2)$$

Speziell: $\psi \equiv 1$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} d^3x = \int_{V_t} d^3x \text{div} \vec{v} ,$$

d.h. $\text{div } \vec{v}(\vec{x}, t)$ ist die Volumenzunahme (unter der Strömung) pro Zeit- und Volumeneinheit bei \vec{x} zur Zeit t .

Beweis. Es ist formal bequem, V_t durch seine charakteristische Funktion

$$\chi(\vec{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{x} \in V_t, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

zu beschreiben. Offenbar ist $\chi(\vec{x}_t, t) = \chi(\vec{x}, 0)$, und durch Differentiation nach t wegen $\dot{\vec{x}}_t = \vec{v}$

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \chi = 0 \quad (6.3)$$

im Sinne der Distributionen. Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} d^3x \psi(\vec{x}, t) &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \chi(\vec{x}, t) \psi(\vec{x}, t) \\ &= \int d^3x \left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \\ &= \int d^3x \left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \chi \right) \quad (\text{nach (6.3)}) \\ &= \int d^3x \chi \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi \vec{v}) \right) \quad (\text{partiell integriert}) \\ &= \int_{V_t} d^3x \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{div}(\psi \vec{v}) \right). \end{aligned}$$

□

2. Erhaltung der Masse

$\rho(\vec{x}, t)$: Massendichte. Dann ist

$$\int_{V_t} d^3x \rho(\vec{x}, t)$$

unabhängig von t ; da (6.2) für beliebige V_t gilt, folgt die **Kontinuitätsgleichung**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (6.4)$$

Für ein **raumfestes** Volumen V ergibt sich daraus die Massenbilanz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho(\vec{x}, t) &= - \int_{\partial V} \rho \vec{v} \cdot \vec{d}o \\ \rho \vec{v} &= \text{Massenstromdichte.} \end{aligned}$$

Wir führen die **materielle** (zeitliche) **Ableitung** bezüglich der Strömung ein:

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Für ein beliebiges Feld $\psi(\vec{x}, t)$ beschreibt sie die zeitliche Änderung bzgl. eines mit dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$ mitbewegten Beobachters:

$$\frac{d}{dt} \psi(\vec{x}(t), t) = \left(\frac{D\psi}{Dt} \right) (\vec{x}(t), t).$$

Damit schreibt sich (6.4) als

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (6.5)$$

und das Transporttheorem (6.2) kann für massenbezogene Dichten formuliert werden: Für ein beliebiges Feld $\varphi(\vec{x}, t)$ gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} d^3x \rho \varphi = \int_{V_t} d^3x \rho \frac{D\varphi}{Dt}.$$

Beweis.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varphi) + \operatorname{div}(\rho\varphi\vec{v}) = \underbrace{\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v})\right)}_{=0}\varphi + \rho \underbrace{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\varphi\right)}_{\frac{D\varphi}{Dt}}.$$

□

3. Der Impulssatz

Die Massenstromdichte $\rho\vec{v}$ ist zugleich die **Impulsdichte** des Feldes. Wir nehmen an, dass auf jedes bewegte Gebiet V_t sowohl **Volumenkräfte** der Dichte $\rho\vec{F}$ wie auch **Oberflächenkräfte** wirken, die durch einen symmetrischen **Spannungstensor** $\sigma_{ik}(\vec{x}, t)$ beschrieben sind: $s_i(d\vec{o}) = \sigma_{ik} do_k$. (Äquivalent: $s_i(d\vec{o})$ ist von der Form $s_i(d\vec{o}) = \sigma_i(\vec{n})do$, vgl. S. 7). Dann lautet der **Impulssatz**:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_t} d^3x \rho v_i}_{\int_{V_t} d^3x \rho \frac{Dv_i}{Dt}} = \int_{V_t} d^3x \rho F_i + \underbrace{\int_{\partial V_t} \sigma_{ik} do_k}_{\int_{V_t} d^3x \sigma_{ik,k}},$$

also

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho F_i + \sigma_{ik,k}. \quad (6.6)$$

Aus der Form (6.2) des Transporttheorems ergibt sich hingegen für die linke Seite

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} d^3x \rho v_i = \int_{V_t} d^3x \left(\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho v_i \vec{v}) \right)$$

und, mit $t = 0$, die Impulsbilanz für ein **raumfestes** Volumen V :

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho v_i = - \int_{\partial V} \rho v_i v_k do_k + \int_V d^3x \rho F_i + \int_{\partial V} \sigma_{ik} do_k. \quad (6.7)$$

Der erste Term rechts beschreibt den Impulsstrom (i -Komponente) durch ∂V infolge Ein-/Austritt der Materie aus V : $\rho v_i v_k =$ (konvektive) Impulsstromdichte. Hingegen beschreibt der letzte Term den Impulsübertrag an die Materie in V ; $-\sigma_{ik}$: (konduktive) Impulsstromdichte. In differentieller Form lautet (6.7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} \rho v_i v_k + \rho F_i + \sigma_{ik,k}.$$

4. Der Drehimpulssatz

Nach der Voraussetzung über die Natur der Kräfte gilt

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_t} d^3x \rho (x_i v_k - x_k v_i)}_{\int_{V_t} d^3x \rho \frac{D}{Dt} (x_i v_k - x_k v_i)} = \int_{V_t} d^3x \rho (x_i F_k - x_k F_i) + \int_{\partial V_t} (x_i \sigma_{kl} - x_k \sigma_{il}) d\sigma_l . \quad (6.8)$$

Nun ist aber $Dx_i/Dt = v_i$, also nach (6.6)

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} (x_i v_k - x_k v_i) &= x_i \rho \frac{Dv_k}{Dt} - x_k \rho_i \frac{Dv_i}{Dt} \\ &= \rho (x_i F_k - x_k F_i) + \underbrace{(x_i \sigma_{kl,l} - x_k \sigma_{il,l})}_{\frac{\partial}{\partial x_l} (x_i \sigma_{kl} - x_k \sigma_{il})} + \sigma_{ik} - \sigma_{ki} \end{aligned}$$

Der Drehimpulssatz (6.8) verlangt also $\int_{V_t} d^3x (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) = 0$ und ist somit äquivalent zur Symmetrie des Spannungstensors, vgl. S. 7.

5. Der Energiesatz

Unter Verwendung des Impulssatzes ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \frac{\vec{v}^2}{2} d^3x &= \frac{1}{2} \int_{V_t} \rho \frac{D\vec{v}^2}{Dt} d^3x = \int_{V_t} \rho \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} d^3x \\ &= \int_{V_t} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} d^3x + \int_{V_t} \sigma_{ik,k} v_i d^3x \\ &= \int_{V_t} \rho \vec{F} \cdot \vec{v} d^3x - \int_{V_t} \sigma_{ik} D_{ik} d^3x + \int_{\partial V_t} v_i \sigma_{ik} d\sigma_k , \end{aligned} \quad (6.9)$$

wobei benutzt wurde $\sigma_{ik,k} v_i = (\sigma_{ik} v_i)_{,k} - \sigma_{ik} v_{i,k} = (\sigma_{ik} v_i)_{,k} - \sigma_{ik} D_{ik}$, (da $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$) und $D_{ik} = (v_{i,k} + v_{k,i})/2$ die **Verzerrungsgeschwindigkeit** ist, vgl. (1.5). In Worten: Die kinetische Energie nimmt pro Zeiteinheit zu (+) gemäss der Leistung der äusseren Kräfte (Volumenkräfte $\rho F_i d^3x$ in V_t und Oberflächenkräfte $\sigma_{ik} d\sigma_k$ auf ∂V_t); und ab (-) gemäss der Leistung der inneren Spannkraft, vgl. (2.1). Durch Anwendung von (6.2) ergibt sich für die linke Seite von (6.9)

$$\int_{V_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \text{div} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} \vec{v} \right) \right] d^3x ,$$

und damit für ein raumfestes Volumen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \frac{\vec{v}^2}{2} d^3x &= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\vec{v}^2}{2} \right) d^3x \\ &= - \int_{\partial V} \rho \frac{\vec{v}^2}{2} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} + \int_V \rho \vec{F} \cdot \vec{v} d^3x - \int_V \sigma_{ik} D_{ik} d^3x + \int_{\partial V} v_i \sigma_{ik} d\sigma_k . \end{aligned}$$

Verglichen mit (6.9) kommt hinzu die Abnahme infolge ausströmender Materie mit kinetischer Energiestromdichte $\rho(\vec{v}^2/2)\vec{v}$.

6. Einfache Bewegungsgleichungen

Falls sich σ_{ik} durch die Felder ρ, \vec{v} (und räumliche Ableitungen davon) ausdrücken lässt, so werden die Gleichungen (6.5, 6.6) zu **Bewegungsgleichungen** für die Felder ρ, \vec{v} : Sie bestimmen $\partial\rho/\partial t, \partial\vec{v}/\partial t$ durch die Felder zur Zeit t , also (im Prinzip) diese aus den Anfangsdaten $\rho(\vec{x}, 0), v(\vec{x}, 0)$ und allfälligen Randbedingungen (bei vorgegebenem \vec{F}). Diese Bewegungsgleichungen sind nicht linear, selbst wenn σ_{ik} eine lineare Funktion von (ρ, \vec{v}) sein sollte.

Wir zerlegen wie früher

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \hat{\sigma}_{ik}; \quad p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr} \sigma, \quad \operatorname{tr} \hat{\sigma} = 0.$$

Ideale Fluida

Diese ertragen auch ausserhalb des Gleichgewichts, s. (1.21), keine Schubspannungen: σ_{ik} muss (in jedem Koordinatensystem) diagonal sein, also

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}, \quad \hat{\sigma}_{ik} = 0.$$

Gl. (6.5, 6.6) sind dann die **Euler Gleichungen**

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \operatorname{div} \vec{v}, \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Für **kompresible** ideale Fluida benötigt man eine **Zustandsgleichung** $p = p(\rho)$ und erhält so

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \operatorname{div} \vec{v}, \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{F} - p'(\rho) \operatorname{grad} \rho. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Für **inkompresible** ideale Fluida (besser: volumenerhaltende Strömungen, da auch möglich für kompresible Fluida) ist $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, also

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p. \end{aligned} \tag{6.12}$$

Nach (6.12) ist $\rho = \text{const}$ längs der Bewegung jedes Teilchens. In inkompressiblen Flüssigkeiten ist jedoch $\rho(\vec{x}, t)$ überhaupt konstant; dann lauten die Euler Gleichungen einfach

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p. \tag{6.13}$$

Die typische Randbedingung für die Euler Gleichungen (falls auf einem begrenzten, festen Gebiet D formuliert) ist

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{auf } \partial D \tag{6.14}$$

(kein Fliessen durch den Rand hindurch).

Die Gleichungen (6.12), bzw. (6.13) bestimmen nicht nur (ρ, \vec{v}) , bzw. \vec{v} , sondern auch p , so wie die Zwangskräfte in einem mechanischen System bestimmt sind: betrachte stattdessen die Gleichung

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{F} + \vec{Z}$$

wo $\vec{Z}(\vec{x}, t)$ die Dichte der Zwangskräfte ist, die die Zwangsbedingung $\operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}, t) \equiv 0$ sicherstellen. Sie leisten keine virtuelle Arbeit:

$$\int_D \delta \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{Z}(\vec{x}) d^3x = 0 \quad (6.15)$$

für beliebige virtuelle Verschiebungen $\delta \vec{u}(\vec{x})$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \delta \vec{u}(\vec{x}) &= 0 & \text{in } D, \\ \delta \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{n} &= 0 & \text{auf } \partial D, \end{aligned}$$

mit \vec{n} : Aussennormale zu ∂D . Vektorfelder \vec{w} auf D können eindeutig zerlegt werden in ein quellenfreies Feld und ein Gradientenfeld:

Lemma. Sei

$$\mathcal{V} = \{ \vec{w} : D \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \int_D \vec{w}^2 d^3x < \infty \}$$

der Vektorraum der (quadratintegrierbaren) Vektorfelder auf D mit Skalarprodukt $(\vec{w}_1, \vec{w}_2) = \int_D \vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 d^3x$. Teilräume:

$$Q = \{ \vec{w} \in \mathcal{V} \mid \operatorname{div} \vec{w} = 0, \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \text{ auf } \partial D \}$$

(quellenfreie Vektorfelder, tangential am Rand);

$$\mathcal{G} = \{ \vec{w} \in \mathcal{V} \mid \vec{w} = \vec{\nabla} f \}$$

(Gradientenfelder). Dann ist (orthogonale direkte Summe)

$$\mathcal{V} = Q \oplus \mathcal{G}.$$

Beweis. Wir zeigen $Q = \mathcal{G}^\perp$: $\vec{w} \in \mathcal{G}^\perp$ bedeutet

$$0 = (\vec{w}, \vec{\nabla} f) = \int_D \vec{w} \cdot \vec{\nabla} f d^3x = \int_{\partial D} f \vec{w} \cdot d\vec{o} - \int_D f \operatorname{div} \vec{w} d^3x$$

für alle $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ (partielle Integration). Dies gilt genau dann, falls $\vec{w} \in Q$. □

Auf (6.15) angewandt folgt $\vec{Z} = -\operatorname{grad} p$ und damit (6.13). Der Druck p kann aus (6.13) eliminiert werden, ähnlich den Zwangskräften im d'Alembertschen Prinzip. Sei $P : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ der orthogonale Projektor auf Q . Die Projektion $P\vec{w}$ kann wie folgt bestimmt werden: Aus $\vec{w} = P\vec{w} + \vec{\nabla} f$ folgen

$$\begin{aligned} \Delta f &= \operatorname{div} \vec{w} & \text{in } D, \\ \frac{\partial f}{\partial n} &= \vec{w} \cdot \vec{n} & \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Neumannschen Randwertproblems liefert f (bis auf additive Konstante) und daraus $P\vec{w} = \vec{w} - \vec{\nabla} f$. Beachte, dass $(P\vec{w})(\vec{x}')$ vom gesamten Feld $\vec{w}(\vec{x}')$, ($\vec{x}' \in D$), abhängt.

In der Euler Gleichung (6.13) ist $P\vec{v} = \vec{v}$, $P\vec{\nabla} p = 0$, also liefert Anwendung von P darauf

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -P((\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{F}) :$$

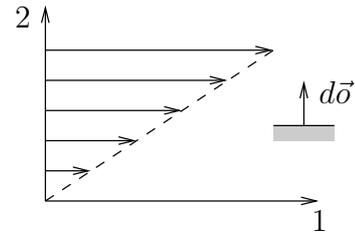
Der Druck p ist aus der Bewegungsgleichung eliminiert worden, allerdings ist diese nicht mehr lokal. Im Nachhinein kann p bestimmt werden:

$$\frac{\vec{\nabla} p}{\rho} = (1 - P)((\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{F}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - \vec{F} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Reale Fluida

Innere Reibung (Viskosität) äussert sich in **Spannungen**, hervorgerufen durch Geschwindigkeits**gradienten**. Ein Beispiel ist die (inkompressible) Couette-Strömung:

$$\vec{v} = (\lambda x_2, 0, 0) . \quad (6.16)$$



Auf $d\vec{\sigma} = (0, 1, 0)$ wirkt dann ausser dem Druck $(0, -p, 0)$ auch eine **Schubspannung**

$$\sigma_{12} = \eta \cdot \lambda = \eta \cdot v_{1,2} , \quad (6.17)$$

η : dynamische Viskosität ≥ 0 .

Die allgemeinste Abweichung vom statischen Verhalten $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$, welche linear in $v_{i,k}$ und mit Drehungen verträglich ist, lautet (vgl. (2.5))

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= -p\delta_{ik} + \eta(v_{i,k} + v_{k,i}) + \zeta' v_{l,l}\delta_{ik} \\ &= (\zeta v_{l,l} - p) \delta_{ik} + \eta(v_{i,k} + v_{k,i} - \frac{2}{3}v_{l,l}\delta_{ik}) \end{aligned} \quad (6.18)$$

($\zeta = \zeta' + \frac{2\eta}{3}$), wobei der unbestimmte Faktor η so eingeführt wurde, dass er im Fall (6.16) mit (6.17) übereinstimmt. ζ heisst Volumenviskosität.

Nicht nur für Flüssigkeiten ($\rho = \text{const}$), sondern auch für Gase sind ζ, η unabhängig von der Dichte. Wir fassen ζ, η deshalb als Materialkonstanten auf.

Mit einer Zustandsgleichung $p = p(\rho)$ ergeben sich so die **Navier-Stokes Gleichungen**

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= -\rho \operatorname{div} \vec{v} , \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \vec{v} + (\zeta + \frac{\eta}{3}) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} \end{aligned} \quad (6.19)$$

und für **inkompressible Strömungen**:

$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} &= 0 , \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 , \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{F} - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \vec{v} \end{aligned} \quad (6.20)$$

(inkompressible Navier-Stokes Gleichungen). Auch hier lässt sich p aus den Bewegungsgleichungen eliminieren. Die Randbedingung lautet

$$\vec{v} = 0 \quad \text{auf } \partial D \quad (6.21)$$

(Fluidum haftet am Rand).

Bemerkungen. 1) Sowohl Flüssigkeiten wie Gase sind Fluida. Bezüglich den hydrodynamischen Bewegungsgleichungen unterscheiden sie sich bloss in den Ordnungen der vorkommenden Grössen. Beispiel: $\rho, \rho(dp/d\rho)$ (inverse Kompressibilität) und η stehen bei Wasser/Luft im Verhältnis $\sim 800, 16000$ und 55 .

2) Sei V (bzw. U) die Grössenordnung der Änderungen von v (bzw. des Potentials der äusseren Kräfte). Bei stationären Strömungen ist die Kompressibilität vernachlässigbar (ohne Begründung), falls

$$V^2, U \ll c^2 := \frac{dp}{d\rho},$$

wobei c die Schallgeschwindigkeit ist (s. später; V/c ist die Mach-Zahl). Bei nicht stationären kommt hinzu: $L/T \ll c$, wobei L und T charakteristische Längen und Zeiten sind, über welche sich die Strömung merklich ändert. Insbesondere verlangt die Behandlung des Schalls nach einer positiven Kompressibilität.

3) Die Viskosität ist am Rand nie vernachlässigbar und macht sich von dort aus manchmal auch im Innern bemerkbar (s. später).

4) Bei Volumenkräften, die nur vom Ort abhängen ($\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$), sind die Euler-Gleichungen zeitumkehrinvariant: Mit $(\rho(\vec{x}, t), \vec{v}(\vec{x}, t))$ ist auch $(\rho(\vec{x}, -t), -\vec{v}(\vec{x}, -t))$ eine Lösung. Nicht so für die Navier-Stokes Gleichungen.

5) Für komplexere fluide Systeme wird man weitere Zustandsfunktionen (Temperatur, Konzentrationen bei Gemischen, usw.) heranziehen, sowie entsprechende Transportgesetze (Wärmeleitung, Diffusion, usw.) in die Bewegungsgleichung einbauen müssen.

7. Ideale Fluida

1. Der Satz von Bernoulli

Die (massenbezogene) Kraftdichte sei ein Gradient, $\vec{F} = -\text{grad} U$, und das Druckkraftpotential P definiert durch

$$P = \begin{cases} \int^{\rho} \frac{p'(\tau)}{\tau} d\tau & \text{im kompressiblen Fall: } p = p(\rho) , \\ p/\rho & \text{im inkompressiblen Fall: } \rho = \text{const} , \end{cases} \quad (7.1)$$

vgl. (1.23). Dann ist $\vec{\nabla} P = \rho^{-1} \vec{\nabla} p$ in beiden Fällen und die Euler-Gleichung lautet

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad}(U + P) . \quad (7.2)$$

Satz

i) Im **stationären** Fall ($\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$, $U = U(\vec{x})$):

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + U + P \right) = 0 ,$$

d.h. die Grösse in Klammern ist konstant längs der Stromlinien.

ii) Die Strömung ist **wirbelfrei** falls $\text{rot } \vec{v} = 0$. Dann ist

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = -\text{grad } \varphi(\vec{x}, t) \quad (7.3)$$

(**Potentialströmung**). In diesem Fall ist:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + U + P = c(t) \quad (7.4)$$

für eine Funktion $c(t)$.

iii) Für eine **stationäre** und **wirbelfreie** Strömung:

$$\frac{\vec{v}^2}{2} + U + P = \text{const} \quad (\text{alle } \vec{x}) . \quad (7.5)$$

Beweis.

i) folgt durch skalare Multiplikation von (7.2) mit \vec{v} .

ii) Identität $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} - \vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}$. Für $\vec{v} = -\text{grad } \varphi$, also

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{v}}{Dt} &= -\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{grad } \frac{\vec{v}^2}{2} = -\text{grad}(U + P) , \\ \text{grad} \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\vec{v}^2}{2} + U + P \right) &= 0 . \end{aligned}$$

iii) folgt aus (ii). □

Bei Potentialströmungen kann man das Potential umeichen, $\varphi(\vec{x}, t) \rightarrow \varphi(\vec{x}, t) - \int^t c(\tau) d\tau$, und damit $c(t)$ in (7.4) zu Null machen. So folgen die (skalaren) **Euler-Bernoulli Gleichungen**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \operatorname{grad} \varphi) \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \varphi)^2 + U + P. \quad (7.7)$$

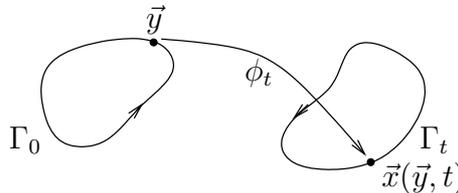
Für inkompressible Fluida ist $\rho = \text{const}$ und $\Delta \varphi = 0$.

2. Wirbel

Strömung $\vec{v}(\vec{x}, t)$, Γ_t eine von der Strömung transportierte geschlossene Kurve. Dann ist

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\oint_{\Gamma_t} \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{x}}_{\text{Zirkulation}} = \oint_{\Gamma_t} \frac{D\vec{v}}{Dt}(\vec{x}, t) \cdot d\vec{x}. \quad (7.8)$$

Beweis.



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma_t} v_i(\vec{x}, t) dx_i &= \frac{d}{dt} \oint_{\Gamma_0} v_i(\vec{x}(\vec{y}, t), t) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dy_k \\ &= \underbrace{\oint_{\Gamma_0} \frac{Dv_i}{Dt} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial y_k} dy_k}_{\oint_{\Gamma_t} \frac{Dv_i}{Dt} \cdot dx_i} + \underbrace{\oint_{\Gamma_0} v_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_k \partial t} dy_k}_{\oint_{\Gamma_0} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} v_i^2 dy_k = 0} \end{aligned}$$

□

Nach den Euler Gleichungen (7.2) ist $D\vec{v}/Dt$ ein Gradient, falls die Kraftdichte \vec{F} ein Gradient ist.

Der Wirbelsatz von Kelvin

Falls $D\vec{v}/Dt$ ein Gradient ist, so ist die Zirkulation

$$Z(\Gamma_t) \equiv \oint_{\Gamma_t} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \text{const} \quad (7.9)$$

für jede von der Strömung transportierte geschlossene Kurve Γ_t .

Korollar. Falls die Strömung zur Zeit $t = 0$ wirbelfrei ist, d.h.:

$$\int_{\Gamma} \vec{v}(\vec{x}, 0) \cdot d\vec{x} = 0 \quad \text{für jede Schleife } \Gamma,$$

oder

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}, 0) = 0,$$

so bleibt sie **dauernd wirbelfrei**: $\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}, t) = 0$ für alle \vec{x}, t .

Beweis. (7.9) folgt aus (7.8), denn $\oint_{\Gamma_t} D\vec{v}/Dt \cdot d\vec{x} = 0$, weil $D\vec{v}/Dt$ nach Annahme ein Gradient ist. Das Korollar folgt aus dem Satz von Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

wobei F eine beliebige Fläche mit $\partial F = \Gamma$ ist. □

Als **Wirbelfeld** von $\vec{v}(\vec{x}, t)$ bezeichnen wir das Vektorfeld

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \operatorname{rot} \vec{v}(\vec{x}, t).$$

Falls $D\vec{v}/Dt$ ein Gradientenfeld ist, so gilt

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \wedge \vec{\omega}), \quad (7.10)$$

woraus das Korollar auch analytisch folgt. Zum Beweis von (7.10), schreibe

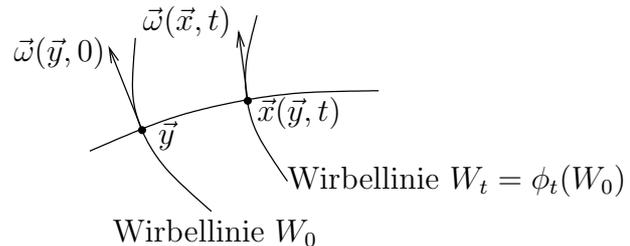
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{D\vec{v}}{Dt} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \frac{D\vec{v}}{Dt} - \vec{\nabla} \frac{v^2}{2} + \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v}$$

und wende rot darauf an.

Als **Wirbellinien** (zur Zeit t) bezeichnen wir Integralkurven des Wirbelfeldes $\vec{\omega}$ (zur Zeit t); als **Wirbelflächen** Flächen mit Normalen $d\vec{\sigma} \perp \vec{\omega}$.

Der Wirbelsatz von Helmholtz

Sei $D\vec{v}/Dt$ ein Gradient. Dann werden die **Wirbellinien mit der Strömung transportiert**: Die Wirbellinie zur Zeit t durch $\vec{x}(\vec{y}, t)$ ist die Transportierte der Wirbellinie durch \vec{y} zur Zeit $t = 0$.



Beweis. Eine Fläche ist eine Wirbelfläche genau dann falls $Z(\partial S) \equiv \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = 0$ für jede Teilfläche S . Nach dem Satz von Kelvin werden somit Wirbelflächen durch die Strömung ϕ_t in ebensolche abgebildet. Desgleichen für Wirbellinien, da sie Schnitte von zwei Wirbelflächen sind. □

Alternativer Beweis. Sei $W_t = \phi_t(W_0)$ die Transportierte der Wirbellinie W_0 durch \vec{y} zur Zeit $t = 0$. Zu zeigen ist, dass W_t ebenfalls eine Wirbellinie ist (durch $\vec{x} = \phi_t(\vec{y})$ zur Zeit t), d.h. dass $\vec{\omega}(\vec{x}, t)$ tangential ist an W_t in \vec{x} . Sei $T = D\phi_t(\vec{y})$ die Tangentialabbildung von ϕ_t im Punkt \vec{y} , und seien \vec{a}, \vec{b} Tangentialvektoren in \vec{y} . Die Zirkulation (zur Zeit $t = 0$) eines durch $\varepsilon\vec{a}, \varepsilon\vec{b}$ in \vec{y} aufgespannten Parallelogramms ist

$$Z(0) = \det(\vec{\omega}(\vec{y}, 0), \varepsilon\vec{a}, \varepsilon\vec{b}) + O(\varepsilon^3), \quad (\varepsilon \rightarrow 0).$$

Zur Zeit t gilt für das mitgeführte Parallelogramm $Z(t) = \det(\vec{\omega}(\vec{x}, t), \varepsilon T\vec{a}, \varepsilon T\vec{b}) + O(\varepsilon^3)$, wo $T\vec{a}, T\vec{b}$ die transportierten Tangentialvektoren sind. Wegen $Z(0) = Z(t)$ (Satz von Kelvin) gilt

$$\det(\vec{\omega}(\vec{y}, 0), \vec{a}, \vec{b}) = \det(\vec{\omega}(\vec{x}, t), T\vec{a}, T\vec{b}).$$

Dann ist

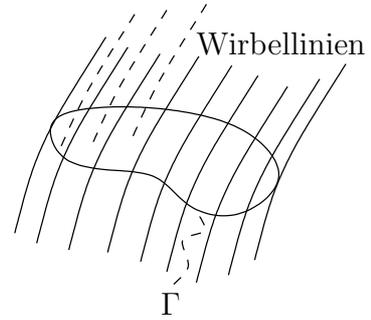
$$\det(\vec{\omega}(\vec{x}, t), T\vec{\omega}(\vec{y}, 0), T\vec{b}) = 0$$

für alle Tangentialvektoren $T\vec{b}$ in \vec{x} . Es folgt $\vec{\omega}(\vec{x}, t) \parallel T\vec{\omega}(\vec{y}, 0)$. □

Anwendung auf Wirbelröhren (Wirbelfläche, die eine nicht zusammenziehbare Schleife enthält):

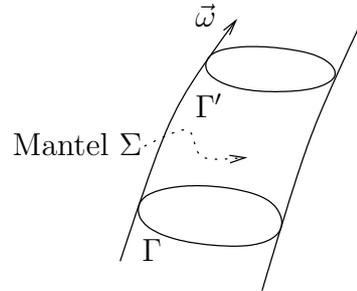
$$Z = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x}.$$

- i) Z ist unabhängig von der umschliessenden Schleife Γ .
- ii) Z ist unabhängig von t .



denn: i) Γ und Γ' beranden einen Teil Σ der Wirbelröhre: $\Gamma - \Gamma' = \partial\Sigma$. Nach Stokes ist

$$Z_{\Gamma} - Z_{\Gamma'} = \int_{\Sigma} \vec{\omega} \cdot d\vec{\sigma} = 0.$$



ii) folgt aus (7.9).

Schliesslich kann (7.10) auch geschrieben werden als

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}, \quad (7.11)$$

woraus auch der Helmholtz'sche Wirbelsatz hergeleitet werden kann. Zum Beweis von (7.11), beachte die Identität

$$\text{rot}(\vec{v} \wedge \vec{\omega}) = \underbrace{(\text{div} \vec{\omega}) \vec{v}}_{=0} - (\text{div} \vec{v}) \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = -(\text{div} \vec{v}) \vec{\omega} + (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}, \\ \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) &= \frac{1}{\rho} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} \underbrace{\frac{D\rho}{Dt}}_{-\rho \text{div} \vec{v}} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}. \end{aligned}$$

3. Zwei-dimensionale Wirbeldynamik

Nun sei D ein (einfach zusammenhängendes) Gebiet in der Ebene \mathbb{R}^2 , und die Flüssigkeit sei inkompressibel, also $\text{div} \vec{v} = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0$. Für

$$\vec{v}^{\perp} = (-v_2, v_1) = -\varepsilon \vec{v}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt somit

$$\partial_1 v_2^{\perp} - \partial_2 v_1^{\perp} = \text{rot} \vec{v}^{\perp} = 0$$

($\text{rot} \vec{v}$ ist ein Skalarfeld; falls man sich \vec{v} als ein Geschwindigkeitsfeld $\underline{v} = (\vec{v}(x_1, x_2), 0)$ auf \mathbb{R}^3 vorstellt, so ist $\text{rot} \underline{v} = (0, 0, \text{rot} \vec{v})$.) Damit ist \vec{v}^{\perp} ein Gradientenfeld:

$$\begin{aligned} \vec{v}^{\perp} &= \text{grad} \psi, & \vec{v} &= \varepsilon \text{grad} \psi, \\ v_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, & v_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

($\psi = \psi(\vec{x})$ heisst **Stromfunktion**). \vec{v} selbst ist ein Hamiltonsches Vektorfeld: Die Bewegung eines Teilchens, $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}, t)$, ist gegeben durch die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

$$\dot{\vec{x}} = \varepsilon \operatorname{grad} \psi(\vec{x}, t)$$

zur **Hamiltonfunktion** $\psi = \psi(\vec{x}, t)$.

Die Randbedingung $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ auf ∂D bedeutet

$$\psi = \text{const} \quad (\text{z.B.} = 0) \quad \text{auf } \partial D .$$

Nun ist

$$\Delta \psi = -\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\operatorname{rot} \vec{v} = -\omega \quad :$$

ψ ist durch ω bestimmt. Allgemein kann dies durch Einführung der **Greensche Funktion** zum Ausdruck gebracht werden: Sie stellt die Stromfunktion für einen **Punkt vortex** der Stärke -1 bei \vec{y} dar:

$$\begin{aligned} G &: \bar{D} \times D \rightarrow \mathbb{R} , \\ \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) &= \delta(\vec{x} - \vec{y}) , \\ G(\vec{x}, \vec{y}) &= 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \partial D . \end{aligned}$$

Dann ist

$$\psi(\vec{x}) = - \int_D G(\vec{x}, \vec{y}) \omega(\vec{y}) d^2 y . \quad (7.13)$$

Die Zeitentwicklung von ω ist durch Mitschleppen im Geschwindigkeitsfeld gegeben. Gleichung (7.11) lautet nämlich

$$\frac{D\omega}{Dt} = 0 , \quad (7.14)$$

d.h.

$$\omega(\phi_t(\vec{x}), t) = \omega(\vec{x}, 0) . \quad (7.15)$$

Wir betrachten zunächst $D = \mathbb{R}^2$. Dann ist

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{2\pi} \log |\vec{x} - \vec{y}| . \quad (7.16)$$

Beweis. Für $G(\vec{x}) = G(\vec{x}, 0)$, so definiert, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} G &= \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{x}}{r^2} , \quad (r = |\vec{x}|) , \\ \Delta G = \operatorname{div} \operatorname{grad} G &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2\vec{x}}{r^3} \cdot \frac{\vec{x}}{r} \right) = 0 , \quad (\vec{x} \neq 0) , \end{aligned}$$

ferner für $V \ni 0$

$$\int_V \Delta G d^2 x = \int_{\partial V} \operatorname{grad} G \cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial V} \frac{\vec{x} \cdot d\vec{\sigma}}{r^2} = 1 ,$$

denn statt ∂V kann man einen Kreis um $\vec{x} = 0$ wählen (Satz von Gauss), wo $\vec{x} \cdot d\vec{\sigma} = r d\sigma$.

□

Dynamik eines Wirbels: Jede kreissymmetrische Anfangsbedingung $\omega(\vec{x}, 0)$ liefert eine stationäre Lösung $\omega(\vec{x}, t) = \omega(\vec{x}, 0)$, denn das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} (7.12, 7.13) ist azimutal und erfüllt somit (7.14). Der Grenzfall eines Punktvortex $\omega(\vec{x}, t) = \delta(\vec{x})$ ist etwas formal, da $D\omega/Dt$ bei $\vec{x} = 0$ nicht definiert ist. Er bleibt fest unter seinem stationären Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \frac{1}{2\pi} \frac{\vec{x}^\perp}{r^2} .$$

Dynamik endlich vieler Wirbel:

$$\omega(\vec{x}, 0) = \sum_{j=1}^N \omega_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) .$$

Nach (7.15) ist die Lösung

$$\omega(\vec{x}, t) = \sum_{j=1}^N \omega_j \delta(\vec{x} - \vec{x}_j(t)) , \quad (7.17)$$

wo $\vec{x}_j(t)$ die Bahn des j -ten Wirbels im Feld \vec{v} ist. Nach (7.13) ist

$$\psi(\vec{x}, t) = - \sum_{j=1}^N \omega_j G(\vec{x}, \vec{x}_j(t))$$

also, nach Weglassen der Selbstwechselwirkung,

$$\dot{\vec{x}}_i = -\varepsilon \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \omega_j \text{grad } G(\vec{x}_i, \vec{x}_j) ,$$

oder, als Hamiltonsches System,

$$\dot{\vec{x}} = J \frac{\partial H}{\partial \vec{x}}$$

mit $\vec{x} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$,

$$J = \left(\begin{array}{c|c} \omega_1^{-1} \varepsilon & \\ \hline & \omega_2^{-1} \varepsilon \\ & \ddots \end{array} \right) ,$$

$$H = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i < j} \omega_i \omega_j \log |\vec{x}_i - \vec{x}_j| . \quad (7.18)$$

Erhaltungssätze. H ist invariant unter Translationen ($\vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i + \lambda \vec{a}$) und Drehungen ($\vec{x}_i \mapsto R(\lambda) \vec{x}_i$). Diese werden erzeugt durch

$$\frac{dx}{d\lambda} = J \frac{\partial F}{\partial x}$$

mit

$$F = - \sum_{i=1}^N \omega_i \vec{x}_i \cdot \varepsilon \vec{a} , \quad \text{bzw.} \quad F = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i \vec{x}_i^2 ,$$

denn

$$\omega_i^{-1} \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_i} = \vec{a}, \quad \text{bzw.} \quad \omega_i^{-1} \varepsilon \frac{\partial F}{\partial \vec{x}_i} = -\varepsilon \vec{x}_i = \vec{x}_i^\perp.$$

Erhalten sind somit ‘‘Schwerpunkt’’ und ‘‘Trägheitsmoment’’ der Wirbel,

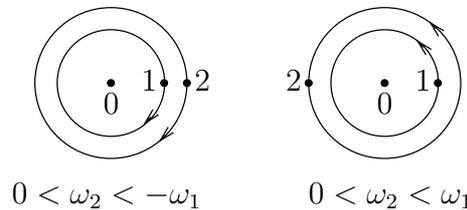
$$\vec{c} = \sum_{i=1}^N \omega_i \vec{x}_i, \quad I = \sum_{i=1}^N \omega_i \vec{x}_i^2,$$

sowie die Hamiltonfunktion (7.18).

Der Fall $N = 2$. Falls $\omega_1 + \omega_2 \neq 0$, so lässt sich durch eine Translation $\vec{x}_i \mapsto \vec{x}_i + \vec{a}$ erreichen, dass $\vec{c} = 0$. Mit

$$\omega = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}, \quad (\text{‘‘reduzierte Wirbelstärke’’})$$

ist $\omega_1 \vec{x}_1 = \omega(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$, $\omega_2 \vec{x}_2 = -\omega(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)$, $I = \omega(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2$: Die beiden Wirbel kreisen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt



Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich aus

$$\dot{\vec{x}}_1 = \frac{\omega_2}{2\pi} \left(\frac{\vec{x}_1 - \vec{x}_2}{|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2} \right)^\perp = \frac{\omega_2}{2\pi d^2} (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^\perp = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi d^2} \vec{x}_1^\perp$$

zu

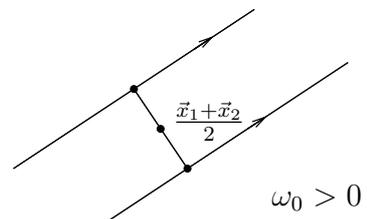
$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi d^2}, \quad d = |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|.$$

Falls $\omega_1 + \omega_2 = 0$, d.h. $\omega_1 = \omega_0$, $\omega_2 = -\omega_0$, so sind

$$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \frac{\vec{c}}{\omega_0}, \quad (\vec{x}_1 - \vec{x}_2) \cdot \frac{(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)}{2} = \frac{\vec{x}_1^2 - \vec{x}_2^2}{2} = \frac{I}{2\omega_0}$$

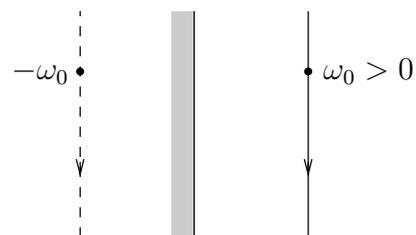
konstant: Die Wirbel laufen entlang paralleler Geraden mit Geschwindigkeit

$$V = \frac{\omega_0}{2\pi d}.$$



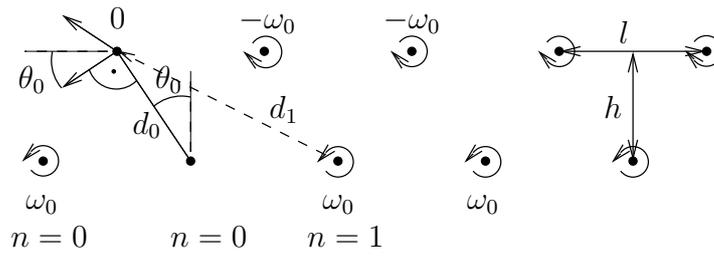
Als weiteres Beispiel, sei $D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$ die Halbebene. Man erhält G , und damit die Stromfunktion $\psi(\vec{x}) = -G(\vec{x}, \vec{y})$ eines Vortex bei \vec{y} , mit Hilfe der **Spiegelungsmethode**:

$$2\pi G(\vec{x}, \vec{y}) = \log |\vec{x} - \vec{y}| - \log |\vec{x} - \vec{y}^*|, \\ \vec{y} = (y_1, y_2), \quad \vec{y}^* = (-y_1, y_2).$$



Dadurch ist nämlich $\psi = \text{const} = 0$ auf ∂D erfüllt.

Zum Schluss, betrachte folgende Anordnung aus unendlich vielen Punktwirbeln.



Alle Wirbel der **Karmanschen Strasse** bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_0$ des Wirbels "0", wie sie durch (7.17) gegeben ist. Darin heben sich die Beiträge der Wirbel $j \neq 0$ der oberen Strassenseite paarweise weg, die der unteren addieren sich zu $\dot{\vec{x}}_0 = (v, 0)$ mit

$$v = -\frac{\omega_0}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{d_n} \cdot 2 \cos \theta_n$$

mit $\cos \theta_n = h/d_n$, $d_n^2 = h^2 + (n + \frac{1}{2})^2 l^2$. Also

$$v = -\frac{\omega_0 h}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h^2 + (n + \frac{1}{2})^2 l^2} = -\frac{\omega_0}{2l} \operatorname{th} \frac{h}{l} \pi. \quad (7.19)$$

Die Summe ist im Wesentlichen die Partialbruchzerlegung von $\operatorname{th} z (= -i \tan(iz))$:

$$\operatorname{th} z = 2z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 + \pi^2 (n + \frac{1}{2})^2}.$$

Bemerkungen. 1) Die Greensche Funktion (7.16) liefert die Geschwindigkeit Null im Unendlichen. Zum vorliegenden Geschwindigkeitsfeld kann aber ein homogenes Feld überlagert werden.

2) Stabil ist die Wirbelstrasse nur für $\operatorname{sh}(\pi h/l) = 1$, d.h. für $h/l = 0.28$ (ohne Beweis).

8. Schwingungen um das Gleichgewicht

Linearisierung der Eulerschen Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\rho \vec{v}), \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} p(\rho)\end{aligned}$$

um eine hydrostatische Gleichgewichtslösung.

1. Schallwellen

Ideales, kompressibles Fluidum, $\vec{F} = 0$. Gleichgewicht: $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $\vec{v} = 0$. In den Eulerschen Gleichungen setzen wir $\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}$ und behalten nur Glieder **1. Ordnung** in $\tilde{\rho}$ und \vec{v} . Die so linearisierten Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} \vec{v}, \quad (8.1)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -p'(\rho_0) \operatorname{grad} \tilde{\rho}. \quad (8.2)$$

Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} = -\operatorname{div}\left(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = p'(\rho_0) \Delta \tilde{\rho},$$

d.h.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} - \Delta \tilde{\rho} = 0; \quad c = \sqrt{p'(\rho_0)}.$$

c erweist sich als die Geschwindigkeit der Wellen (**Schallgeschwindigkeit**). Für \vec{v} ergibt sich im allgemeinen nicht dieselbe Wellengleichung, sondern

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -c^2 \operatorname{grad} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = c^2 \rho_0 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}.$$

Aus (8.2) folgt $\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$. Gilt sogar $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, so folgt aus der Identität $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} = \Delta \vec{v} + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v}$ auch

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - \Delta \vec{v} = 0.$$

Die Wellengleichungen sind aber kein Ersatz für die Bewegungsgleichungen (8.1, 8.2), denn sie liefern nicht die Beziehung zwischen ρ und \vec{v} . Mit dem Ansatz (ebene Wellen)

$$\tilde{\rho} = \rho_0 a e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{v} = \vec{b} e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$$

lauten Letztere:

$$\begin{aligned}-i\omega \rho_0 a &= -\rho_0 i \vec{k} \cdot \vec{b}, \\ -i\omega \rho_0 \vec{b} &= -c^2 i \vec{k} \rho_0 a.\end{aligned}$$

\vec{b} ist also **longitudinal**, $\vec{b} = b\vec{e}$ für $\vec{k} = k\vec{e}$, ($|\vec{e}| = 1$), und man erhält das homogene System für a und b :

$$\begin{aligned}\omega a - kb &= 0, \\ c^2 ka - \omega b &= 0.\end{aligned}$$

Die Determinante $-\omega^2 + k^2 c^2$ muss verschwinden. Dies liefert wieder $\omega = k \cdot c$: $c =$ Phasengeschwindigkeit, keine Dispersion; ferner

$$b = \frac{\omega}{k} a = c \cdot a.$$

Nach Voraussetzung ist $\tilde{\rho} \ll \rho_0$ und bedeutet: $a \ll 1$, also $b \ll c$, $|\vec{v}| \ll c$. Dann kann man verifizieren, dass die weggelassenen Terme 2. Ordnung klein sind gegenüber jenen 1. Ordnung; z.B.

$$v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sim kb^2, \quad \frac{\partial v}{\partial t} \sim \omega b$$

im Verhältnis $kb^2/\omega b = b/c \ll 1$.

Für die Zustandsgleichung $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^n$ ist $c^2 = p'(\rho_0) = n(p_0/\rho_0)$.

isotherm: $n = 1$;

adiabatisch: $n = c_p/c_v$, $c_p - c_v = R$, $c_v = \frac{f}{2}R$ für Moleküle mit f Freiheitsgraden; für ein starres 2-atomiges Molekül (Translation + Drehungen) $f = 3 + 2 = 5$, $n = 7/5 = 1.4$.

Beispiel. Luft: $\rho_0 \cong 1.3 \text{ kg/m}^3$, $p_0 \cong 10^5 \text{ kg/ms}^2$.

$$\text{isotherm: } c = 280 \text{ m/s}; \quad \text{adiabatisch: } c = 332 \text{ m/s}.$$

Der zweite Wert stimmt gut mit der Beobachtung überein.

Bemerkung. Nebst den Geschwindigkeiten des Schalls c und der Luft v ist noch die der Gasmoleküle u zu erwähnen. Nach dem idealen Gasgesetz $\rho = p\mu/RT = pm/kT$ (μ : molare Masse; m : Masse eines Moleküls) und dem Äquipartitionsgesetz $(1/2)m\langle \vec{u}^2 \rangle = (3/2)kT$ ist

$$c^2 = n \frac{kT}{m} = n \frac{\langle \vec{u}^2 \rangle}{3},$$

also c von der Grössenordnung von u .

2. Die Jeans-Instabilität

Ideales, kompressibles Fluidum mit **Gravitationskräften**:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\text{grad } U, \\ U(\vec{x}, t) &= -G \int d^3 y \frac{\rho(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (G: \text{Gravitationskonstante}), \\ \Delta U &= 4\pi G \rho.\end{aligned}\tag{8.3}$$

Als Gleichgewichtslösung wählen wir eine konstante Dichte ρ_0 , obschon das etwas problematisch ist: Einerseits möchte man folgern, dass $\vec{F} = 0$ (also $U = \text{const}$), weil keine

Richtung ausgezeichnet ist; andererseits ist $U = \text{const}$ keine Lösung von (8.3). Ausweg: Wir wenden (8.3) nur auf die Fluktuationen \tilde{U} , $\tilde{\rho}$ an. Alternativ: Ersetzt man das Gravitationspotential $-G|\vec{x}|^{-1}$ durch ein kurzreichweites (Yukawa) Potential $-G|\vec{x}|^{-1}e^{-\varepsilon|\vec{x}|}$, so wird aus (8.3) $\Delta U - \varepsilon^2 U = 4\pi G\rho$, was für $\rho = \rho_0$ eine Lösung $U = \text{const}$ zulässt; am Schluss der Rechnung: $\varepsilon \downarrow 0$.

Anstelle von (8.2) ergibt sich nun

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\rho_0 \text{grad } \tilde{U} - p'(\rho_0) \text{grad } \tilde{\rho},$$

(da U linear in ρ ist), also die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\rho}}{\partial t^2} &= -\text{div}\left(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = \rho_0 \Delta \tilde{U} + p'(\rho_0) \Delta \tilde{\rho} \\ &= \rho_0 \cdot 4\pi G \tilde{\rho} + p'(\rho_0) \Delta \tilde{\rho}, \end{aligned}$$

und der Wellenansatz $\tilde{\rho} \sim e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}$ führt auf

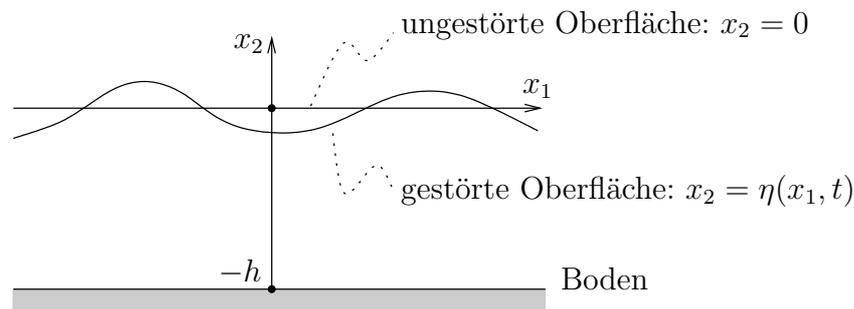
$$-\omega^2 = 4\pi G\rho_0 - k^2 p'(\rho_0).$$

Für

$$k^2 < \frac{4\pi G\rho_0}{p'(\rho_0)}, \quad \text{bzw.} \quad \lambda = \frac{2\pi}{k} > c\sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} \equiv \lambda_{\text{Jeans}}$$

wird $\omega^2 < 0$: Es treten zeitlich exponentiell wachsende Lösungen auf. Die physikalische Ursache dieser Instabilität ist, dass eine Kompression zwar die elastische Energie des Mediums erhöht, gleichzeitig aber wegen der Anziehung aller Massen die potentielle Energie der Gravitation erniedrigt. Anwendungen in der Astrophysik: Sternbildung aus Gaswolken (nur solche mit Durchmesser $\gtrsim \lambda_{\text{Jeans}}$ bilden Sterne; Galaxienbildung im frühen Universum, s. Übungen).

3. Schwerewellen im Wasser



Ideales, inkompressibles Fluidum (Dichte ρ). Gravitation:

$$\vec{F} = -\text{grad } U, \quad U = gx_2$$

Strömung **wirbelfrei**: $\vec{v} = -\text{grad } \varphi$. Die **Bewegungsgleichungen** sind die Euler-Bernoulli Gleichungen (7.6, 7.7). Indem wir φ umeichen zu $\varphi + p_0 t / \rho$ wird p zur Druckdifferenz

zum Aussendruck p_0 der Atmosphäre. Die **Randbedingungen** sind $v_2 = 0$ (Boden) und $p = 0$ (Oberfläche $x_2 = \eta(x_1, t)$). Da Teilchen an der Oberfläche stets dort bleiben, gilt $D\eta/Dt = v_2(x_1, \eta(x_1, t), t)$.

Die linearisierte Form dieser Gleichungen ist

$$\Delta\varphi = 0 ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = U + \frac{p}{\rho} \quad (8.4)$$

mit Randbedingungen:

$$\text{Boden:} \quad -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, -h, t) = 0 \quad (8.5)$$

$$\text{Oberfläche:} \quad \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_1, \eta(x_1, t), t)} = g\eta(x_1, t) . \quad (8.6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_1, 0, t) \text{ (linearisiert)}$$

Ausserdem gilt für $D\eta/Dt = \partial\eta/\partial t + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\eta \cong \partial\eta/\partial t$, also

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = v_2(x_1, 0, t)$$

und folglich

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(x_1, 0, t) = gv_2(x_1, 0, t) = -g\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(x_1, 0, t) . \quad (8.7)$$

Wir konstruieren eine Lösung fester Frequenz und Wellenzahl. Der Ansatz

$$\varphi(x_1, x_2, t) = u(x_2) \cdot e^{i(kx_1 - \omega t)} \quad (8.8)$$

soll $\Delta\varphi = 0$ lösen mit den Randbedingungen (8.5, 8.7), d.h.

$$u'' - k^2u = 0 , \quad (8.9)$$

$$u'(-h) = 0 , \quad \omega^2u(0) = gu'(0) . \quad (8.10)$$

(lineares Randwertproblem). Dann ist $\vec{v}(\vec{x}, t)$ bestimmt durch $\vec{v} = -\text{grad } \varphi$, der Druck p durch (8.4) und die Oberfläche $\eta(x_1, t)$ durch

$$\eta(x_1, t) = \frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_1, 0, t) .$$

Lösung:

$$u(x_2) = u_+e^{kx_2} + u_-e^{-kx_2} \quad (8.11)$$

erfüllt (8.9). Für passende k, ω entspricht über (8.8) jedem Term in (8.11) eine in 1-Richtung laufende, quergedämpfte Welle.

• $h = \infty$ (tiefes Wasser). Dann kommt nur der erste Teil in Betracht ($u \rightarrow 0$ für $x_2 \rightarrow -\infty$), und (8.10) liefert das Dispersionsgesetz

$$\omega(k) = \sqrt{gk} \quad (8.12)$$

mit Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten

$$c_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}, \quad c_{\text{gr}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}c_{\text{ph}}.$$

Der Realteil von φ ist dann (für u_+ reell)

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= u_+ \cos(kx_1 - \omega t) e^{kx_2}, \\ \eta(x_1, t) &= u_+ \frac{\omega}{g} \sin(kx_1 - \omega t), \\ p(\vec{x}, t) &= -\rho g x_2 + u_+ \rho \omega \sin(kx_1 - \omega t) e^{kx_2}. \end{aligned}$$

• $h < \infty$. Dann benötigt man beide Teile (8.11), um die Randbedingung zu erfüllen. Dies führt auf

$$k(u_+ e^{-kh} - u_- e^{kh}) = 0, \quad \omega^2(u_+ + u_-) = gk(u_+ - u_-)$$

mit der Lösung

$$u_- = u_+ e^{-2kh}$$

und dem Dispersionsgesetz

$$\omega^2(1 + e^{-2kh}) = gk(1 - e^{-2kh})$$

d.h.

$$\omega(k) = \sqrt{gk \operatorname{th}(kh)}.$$

Für $kh \gg 1$ ($h \gg$ Wellenlänge) ergibt sich (8.12), für **seichtes Wasser** ($kh \ll 1$): $u_- = u_+$ und

$$\omega(k) = k\sqrt{gh} \quad (\text{keine Dispersion}).$$

Bewegung der Wasserelemente und Stromlinien

Realteil von φ (für u_+ reell)

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= u_+ \cos(kx_1 - \omega t) (e^{kx_2} + e^{-2kh} e^{-kx_2}) \\ &= 2u_+ e^{-kh} \cos(kx_1 - \omega t) \operatorname{ch} k(x_2 + h). \end{aligned}$$

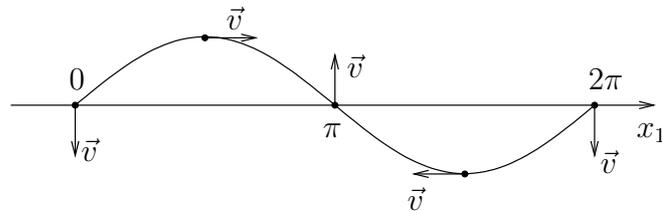
Für die weitere Diskussion setzen wir $k = 1$. Dann ist $\lambda = 2\pi$ und

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= A \cos(x_1 - \omega t) \operatorname{ch}(x_2 + h), \\ v_1 &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = A \sin(x_1 - \omega t) \operatorname{ch}(x_2 + h), \\ v_2 &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -A \cos(x_1 - \omega t) \operatorname{sh}(x_2 + h), \\ \eta &= \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{x_2=0} = B \sin(x_1 - \omega t) \end{aligned}$$

mit (kleinen) Amplituden $A = 2u_+ e^{-h}$ und $B = A \cdot \frac{\omega}{g} \operatorname{ch} h = u_+ \cdot \frac{\omega}{g} (1 + e^{-h})$.

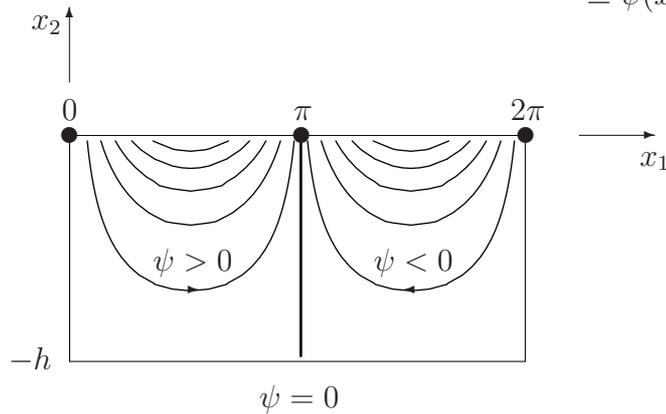
Oberfläche ($t = 0$):

$$\eta \sim \sin x_1$$



Stromlinien ($t = 0$) sind Integralkurven an $\vec{v}(\vec{x}, 0)$: Wegen $\text{div } \vec{v} = 0$ gilt $\vec{v}^\perp = \text{grad } \psi$ (s. (7.12)): Die Stromlinien von \vec{v} sind die **Niveaulinien der Stromfunktion** ψ . Hier ist

$$\vec{v}^\perp = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \cos x_1 \text{sh}(x_2 + h) \\ \sin x_1 \text{ch}(x_2 + h) \end{pmatrix} = \text{grad } \underbrace{A \sin x_1 \text{sh}(x_2 + h)}_{\equiv \psi(\vec{x})}.$$

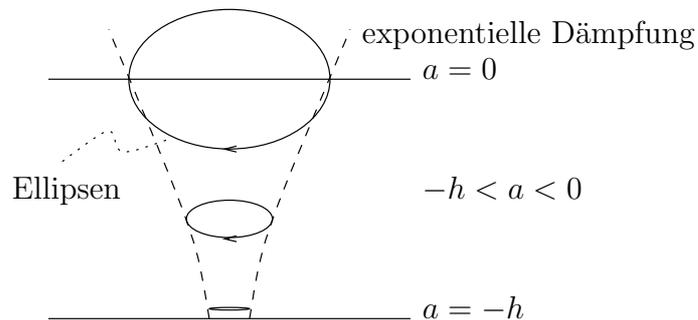


Bewegung ($x_1 \approx 0, x_2 \approx a$). Die Lösung von $\dot{\vec{x}} = \vec{v}(\vec{x}, t) \approx \vec{v}(0, a, t)$ (kleine Verschiebungen), d.h. von

$$\dot{x}_1 = -A \sin \omega t \text{ch}(a + h), \quad \dot{x}_2 = -A \cos \omega t \text{sh}(a + h),$$

ist

$$x_1(t) = \frac{A}{\omega} \text{ch}(a + h) \cos \omega t, \quad x_2(t) = -\frac{A}{\omega} \text{sh}(a + h) \sin \omega t + a.$$



Im unendlich tiefen Wasser ($h \rightarrow \infty$) ist das Verhältnis der Halbachsen $\text{ch}(a + h)/\text{sh}(a + h) \rightarrow 1$: Die Bahnen sind **Kreise**.

Beachte den Unterschied zwischen **Stromlinien** $\vec{x}(\lambda)$, $d\vec{x}/d\lambda = \vec{v}(\vec{x}, 0)$, in der ersten Figur und **Bahnen** $\vec{x}(t)$, $d\vec{x}/dt = \vec{v}(\vec{x}, t)$, in der zweiten, bei nicht-stationärer Strömung.

4. Kapillarwellen

Die Oberflächenspannung eines Fluidums wird beschrieben durch die Arbeit δA , die zur Vergrößerung δF der Fläche eines Stücks der Oberfläche aufzuwenden ist:

$$\delta A = \alpha \cdot \delta F : \quad \alpha > 0 \quad (\text{Materialkonstante}) .$$

Die **Gleichgewichtsbedingung** an einer freien Oberfläche gegen Vakuum lautet damit

$$-p\delta V + \alpha\delta F = 0 , \tag{8.13}$$

wobei δV eine beliebige Volumenänderung (mit zugehörigem δF) beschreibt.

$$\text{Oberfläche :} \quad x_3 = \eta(x_1, x_2) .$$

Der Flächeninhalt F des über dem Gebiet D der 1, 2–Ebene aufgespannten Oberflächenstücks ist

$$F = \int_D dx_1 dx_2 (1 + (\vec{\nabla}\eta)^2)^{1/2} ,$$

$$\vec{\nabla}\eta = \left(\frac{\partial\eta}{\partial x_1} , \frac{\partial\eta}{\partial x_2} \right) .$$

Unter Beschränkung auf schwach gekrümmte Oberflächen ist

$$F = \int_D dx_1 dx_2 \left(1 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\eta)^2 \right) ,$$

$$\delta F = \int_D dx_1 dx_2 \vec{\nabla}\eta \cdot \vec{\nabla}\delta\eta = - \int_D dx_1 dx_2 \Delta\eta \cdot \delta\eta$$

(partielle Integration) für jede Variation $\delta\eta(x_1, x_2)$ mit $\delta\eta \upharpoonright \partial D = 0$. Ferner ist $\delta V = \int_D dx_1 dx_2 \delta\eta$. Durch Vergleich mit (8.13) ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung an freien Oberflächen:

$$p + \alpha \cdot \Delta\eta = 0 .$$

Nun korrigieren wir die Beschreibung der Tiefwasserwellen auf S. 75 durch Berücksichtigung der Oberflächenspannung. Die Randbedingung $p = 0$ ist zu ersetzen durch

$$p = -\alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2}$$

und aus (8.6) wird damit

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x_1, 0, t) = g\eta(x_1, t) - \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} ,$$

also

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(x_1, 0, t) = -g \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^2 \partial x_2} .$$

Der Tiefwasser-Ansatz

$$\varphi = u_+ e^{ikx_1 + kx_2 - i\omega t}$$

führt auf das modifizierte Dispersionsgesetz

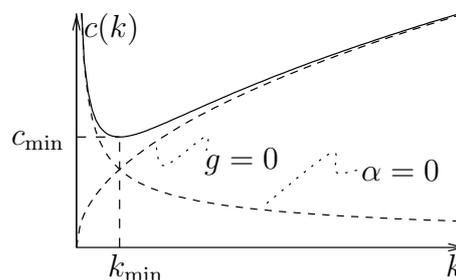
$$\omega(k) = \sqrt{gk + \frac{\alpha}{\rho}k^3}, \quad (0 < k < \infty)$$

mit der Phasengeschwindigkeit

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} + \frac{\alpha}{\rho}k}.$$

Diese Funktion hat ein positives Minimum:

$$c_{\min} = \sqrt{\frac{2g}{k_{\min}}} \quad \text{für} \quad k = k_{\min} = \sqrt{\frac{g\rho}{\alpha}}.$$



Im Fall von Wasser ist $\alpha = 7.2 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$, $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ und damit $c_{\min} = 23.1 \text{ cm/s}$ für die Wellenlänge $\lambda_{\min} = 2\pi/k_{\min} = 1.73 \text{ cm}$.

5. Einschub: die Methode der stationären Phase

Als Vorbereitung für den nächsten Abschnitt untersuchen wir die Asymptotik von Integralen des Typs

$$f(t) = \int_{x_1}^{x_2} dx g(x) e^{ith(x)}$$

für $t \rightarrow \infty$. Zuerst sei $h'(x) \neq 0$ im ganzen Intervall $x_1 \leq x \leq x_2$. Dann erhält man durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{it} \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{g(x)}{h'(x)} \frac{d}{dx} e^{ith(x)} \\ &= \frac{1}{it} \frac{g(x)}{h'(x)} e^{ith(x)} \Big|_{x_1}^{x_2} - \frac{1}{it} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{d}{dx} \frac{g(x)}{h'(x)} \right) e^{ith(x)} \\ &= O(t^{-1}). \end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass $h'(x)$ eine (einzige) einfache Nullstelle im Integrationsgebiet besitzt:

$$h'(x_0) = 0; \quad h''(x_0) \neq 0$$

mit $x_0 \in (x_1, x_2)$. Nach dem oben Gesagten ist nun

$$f(t) = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx g(x) e^{ith(x)} + O(t^{-1})$$

für beliebiges $\varepsilon > 0$. Im so verkleinerten Integrationsgebiet setzen wir $s = x - x_0$ und entwickeln

$$g(x) = g(x_0) + sg'(x_0), \quad h(x) = h(x_0) + \frac{s^2}{2} h''(x_0)$$

und finden:

$$f(t) = e^{ith(x_0)} g(x_0) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds e^{it \frac{s^2}{2} h''(x_0)} + e^{ith(x_0)} g'(x_0) \underbrace{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} ds s e^{it \frac{s^2}{2} h''(x_0)}}_{=0} + O(t^{-1}). \quad (8.14)$$

Im 1. Term benützen wir $\tau = s(t|h''(x_0)|)^{1/2}$ als neue Integrationsvariable. Für $t \rightarrow \infty$ gehen dann die Grenzen $\rightarrow \pm\infty$ und es entsteht das **Fresnel-Integral**

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{\pm i\tau^2/2} = e^{\pm i\pi/4} \cdot \sqrt{2\pi}, \quad (\pm = \operatorname{sgn} h''(x_0)).$$

Resultat: für $t \rightarrow \infty$ ist

$$f(t) = \left(\frac{2\pi}{t|h''(x_0)|} \right)^{1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} h''(x_0)} \cdot g(x_0) e^{ith(x_0)} + O(t^{-3/2}).$$

(Eine Abschätzung des Fehlerterms zeigt, dass er relativ zum führenden klein ist, sofern $t \gg (|g''||h''| + |g'| |h'''|) |h''|^{-2} |g|^{-1}$ mit Auswertung bei $x = x_0$). Analoge, n -dimensionale Integrale

$$f(t) = \int_G d^n x g(x) e^{ith(x)}$$

behandelt man ebenfalls, indem man die Phase um jeden stationären Punkt x_0 , $\partial h / \partial x_i(x_0) = 0$, quadratisch approximiert:

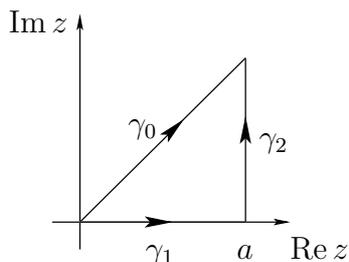
$$h(x) = h(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n s_i s_j \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}(x_0).$$

Die symmetrische Matrix $\partial^2 h(x_0) = (\partial^2 h / \partial x_i \partial x_j)(x_0)$ kann auf Hauptachsenform gebracht werden und das (8.14) entsprechende Integral faktorisiert. Resultat:

$$f(t) = \left(\frac{2\pi}{t} \right)^{n/2} |\det \partial^2 h(x_0)|^{-1/2} e^{i\frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \partial^2 h(x_0)} \cdot g(x_0) e^{ith(x_0)} + \text{Terme höherer Ordnung}, \quad (8.15)$$

wobei $\operatorname{sgn} A = (\# \text{ positive} - \# \text{ negative})$ Eigenwerte von A .

Berechnung des Fresnel-Integrals



$$\begin{aligned} \gamma_0 : \tau \in (0, \sqrt{2}a) &\mapsto z = e^{i\pi/4} \tau, \\ \gamma_1 : x \in (0, a) &\mapsto z = x, \\ \gamma_2 : t \in (0, 1) &\mapsto z = a(1 + it). \end{aligned}$$

Einerseits ist

$$\int_{\gamma_0} e^{-z^2/2} dz = e^{i\pi/4} \int_0^{\sqrt{2}a} e^{-i\tau^2/2} d\tau,$$

andererseits, da $e^{-z^2/2}$ analytisch innerhalb von $\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_0$ ist,

$$\int_{\gamma_0} e^{-z^2/2} dz = \int_{\gamma_1 + \gamma_2} e^{-z^2/2} dz = \underbrace{\int_0^a e^{-x^2/2} dx}_{\xrightarrow{a \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi}/2} + i \int_0^1 dt \underbrace{ae^{-\frac{a^2}{2}(1-t^2) + ita}}_{\square},$$

wobei

$$|\square| = \begin{cases} \leq C(1-t^2)^{-1/2}, \\ \xrightarrow{a \rightarrow \infty} 0 \text{ punktweise.} \end{cases}$$

Das letzte Integral verschwindet für $a \rightarrow \infty$ (dominierte Konvergenz). Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau^2/2} d\tau = 2 \int_0^{\infty} e^{-i\tau^2/2} d\tau = e^{-i\pi/4} \cdot \sqrt{2\pi}.$$

Anwendung. Fortpflanzung eines Wellenpakets in $d = 1$

$$f(x, t) = \int_I \underbrace{A(k)}_{|A(k)|e^{-i\alpha(k)}} e^{i(kx - \omega(k)t)} dk$$

ist ein aus ebenen Wellen mit k in einer kleinen Umgebung I um k_0 gebildetes Paket. Ist $A(k) > 0$ (d.h. $\varphi_0(k) = 0$) so ist $f(x, 0) = f(-x, 0)$: Das Paket ist bei $t = 0$ um $x = 0$ herum zentriert. Eine Phase $\alpha(k) = ka$ entspricht einem um $x = a$ zentrierten Paket. Die Phase

$$\varphi(k) = kx - \omega(k)t - \alpha(k)$$

ist bei $k = k_0$ stationär, falls

$$\varphi'(k_0) = x - \omega'(k_0)t - \alpha'(k_0) = 0 :$$

das Paket ist zur Zeit t zentriert bei

$$x = \omega'(k_0)t + a ,$$

d.h. $\omega'(k_0)$ ist seine Geschwindigkeit (**Gruppengeschwindigkeit**).

6. Ringwellen in Tiefwasser

Wir interessieren uns hier nur für die Form $\eta(\vec{x}, t)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, der Oberfläche, die von einer lokalisierten Störung verursacht wird. Die allgemeine Form besteht aus einer Superposition ebener Wellen:

$$\begin{aligned} \eta(\vec{x}, t) &= \int d^2k (\eta_+(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} + \eta_-(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} + \omega t)}) \\ &= (2\pi)^{-2} \int d^2k \hat{\eta}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \cos \omega t + (2\pi)^{-2} \int d^2k \hat{\eta}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} \frac{\sin \omega t}{\omega} \end{aligned}$$

mit $\omega = \omega(k) = \sqrt{gk}$. Hier sind

$$\begin{aligned} \hat{\eta}(\vec{k}) &= \int d^2k \eta(\vec{x}, 0) e^{-i\vec{k}\vec{x}}, \\ \hat{\dot{\eta}}(\vec{k}) &= \int d^2k \frac{\partial \eta}{\partial t}(\vec{x}, 0) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \end{aligned}$$

die Fouriertransformierten der Anfangslage und -Geschwindigkeit der Welle. Der Einfachheit halber sei die Welle anfänglich in Ruhe, $\partial \eta / \partial t|_{t=0} = 0$, und räumlich wohl lokalisiert,

sodass $\hat{\eta}(\vec{k})$ glatt ist. Damit ist

$$\eta(\vec{x}, t) = \frac{1}{2}(I(\vec{x}, t) + I(\vec{x}, -t))$$

$$I(\vec{x}, t) = (2\pi)^{-2} \int d^2k \hat{\eta}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega(k)t)} .$$

Wir werten das Integral mit der Methode der stationären Phase aus. Mit $\vec{k} = k\vec{e}$ und $\varphi(\vec{k}) = \vec{k}\vec{x} - \omega(k)t$ ist

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{k}} = \vec{x} - \frac{\partial \omega}{\partial k} \cdot t = \vec{x} - \omega'(k)\vec{e}t = \vec{x} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}\vec{e}t .$$

Stationär ist die Phase φ somit bei $\vec{k}_0 = k_0\vec{e}_0$:

$$\vec{e}_0 = \pm \hat{x} \quad \text{für } \pm t > 0 ; \quad k_0 = \frac{gt^2}{4r^2} , \quad (r = |\vec{x}|) .$$

Sie beträgt dort

$$\varphi(\vec{k}_0) = \pm k_0 r - \sqrt{gk_0}t$$

$$= \pm \frac{gt^2}{4r} - \frac{g|t|}{2r} \cdot t = \mp \frac{gt^2}{4r} =: \mp u , \quad (\pm t > 0) .$$

Ferner ist

$$A_{ij}(\vec{k}) := \frac{\partial^2 \varphi}{\partial k_i \partial k_j} = -\frac{\partial}{\partial k_i} \left(\frac{\omega'(k)}{k} k_j \right) \cdot t = -\left(\left(\frac{\omega'(k)}{k} \right)' \frac{k_i k_j}{k} + \frac{\omega'(k)}{k} \delta_{ij} \right) \cdot t ,$$

wobei

$$\frac{\omega'(k)}{k} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k^3}} , \quad k \left(\frac{\omega'(k)}{k} \right)' = -\frac{3}{4}\sqrt{\frac{g}{k^3}} .$$

Wir können annehmen, \vec{x} , und damit \vec{k}_0 , lägen in 1-Richtung: $k_{01} = \pm k_0$, $k_{02} = 0$. Dann ist $A_{ij}(\vec{k}_0)$ diagonal mit Eigenwerten $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{g}{k_0^3}} \cdot t$, $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k_0^3}}t$, also $\text{sgn} A(\vec{k}_0) = 0$ und

$$|\det A(\vec{k}_0)| = \frac{1}{8} \frac{gt^2}{k_0^3} = \frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{k_0^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{r^2}{u} \right)^2$$

wegen $k_0 = u/r$. Die Approximation der stationären Phase ist gut für $u \gg 1$. Das Ergebnis ist

$$\eta(\vec{x}, t) = (2\pi)^{-2} \hat{\eta}(\vec{k}_0) \cdot \frac{2\pi}{|\det A(\vec{k}_0)|^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}(e^{-iu} + e^{iu})$$

$$= \frac{\hat{\eta}(0)}{\sqrt{2\pi}r^2} u \cos u , \quad \left(u = \frac{gt^2}{4r} \right) \quad (8.16)$$

für $r \gg d$, die anfängliche lineare Abmessung der Welle: Dann ist nämlich $\hat{\eta}(\vec{k}_0) = \hat{\eta}(0) + \vec{k}_0 \cdot \frac{\partial \hat{\eta}}{\partial \vec{k}}(0) + \dots$ mit relativer Größenordnung der beiden Terme $O(\frac{u}{r} \cdot d) \ll 1$. Beachte, dass

$$\hat{\eta}(0) = \int d^2x \eta(\vec{x}, 0)$$

das anfängliche "Volumen" der Welle ist.

Diskussion. Im Bereich $u \gg 1$, d.h. $r \ll gt^2/4$, ist die Gestalt (8.16) der Oberfläche

$$\eta \sim \frac{gt^2}{4r^3} \cos\left(\frac{gt^2}{4r}\right).$$

Die Amplitude nimmt bei festem t ab wie r^{-3} . Die Maxima liegen ungefähr bei $r = r_n$:

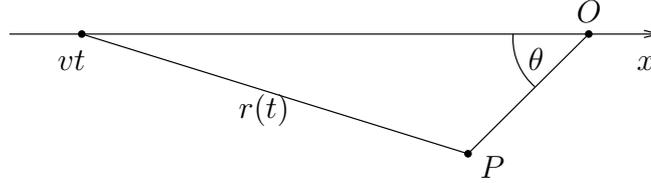
$$\frac{gt^2}{4r_n} = 2\pi n \quad : \quad r_n = \frac{gt^2}{8\pi n}$$

und haben Geschwindigkeiten $v_n = \frac{gt}{4\pi n}$. Die Abstände zwischen den Maxima sind

$$r_n - r_{n+1} = \frac{gt^2}{8\pi} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{8\pi}{gt^2} r_n r_{n+1} \approx \frac{8\pi}{g} \frac{r^2}{t^2}.$$

Abweichungen von der beobachteten Wellenform sind durch die Vernachlässigung der Oberflächenspannung bedingt. Deren Berücksichtigung liefert eine positive minimale Gruppengeschwindigkeit.

7. Schiffswellen



Das Schiff hat auf der x -Achse die Position $x(t) = vt$. Die Oberflächenstörung (Schiffswelle) η in einem Punkt P setzt sich zur Zeit $t = 0$ zusammen aus allen Ringwellen, die vom Schiff in den Positionen vt ($t < 0$) ausgesandt wurden:

$$\eta(P) = \int_{-\infty}^0 dt \eta(r(t), |t|). \quad (8.17)$$

Annahme: (vgl. (8.16))

$$\eta(r, t) \sim \frac{u}{r^2} e^{iu}, \quad u = \frac{gt^2}{4r}.$$

Der Hauptbeitrag zum Integral (8.17) kommt von den t -Werten her, wo die Phase $u(t)$ des Integranden stationär ist: Es ist

$$\begin{aligned} r(t)^2 &= R^2 + v^2 t^2 + 2Rvt \cos \theta \quad (t < 0) \\ \dot{u}(t) &= \frac{g}{4} \left(\frac{2t}{r} - \frac{t^2}{r^3} (v^2 t + Rv \cos \theta) \right) \\ &= \frac{gt}{4r^3} (2r^2 - v^2 t^2 - Rvt \cos \theta) \\ &= \frac{gt}{4r^3} (v^2 t^2 + 3Rvt \cos \theta + 2R^2), \end{aligned}$$

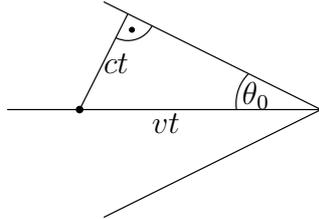
mit den Nullstellen:

$$t_{1,2} = -\frac{3R}{2v} \left(\cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - \frac{8}{9}} \right).$$

Beiträge stationärer Phase zu (8.17) gibt es nur dann, wenn $t_{1,2}$ reell (≤ 0) ist; dies ist der Fall für $\cos^2 \theta \geq 8/9$, d.h. falls

$$|\theta| \leq \theta_0 \cong 19.5^\circ.$$

Nur für Punkte P innerhalb dieses Sektors ist das Wellenfeld zur Zeit $t = 0$ wesentlich $\neq 0$.



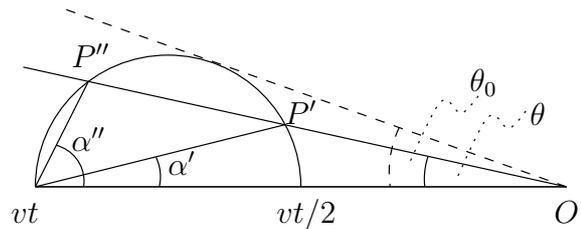
Für den bekannten “Machschen Kegel” (dispersionsfreie Ausbreitung von Schallwellen eines mit Überschallgeschwindigkeit $v > c$ fliegenden Körpers) sind die Verhältnisse anders: Hier ist

$$\frac{1}{\sin \theta_0} = \frac{v}{c} = \text{Mach-Zahl}.$$

Bei den Schiffswellen (im Tiefwasser, ohne Oberflächenspannung) ist $\sin \theta_0$ **unabhängig** von v , und so gross, wie bei einer Mach-Zahl $(\sin \theta_0)^{-1} = 3$.

Die Verhältnisse bei stationärer Phase $\dot{u} = 0$ lassen sich geometrisch wie folgt darstellen: Der Grenzwinkel θ_0 in der Figur ist gegeben durch

$$\sin \theta_0 = \frac{1/4}{3/4} = 1/3.$$



Auf dem Kreis durch $x = vt$ ist die Phase der von dort ausgesandten Wellen stationär. In Punkten P' , P'' des Kreises gilt

$$r \cos \alpha + R \cos \theta = -vt, \quad r = -\frac{vt}{2} \cos \alpha$$

und damit tatsächlich

$$\begin{aligned} \frac{4r^3}{gt} \dot{u} &= 2r^2 - v^2 t^2 - Rvt \cos \theta \\ &= 2r^2 - v^2 t^2 - vt(-vt - r \cos \alpha) \\ &= 2r \left(r + \frac{vt}{2} \cos \alpha \right) = 0. \end{aligned}$$

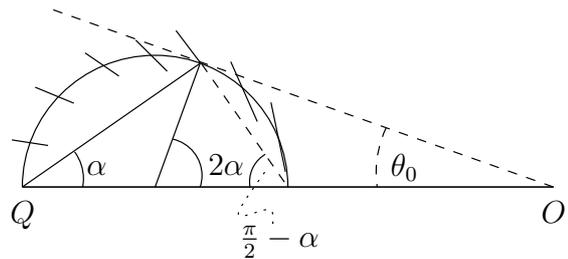
Die Wellenfronten in P' , P'' liegen senkrecht zu QP' , bzw. QP'' . Grund: Die Phase $u = u(P, t)$ erfüllt $\dot{u} = \partial u / \partial t = 0$ für die beiden Werte $t = t_{1,2}(P)$, die sie stationär machen; dort ist $\vec{\nabla}[u(P, t(P))] = [\vec{\nabla}u(P, t)]_{t=t(P)}$.

Insbesondere laufen die Wellen auf dem Kegel in die Richtung mit Winkel

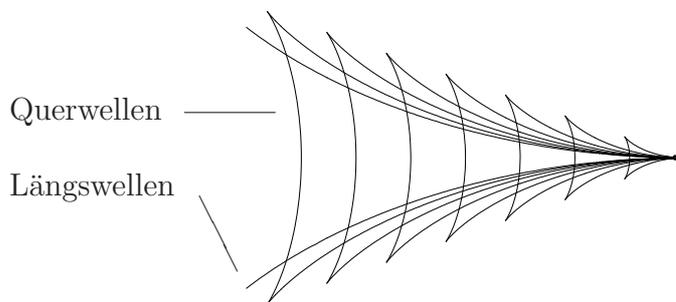
$$\alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \theta_0) \cong 35^\circ$$

zu jener des Schiffes, d.h. die Wellenberge bilden dort den Winkel

$$\frac{\pi}{2} - \alpha \cong 55^\circ$$



zur Fahrtrichtung. Im Innern des Kegels verlaufen die Wellenfronten etwa so (man beachte, dass jeder feste Punkt innerhalb des Kegels dem Punkt P' bzw. P'' für verschiedene Q 's entspricht):



9. Zweidimensionale Potentialströmungen

1. Allgemeines

Wir behandeln stationäre, wirbelfreie Strömungen eines idealen, inkompressiblen Fluidums im \mathbb{R}^2 , den wir mit der komplexen Ebene \mathbb{C} identifizieren: $z = x_1 + ix_2$. Hier steht uns als Hilfsmittel die **Funktionentheorie** zur Verfügung.

Sei $w(z)$ eine in G analytische Funktion von $z = x_1 + ix_2$. Wir zerlegen w in Real- und Imaginärteil

$$w = v_1 - iv_2 .$$

Dann lauten die **Cauchy-Riemann Bedingungen** ($\partial w / \partial x_1 = (1/i) \partial w / \partial x_2$):

$$\begin{aligned} v_{1,1} + v_{2,2} = 0 & : & \operatorname{div} \vec{v} = 0 \\ v_{1,2} - v_{2,1} = 0 & : & \operatorname{rot} \vec{v} = 0 \end{aligned} \quad (9.1)$$

für $\vec{v}(x_1, x_2) = (v_1, v_2)$. Dies sind gerade die Feldgleichungen einer inkompressiblen, wirbelfreien Strömung:

$$\begin{array}{l} w = v_1 - iv_2 \\ \text{analytisch} \end{array} \iff \begin{array}{l} \vec{v} = (v_1, v_2) \\ \text{wirbelfreie, inkompressible Strömung} \end{array} \quad (9.2)$$

Potential

Als analytische Funktion lässt sich $w(z)$ (auf einfach zusammenhängendem G) stets schreiben als Ableitung

$$w(z) = -\frac{d\phi}{dz}$$

einer analytischen Funktion $\phi(z)$. Wir zerlegen

$$\phi = \phi_1 - i\phi_2$$

und finden

$$v_1 = -\phi_{1,1} = \phi_{2,2} , \quad v_2 = -\phi_{2,1} = -\phi_{1,2} ,$$

also

$$\vec{v} = -\operatorname{grad} \phi_1 , \quad \vec{v}^\perp = (-v_2, v_1) = \operatorname{grad} \phi_2 : \quad (9.3)$$

ϕ_1 ist also das frühere **Geschwindigkeitspotential** φ (s. 7.3); ϕ_2 die **Stromfunktion** ψ (s. 7.12): Die Niveaulinien von ϕ_2 sind senkrecht zu $\operatorname{grad} \phi_2$, also parallel zu \vec{v} , und somit identisch mit den **Stromlinien**.

Beispiel. Schwerewellen, s. S. 77. Geschwindigkeitspotential und Stromfunktion,

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, x_2, t) &= A \cos(kx_1 - \omega t) \operatorname{ch} k(x_2 + h) , \\ \phi_2(x_1, x_2, t) &= A \sin(kx_1 - \omega t) \operatorname{sh} k(x_2 + h) , \end{aligned}$$

fügen sich zu einer analytischen Funktion

$$\phi = \phi_1 - i\phi_2 = A \cos(kx_1 - \omega t + ik(x_2 + h)) = A \cos(k(z + ih) - \omega t)$$

zusammen (verwende $\cos(a + ib) = \cos a \operatorname{ch} b - i \sin a \operatorname{sh} b$).

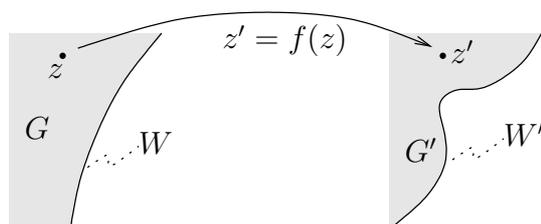
Randwertproblem

An (ruhenden) Wänden muss \vec{v} tangential sein, d.h. $\phi_2 = \text{const}$. Die Tangentialgeschwindigkeit ist damit

$$v = -\frac{d\phi_1}{ds} = -\frac{d\phi}{ds} \quad (9.4)$$

(s : Bogenlänge des Randes). Weiter werden wir meist noch Randbedingungen an \vec{v} im ∞ stellen. Insbesondere hängt die Lösung linear von den Randbedingungen ab (Superpositionsprinzip).

Zur Konstruktion von Lösungen kann man das Hilfsmittel der **konformen** (analytischen) **Abbildungen** verwenden,



wobei f eine analytische Funktion von z (mit $f'(z) \neq 0$) ist. Es sei ϕ eine Lösung des Randwertproblems auf G : ϕ analytisch in G und $\phi_2 = \text{const}$ auf W . Dann ist

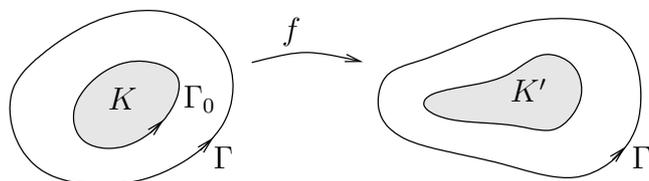
$$\phi'(z') = \phi(z) = \phi(f^{-1}(z'))$$

eine Lösung des Randwertproblems auf G' : ϕ' ist analytisch auf G' und $\phi'_2(z') = \phi_2(f^{-1}(z')) = \text{const}$ auf W' . Die zugehörige Abbildung des Geschwindigkeitsfeldes ist gegeben durch

$$w'(z') = w(z)[f'(z)]^{-1}. \quad (9.5)$$

Wichtig ist, dass dabei auch die **Zirkulation** in mehrfach zusammenhängenden Gebieten G erhalten bleibt. Sie ist definiert als

$$Z \equiv \oint_{\Gamma} w(z) dz = \oint_{\Gamma_0} w(z) dz, \quad (9.6)$$



was mit der früheren Definition (s. (7.8)) übereinstimmt: In

$$\begin{aligned} w dz &= (v_1 - iv_2)(dx_1 + idx_2) \\ &= (v_1 dx_1 + v_2 dx_2) + i(v_1 dx_2 - v_2 dx_1) \\ &= \vec{v} \cdot d\vec{x} + i\vec{v}^\perp \cdot d\vec{x} \end{aligned} \quad (9.7)$$

verschwindet der 2. Term auf dem Rand Γ_0 , wo $\vec{v} \parallel d\vec{x}$. Unter der Abbildung f ist nach (9.5)

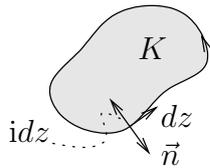
$$Z = \oint_{\Gamma} w(z) dz = \oint_{\Gamma'} w'(z') dz' = Z'$$

Für $Z \neq 0$ ist das Potential $\phi(z)$ mehrwertig: ϕ nimmt bei einem Umlauf um Γ um Z ab.

Die Zirkulation um einen umströmten Körper K ist die fundamentale Grösse, welche die resultierende Kraft \vec{F} der Strömung auf K bestimmt:

Lemma (Blasius). Es sei $\vec{F} = (F_1, F_2)$ und $F = F_1 - iF_2$. Dann gilt

$$F = \frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} w^2 dz . \quad (9.8)$$



Man beachte, dass Γ in (9.8) durch eine beliebige Schleife um K ersetzt werden kann, da w^2 analytisch ist.

Beweis. Nach dem Satz von Bernoulli (7.5) gilt (keine Volumenkräfte hier)

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2$$

mit p_0 eine Konstante. Damit ist

$$\vec{F} = - \oint_{\Gamma} p \vec{n} ds ,$$

bzw. in komplexer Darstellung ($\bar{}$ = komplex konjugiert)

$$\bar{F} = \oint_{\Gamma} p \cdot i dz = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} \vec{v}^2 dz ,$$

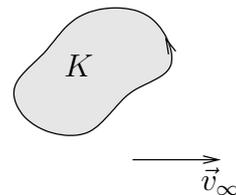
da p_0 keinen Beitrag liefert. Nun ist auf Γ wegen $v_1 dx_2 = v_2 dx_1$ (vgl. (9.7))

$$\begin{aligned} w^2 dz &= w(w dz) = (v_1 - iv_2)(v_1 dx_1 + v_2 dx_2) \\ &= v_1^2 dx_1 + v_2^2 dx_1 - i(v_1^2 dx_2 + v_2^2 dx_2) \\ &= \vec{v}^2 \bar{dz} , \end{aligned}$$

woraus (9.8) folgt. □

Satz (Kutta-Zhukovski). Es sei $\vec{v}(\vec{x}) \rightarrow \vec{v}_{\infty}$ für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, und Z die Zirkulation (9.6) um K . Dann ist

$$\vec{F} = \rho Z (v_{\infty 2}, -v_{\infty 1}) = -\rho Z \vec{v}_{\infty}^{\perp} . \quad (9.9)$$



Beweis. Im Äusseren eines Kreises um K hat $w(z)$ eine Laurent-Entwicklung:

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n z^{-n}$$

mit $w_0 = v_{\infty 1} - iv_{\infty 2}$ und

$$w_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} w(z) dz = \frac{Z}{2\pi i} .$$

Somit ist für $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} w^2(z) &= w_0^2 + \frac{2w_0 w_1}{z} + O(z^{-2}) \\ &= w_0^2 + \frac{1}{2\pi i z} \cdot 2Z(v_{\infty 1} - iv_{\infty 2}) + O(z^{-2}) \end{aligned}$$

und nach (9.8)

$$F = F_1 - iF_2 = \frac{i\rho}{2} \cdot 2Z(v_{\infty 1} - iv_{\infty 2}) = \rho Z(v_{\infty 2} + iv_{\infty 1}) ;$$

da Z reell ist, folgt (9.9). □

Beachte, dass K nur **Auftrieb**, aber keinen Widerstand erfährt!

Bemerkung. Im 3-dimensionalen Fall (für einen Körper K endlicher Ausdehnung) im analogen Fall stets $\vec{F} = 0!$ (**Satz von d'Alembert**)

Beweisskizze: $\vec{v} = -\text{grad } \varphi$ mit

$$\Delta\varphi = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^3 \setminus K , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial K , \quad \text{grad } \varphi \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{v}_{\infty} .$$

Die einzige Lösung φ mit

$$\varphi(\vec{x}) = -\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{x} + o(1) \tag{9.10}$$

für $|\vec{x}| = r \rightarrow \infty$ erfüllt

$$\varphi(\vec{x}) = -\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{x} + O(r^{-2}) . \tag{9.11}$$

Zur Begründung kann man φ auf beliebige glatte Art ins Innere von K fortsetzen und erhält so $\Delta\varphi(\vec{x}) = \rho(\vec{x})$ mit $\text{supp } \rho \subset K$. Die einzige Lösung davon mit (9.10) ist

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) &= -\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{x} - \frac{1}{4\pi} \int_K d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ &= -\vec{v}_{\infty} \cdot \vec{x} + \frac{a}{r} + O(r^{-2}) . \end{aligned} \tag{9.12}$$

Wegen $\vec{v} \parallel \partial K$ und $\text{div } \vec{v} = 0$ gilt aber

$$0 = \int_{\partial K} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}|=R} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = -a \cdot \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}|=R} \frac{\vec{x}}{r^3} \cdot d\vec{\sigma} = -4\pi a ,$$

da der erste und dritte Term in (9.12) nicht beitragen. Damit ist (9.11) bewiesen. Nun benützen wir (vgl. (6.7))

$$\begin{aligned} F_i &= - \oint_{\partial K} p do_i = - \oint_{\partial K} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) do_k \quad (\text{da } \vec{v} \parallel \partial K) \\ &= - \int_{|\vec{x}|=R} (\rho v_i v_k + p \delta_{ik}) do_k . \end{aligned}$$

Mit $\vec{v} = \vec{v}_{\infty} + O(r^{-3})$, $p = p_{\infty} + O(r^{-3})$ (letzteres aus $p + \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 = \text{const}$) folgt

$$F_i = - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|\vec{x}|=R} (\rho v_{\infty i} v_{\infty k} + p_{\infty} \delta_{ik}) do_k = 0 .$$

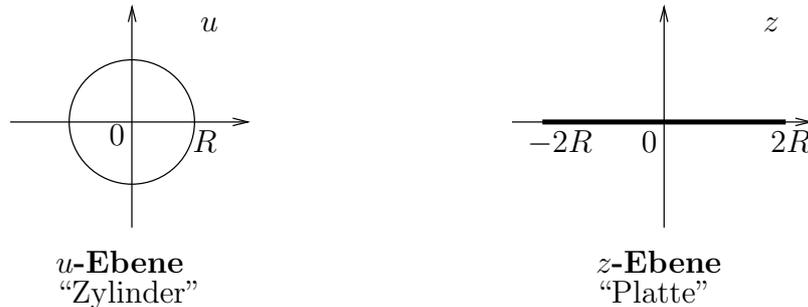
□

2. Konstruktion von 2-dim. Potentialströmungen

Im Gegensatz zum 3-dim. Fall, legt die Geschwindigkeit \vec{v}_∞ im Unendlichen die Lösung ϕ nicht eindeutig fest. Diese Nichteindeutigkeit entspricht verschiedenen Werten der Zirkulation Z .

Wir illustrieren an einfachen Beispielen die Nützlichkeit konformer Abbildungen, hier der Abbildung

$$u \mapsto z(u) = u + \frac{R^2}{u}. \quad (9.13)$$



Der "Zylinder" $|u| = R$ wird dabei abgebildet auf die "Platte":

$$u = Re^{i\theta} \mapsto z = 2R \cos \theta \quad (9.14)$$

mit $0 \leq \theta < 2\pi$. Aus

$$z'(u) = 1 - \frac{R^2}{u^2}, \quad z(R^2/u) = z(u)$$

ersieht man, dass die Abbildung (9.13) das Äussere des Zylinders eindeutig (mit analytischer Inverse) auf das Äussere der Platte abbildet ($z = z(u)$ hat 2 Urbilder u , eins davon im Äusseren des Zylinders). Die Abbildung hat nur die Singularitäten $u = \pm R$ ($z'(u) = 0$). Ihre Inverse ist gegeben durch

$$u = \frac{z}{2} + \sqrt{\frac{z^2}{4} - R^2}, \quad (9.15)$$

wobei in der (durch die Platte) geschnittenen z -Ebene derjenige Zweig der Wurzel zu wählen ist, für den $\sqrt{\dots} > 0$ ist, falls z reell $> 2R$ ist. Ferner ist

$$z(u) \rightarrow u \quad (u \rightarrow \infty), \quad u(z) \rightarrow z \quad (z \rightarrow \infty). \quad (9.16)$$

Transformation der Strömungen (s. S. 87)

Potentiale

$$\phi(u) \longrightarrow \phi(z) \equiv \phi(u(z))$$

Strömung am Zylinder
Strömung an der Platte

Geschwindigkeiten

$$w(u) = -\frac{d\phi}{du} \longrightarrow w(z) = \frac{-d\phi/du}{1 - R^2/u^2}.$$

Tangentialgeschwindigkeiten am Rand (9.4)

$$v = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{d\theta} \quad \longrightarrow \quad v = -\frac{d\phi}{dx} = -\frac{d\phi}{dz} = -\frac{d\phi/d\theta}{dz/d\theta}$$

$$(u = Re^{i\theta}) \quad \quad \quad = \frac{d\phi/d\theta}{2R \sin \theta} . \quad (9.17)$$

Dabei bleibt die Zirkulation unverändert. Falls $\phi(u) \rightarrow -w_\infty u$, ($u \rightarrow \infty$), so gilt nach (9.13) auch $\phi(z) \rightarrow -w_\infty z$, ($z \rightarrow \infty$). Nach dem Satz von Kutta-Zhukovski wirkt somit auf den Zylinder und die Platte dieselbe Kraft.

Ferner gehen unter (9.13) Stromlinien in Stromlinien, und Staupunkte ($w = 0$) in Staupunkte über (ausser evtl. bei $u = \pm R$!).

Beispiele (v_∞ reell > 0)

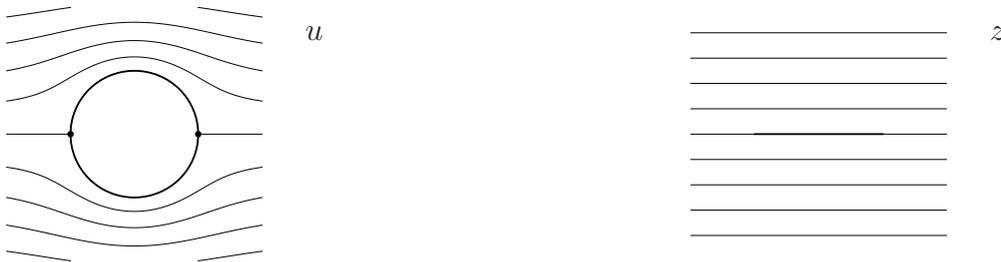
(1) Die triviale Plattenströmung

$$\phi(z) = -v_\infty z, \quad w(z) = v_\infty$$

entspricht der Zylinderströmung

$$\phi(u) = -v_\infty \left(u + \frac{R^2}{u}\right), \quad w(u) = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{u^2}\right); \quad (9.18)$$

beide haben Zirkulation = 0 (Kraft $\vec{F} = 0$).



Zwei Staupunkte $\pm R$

(2) Die einfache Wirbelströmung um den Zylinder:

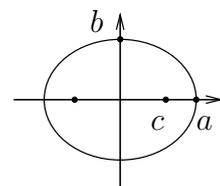
$$\phi(u) = -\frac{Z}{2\pi i} \log u = -\frac{Z}{2\pi} \arg u + \frac{iZ}{2\pi} \log |u|,$$

$$w(u) = \frac{Z}{2\pi i u}, \quad (Z \text{ reell})$$

hat nach (9.6) die Zirkulation Z und kreisförmige Stromlinien. Wegen $w_\infty = 0$ ist $\vec{F} = 0$. Unter (9.13) gehen die Stromlinien $|u| = re^{i\theta}$ (konzentrische Kreise, $r \geq R$) in konfokale Ellipsen

$$z = re^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} = a \cos \theta + ib \sin \theta$$

mit $a = r + R^2/r$, $b = r - R^2/r$ (konfokal, da $c^2 = a^2 - b^2 = 4R^2$ unabhängig von r).





Längs des Zylinders ist $u = Re^{i\theta}$, $\phi(u) = -Z\theta/2\pi + \text{const}$, die Tangentialgeschwindigkeiten (9.17) dort und an der Platte also

$$v = \frac{Z}{2\pi R}, \quad v = -\frac{Z}{4\pi R \sin \theta}, \quad (9.19)$$

was an den Kanten $\theta = 0, \pi$ (vgl. (9.14)) divergiert. Damit treten (nach Bernoulli) dort immer negative Drucke auf: Diese Strömung an der Platte ist **unphysikalisch!**

(3) Drehung von (1)

Jede Strömung $\phi(u)$ am Zylinder geht unter einer Drehung

$$u \longmapsto ue^{i\alpha}; \quad \phi_\alpha(u) = \phi(e^{-i\alpha}u)$$

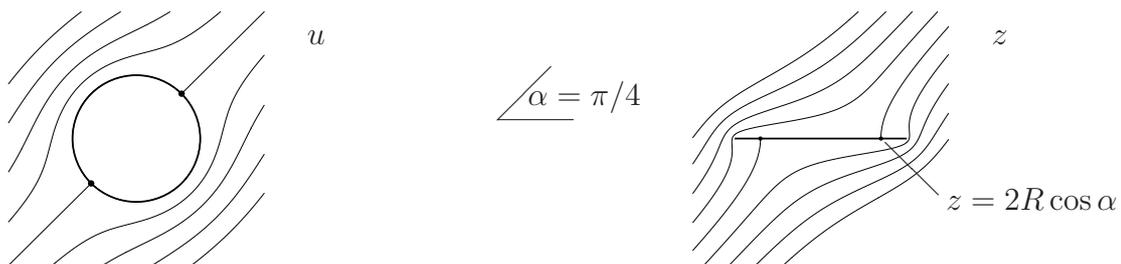
wieder in eine Strömung $\phi_\alpha(u)$ am Zylinder über. Dabei werden die Geschwindigkeiten mitgedreht

$$\bar{w}_\alpha(u) = e^{i\alpha}\bar{w}(e^{-i\alpha}u), \quad (\bar{w} = v_1 + iv_2).$$

So wird aus (9.18):

$$\phi_\alpha(u) = -v_\infty \left(e^{-i\alpha}u + e^{i\alpha} \frac{R^2}{u} \right)$$

und mit der Abbildung (9.13) die entsprechende Strömung an der Platte:



Längs der Platte gilt weiterhin (9.14), also

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(u = Re^{i\theta}) &= -v_\infty R (e^{i(\theta-\alpha)} + e^{-i(\theta-\alpha)}) \\ &= -2v_\infty R \cos(\theta - \alpha) \end{aligned}$$

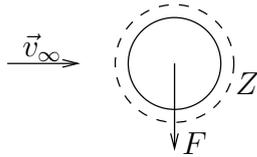
und damit die Tangentialgeschwindigkeiten (9.17):

$$v = -2v_\infty \sin(\theta - \alpha), \quad v = v_\infty \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin \theta}. \quad (9.20)$$

Es gibt zwei Staupunkte ($\theta = \alpha, \alpha + \pi$), und an den Kanten ($\theta = 0, \pi$) ist w_α immer noch divergent (unphysikalisch). Die bloße Drehung um den Zylinder erzeugt so in der Plattenebene eine nicht-triviale Transformation der Strömung!

(4) **Superposition von (1) und (2)**

$$\begin{aligned}\phi(u) &= -v_\infty \left(u + \frac{R^2}{u}\right) - \frac{Z}{2\pi i} \log u, \\ w(u) &= v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{u^2}\right) + \frac{Z}{2\pi i u}.\end{aligned}\tag{9.21}$$



Diese Strömung bewirkt nach Kutta-Zhukovski (9.9) eine Kraft auf den Zylinder:

$$\vec{F} = \rho Z(0, -v_\infty).$$

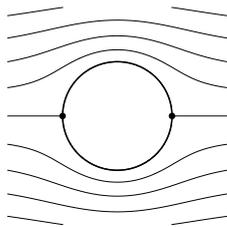
Staupunkte: $w(u) = 0$ führt auf

$$\left(\frac{u}{R}\right)^2 - 1 + \frac{ZR^{-1}}{2\pi i v_\infty} \cdot \frac{u}{R} = 0$$

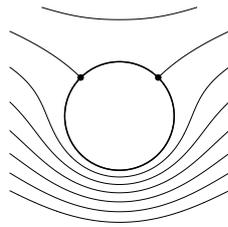
d.h. auf

$$\begin{aligned}u &= R \left(i \frac{Z}{Z_c} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{Z}{Z_c}\right)^2} \right), \\ Z_c &= 4\pi R v_\infty.\end{aligned}$$

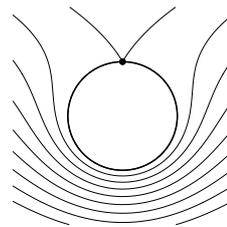
Für $|Z| < Z_c$ ist $|u|^2 = R^2$: Die zwei Staupunkte liegen auf dem Zylinder; für $Z = Z_c$ rücken sie zusammen zu $u = iR$, für $Z > Z_c$ bleibt nur ein Staupunkt ausserhalb des Zylinders (für die andere Lösung ist $|u| < R$):



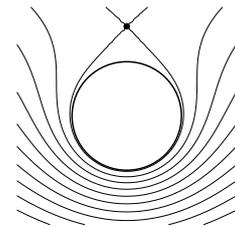
$Z = 0$



$0 < Z < Z_c$



$Z = Z_c$



$Z > Z_c$

(5): **Drehung von (4) (= (3) + (2))**

$$\phi(u) = -v_\infty \left(e^{-i\alpha} u + e^{i\alpha} \frac{R^2}{u} \right) - \frac{Z}{2\pi i} \log(e^{-i\alpha} u).\tag{9.22}$$

(Der Faktor $e^{-i\alpha}$ im letzten Term addiert zu ϕ nur eine irrelevante Konstante). Die Tangentialgeschwindigkeiten sind die Summen von (9.20, 9.19):

$$v = -2v_\infty \sin(\theta - \alpha) + \frac{Z}{2\pi R}, \quad v = \frac{v_\infty R \sin(\theta - \alpha) - (Z/4\pi)}{R \sin \theta}\tag{9.23}$$

bei $z = 2R \cos \theta$. Durch passende Wahl von Z können wir nun einen Staupunkt am Zylinder nach $\theta = 0$ bringen,

$$\frac{Z}{4\pi} = -v_\infty R \sin \alpha, \quad (\text{d.h. } Z = -Z_c \sin \alpha), \quad (9.24)$$

sodass er auf der Platte auf die Singularität des Nenners trifft. Dadurch wird die Geschwindigkeit längs der Platte

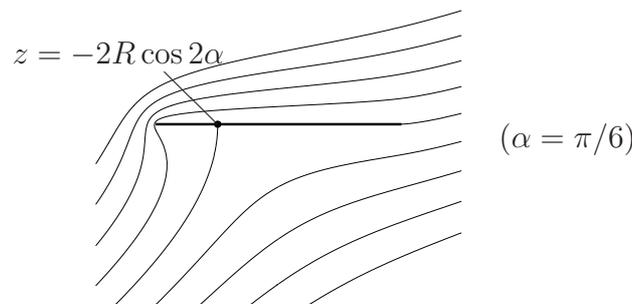
$$v = v_\infty \frac{\sin(\theta - \alpha) + \sin \alpha}{\sin \theta}$$

an der ‘‘Hinterkante’’ $\theta = 0$ **endlich**, und zwar (de l’Hopital-Regel)

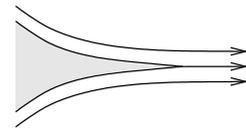
$$\omega \equiv v(\theta = 0) = v_\infty \cos \alpha.$$

Der Auftrieb ist dann

$$|\vec{F}| = 4\pi\rho v_\infty^2 R \sin \alpha. \quad (9.25)$$



Es bleibt ein Staupunkt und die Geschwindigkeit an der ‘‘Vorderkante’’ $z = -2R$ ist immer noch divergent! Diese Strömung erfüllt aber die **experimentell** beobachtete **Kutta-Bedingung**: An der Hinterkante eines spitz auslaufenden Flügels lösen sich die Stromlinien in Richtung der Spitze ab mit gleichen Geschwindigkeiten oben und unten.



Die Zirkulation stellt sich in der Startphase (keine Potentialströmung!) entsprechend ein.

Bemerkungen. 1) Der Grund der Kutta-Bedingung liegt in der Viskosität und kann somit erst mit den Begriffen aus Kap. 10 verstanden werden. Für ideale Fluida ist Z beliebig und insbesondere nicht durch v_∞ bestimmt, wie dies in (9.24) der Fall ist. Die entsprechenden Lösungen sind keine Näherungslösung für das reale Fluidum, schon wegen den unterschiedlichen Randbedingungen (6.14, 6.21). Für kleine Viskositäten und in günstigen Fällen bleibt die ideale Lösung aber brauchbar ausserhalb einer dünnen Grenzschicht, in der die reale Geschwindigkeit von Null auf den Wert der Lösung springt. Günstig ist der Fall, falls das Fluidum am Rand beschleunigt wird, oder nur wenig verzögert wird; ansonsten löst sich die Grenzschicht vom Rand ab und die ideale Lösung wird irrelevant. Die Hinterkante in der Figur auf S. 92 (rechts) weist wegen der Divergenz der Geschwindigkeit eine starke Verzögerung auf, nicht aber die in der Figur oben.

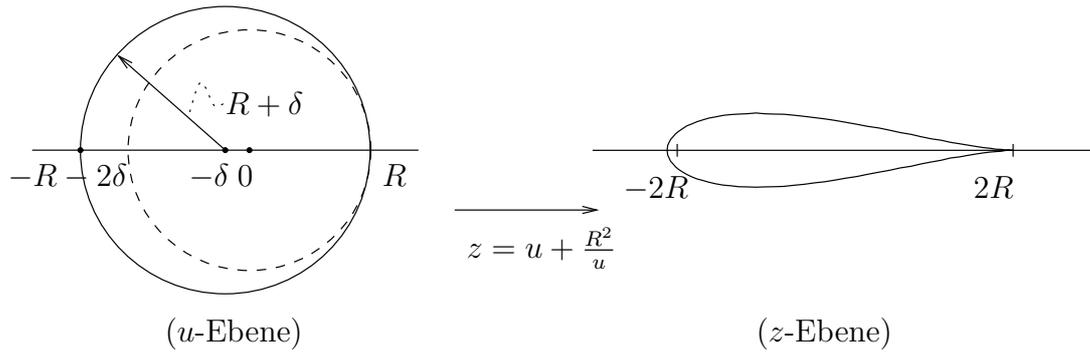
2) Ähnliches gilt im Beispiel 4 für die Strömung um einen sich mit Winkelgeschwindigkeit Ω drehenden Zylinder. Solange die Lösungen auch für eine haftende Randbedingung relevant sind (dies ist der Fall für $v_\infty < \Omega R$), erfährt der Zylinder eine Kraft (9.9) mit $Z = 2\pi\Omega R^2$ (**Magnus-Effekt**).

(6) **Zhukovski-Flügel**

Wir vergrössern den Zylinder um den Faktor

$$\lambda = \frac{R + \delta}{R} > 1$$

um den Punkt $u = R$:



Das Zhukovski-Profil ist das Bild des Zylinders (grosser Kreis). Wir diskutieren den Verlauf bei $z = 2R$ mittels der Entwicklung

$$z = u + \frac{R}{\frac{u}{R} - 1 + 1} = 2R + R\left[\left(\frac{u}{R} - 1\right)^2 - \left(\frac{u}{R} - 1\right)^3 + \dots\right]$$

wobei $u - R = \lambda(Re^{i\theta} - R)$, d.h.

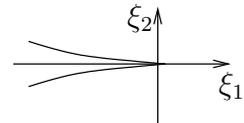
$$\frac{u}{R} - 1 = \lambda(e^{i\theta} - 1) = \lambda\left(i\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \dots\right),$$

also

$$\frac{z - 2R}{R\lambda^2} \equiv \xi_1 + i\xi_2 = -\theta^2 + i(\lambda - 1)\theta^3 + \dots$$

Die Hinterkante des Profils hat damit die Gestalt einer Spitze:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\theta^2, \\ \xi_2 &= (\lambda - 1)\theta^3 = (\lambda - 1)(-\xi_1)^{3/2}. \end{aligned}$$

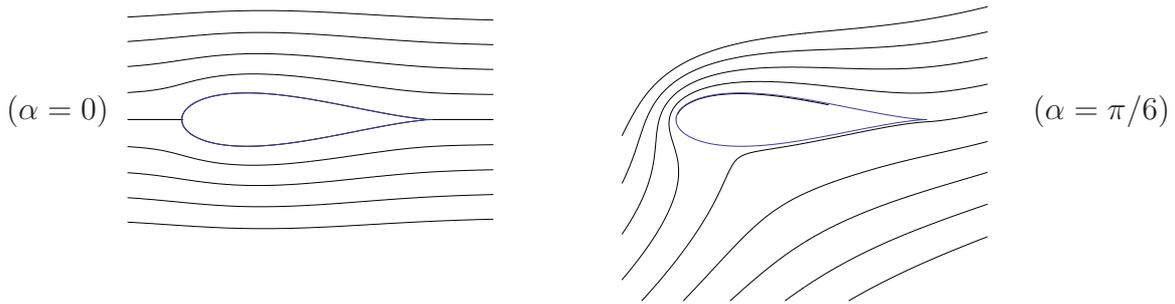


Die diskutierten Strömungen lassen sich auf den vergrösserten Zylinder übertragen, so z.B. das Potential (9.22)

$$\phi(u) = -v_\infty \left((u + \delta)e^{-i\alpha} + \frac{(R + \delta)^2}{(u + \delta)} e^{i\alpha} \right) - \frac{Z}{2\pi i} \log(e^{-i\alpha}(u + \delta)).$$

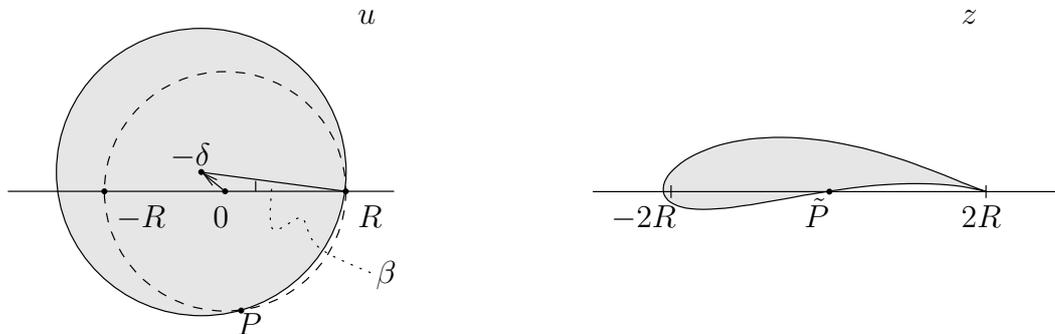
Die Tangentialgeschwindigkeit am Zylinder ist dann wie in (9.23) bis auf die Ersetzung $R \rightsquigarrow R + \delta$. Insbesondere ist der Auftrieb bei Einhaltung der Kutta-Bedingung

$$|\vec{F}| = 4\pi\rho v_\infty^2 (R + \delta) \sin \alpha. \tag{9.26}$$



Hier ist nun \vec{v} überall endlich! Schon bei kleinen Anströmungswinkel α kommt es aber oberhalb der Vorderkante zu einer starken Verzögerung und damit zum ungünstigen Abriss der Grenzschicht (vgl. Bemerkung auf S. 94). Relevant ist die Strömung für $|\alpha| \lesssim \alpha_{\text{krit}}$. Durch Wahl des Profils (d.h. von λ) kann man α_{krit} beeinflussen innerhalb von $\alpha_{\text{krit}} \lesssim 15^\circ$.

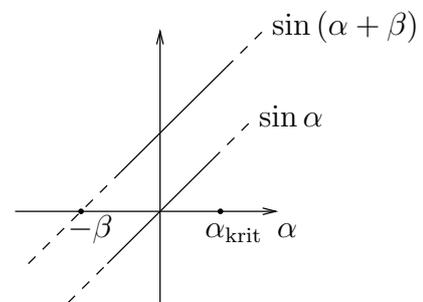
Einen **asymmetrischen Zhukovski-Flügel** erhält man so:



Hier ist der Mittelpunkt des Zylinders bei $-\delta$ (komplex) und der Radius $|R+\delta|$ so gewählt, dass der Zylinder immer noch durch die Singularität $u = R$ der Abbildung (9.13) verläuft, bzw. die Spitze bei $z = 2R$ liegt. Bei der Parametrisierung $u + \delta = |R + \delta|e^{i\theta}$ des Zylinders bleibt zwar die erste Gleichung (9.23) bis auf $R + \delta \rightsquigarrow |R + \delta|$ gültig, aber dem Punkt $u = R$ entspricht nun $\theta = -\beta < 0$ (s. Figur) statt $\theta = 0$. Entsprechend folgt aus der Kutta-Bedingung

$$|\vec{F}| = 4\pi\rho v_\infty^2 |R + \delta| \sin(\alpha + \beta) .$$

Das asymmetrische Profil ist aber hinsichtlich des Auftriebs nur scheinbar äquivalent zu dem um $-\beta$ gedrehten symmetrischen Profil, vgl. (9.26). Das relevante Intervall ist neu nicht einfach das entsprechend nach links verschobene Intervall, d.h. $|\alpha + \beta| \lesssim \alpha_{\text{krit}}$, sondern es ist weiterhin durch den Anströmungswinkel gegenüber der Vorderkante bestimmt. Da diese nach unten geneigt ist, wird das Intervall $|\alpha| \lesssim \alpha_{\text{krit}}$ eher nach rechts verschoben. Somit lassen sich mit dem asymmetrischen Profil grössere Auftriebe erzielen.

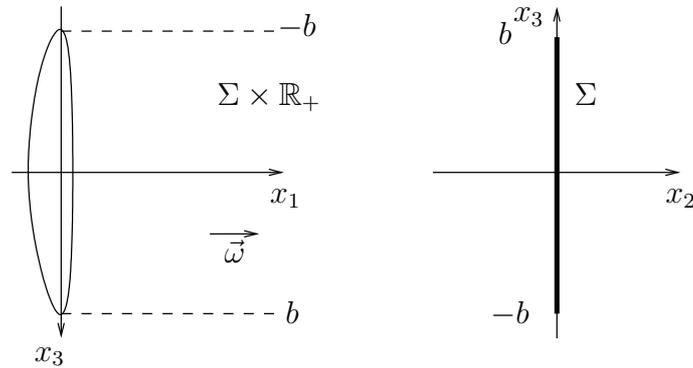


3. Auftrieb und Widerstand

Im Unterschied zum 2-dim. Fall kann ein Flügel mit Zirkulation in Dimension 3 nicht von einer wirbelfreien Strömung umgeben sein, da sein Komplement nun einfach zusammenhängend ist. Der Flügel ist mit dem Unendlichen über eine **Wirbelschleppe** verbunden, die sich mit der Bewegung stets verlängert. Die dazu erforderliche Arbeit bewirkt einen induzierten Widerstand, der im Folgenden berechnet und minimiert wird. Wir idealisieren die Wirbelschleppe als ein Blatt $\Sigma \times \mathbb{R}_+$ in der Ebene $x_2 = 0$ der Wirbeldichte

$$\vec{\omega}(x) = w(x_3)\delta(x_2)\theta(x_1)\vec{e}_1, \quad (9.27)$$

das sich hinter dem Flügel ausbreitet. Wir zeigen, dass w sowohl Auftrieb wie Widerstand bestimmt.



Das Profil des Flügels ändert sich mit x_3 und ebenso seine Zirkulation $Z(x_3)$. Der Satz von Stokes, angewandt auf einen Zylinder, der den Flügel zwischen den Querschnitten x'_3 und x''_3 umhüllt, liefert

$$Z(x''_3) - Z(x'_3) = \int_{x'_3}^{x''_3} w(x_3) dx_3, \quad (9.28)$$

d.h. $dZ/dx_3 = w(x_3)$. Das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} soll fortan auf das Ruhesystem des Fluidums im Unendlichen bezogen sein. Wir gehen ferner davon aus, dass es weit hinter dem Flügel ($x_1 \gg b$) wie in (7.12, 7.13) durch $\vec{\omega}$ bestimmt ist. Insbesondere ist $v_1 = 0$ und \vec{v} symmetrisch bzgl. der 2-Achse.

Der Widerstand W ist gleich der Energie pro Längeneinheit (in 1-Richtung) der Wirbelschleppe:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\rho}{2} \int (v_2^2 + v_3^2) dx_2 dx_3 = \frac{\rho}{2} \int (\vec{\nabla} \phi_1)^2 dx_2 dx_3 \\ &= -\frac{\rho}{2} \oint_{\Sigma} \phi_1 \vec{\nabla} \phi_1 \cdot d\vec{n}. \end{aligned} \quad (9.29)$$

Hier wurde benutzt, dass (i) die Strömung ausserhalb Σ wirbelfrei ist und somit auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Sigma$ ein Potential $\phi_1 = \phi_1(x_2, x_3)$ besitzt,

$$(v_2, v_3) = -\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi_1}{\partial x_3}\right) = -\vec{\nabla} \phi_1;$$

(ii) die Strömung inkompressibel ist, und somit $\Delta\phi_1 = 0$ in der Identität $\operatorname{div}(\phi_1 \vec{\nabla}\phi_1) = (\vec{\nabla}\phi_1)^2 + \phi_1 \Delta\phi_1$. Die Eigenschaften (i) und (ii) werden wie in (9.2) zusammengefasst zu

$$w = v_2 - iv_3 = -\frac{d\phi}{dz}, \quad (z = x_3 + ix_2)$$

für eine analytische Funktion $\phi(z) = \phi_1 - i\phi_2$. Somit ist in (9.29)

$$\vec{\nabla}\phi_1 \cdot d\vec{n} = (\vec{\nabla}\phi_1)^\perp \cdot d\vec{x} = -\vec{v}^\perp \cdot d\vec{x} = \operatorname{Im}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} dz\right),$$

vgl. (9.7). Der Widerstand ist zu vergleichen mit dem Auftrieb (9.9)

$$F = -\rho v_\infty \int_{-b}^b Z(x_3) dx_3, \quad (9.30)$$

wobei $Z(x_3) = \phi_1(x_2, x_3)|_{x_2=0-}^{0+}$. Zu diesem Zweck stellen wir die geschlitzte z -Ebene einmal mehr mittels der Abbildung (9.13) dar (bis auf Multiplikation mit i , da der Schlitz Σ nun vertikal ist), s. Fig. auf S. 90. Ihm entspricht ein Kreis \mathcal{C} vom Radius $R = b/2$ und $dx_3 = b \sin\theta d\theta$. Dann wird aus (9.29, 9.30)

$$W = -\frac{\rho}{2} \oint_{\mathcal{C}} \phi_1 \operatorname{Im}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u} du\right), \quad F = -\rho v_\infty b \oint_{\mathcal{C}} \phi_1 \sin\theta d\theta$$

mit $\phi(u) = \phi(z(u))$. Die Funktion $\phi(u)$ ist analytisch in $|u| > b/2$ und hat deshalb eine Laurent-Reihe

$$\phi(u) = -i \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{b}{2}\right)^n u^{-n}.$$

Die Strömung ist nun symmetrisch bzgl. der $\operatorname{Re} u$ -Achse, also $\phi(\bar{u}) = -\overline{\phi(u)}$, was $c_n = \bar{c}_n$, d.h. c_n reell, zur Folge hat. Auf \mathcal{C} ist $u = (b/2)e^{i\theta}$, $du = iud\theta$, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial u} du &= -n \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{b}{2}\right)^n u^{-n} d\theta, \\ \operatorname{Im}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u} du\right) &= n \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n\theta d\theta. \end{aligned}$$

Zudem ist dort $\phi_1 = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\theta d\theta$. Daraus folgen

$$W = \pi \frac{\rho}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n c_n^2, \quad F = \pi \rho v_\infty b c_1.$$

Das Verhältnis von Widerstand und Auftrieb erfüllt

$$\frac{W}{F} \geq \frac{c_1}{2v_\infty b} \quad (9.31)$$

für $F > 0$ und erzielt den minimalen Wert auf der rechten Seite, falls $c_n = 0$ für $n \geq 2$. Dem entspricht $\phi(u) = ic_1 \cdot b/2u = ic_1 \cdot 2\bar{u}/b$ und nach (9.15, 9.28)

$$\begin{aligned} Z(x_3) &= -2c_1 \sqrt{1 - (x_3/b)^2}, \\ w(x_3) &= \frac{2c_1}{b} \frac{x_3/b}{\sqrt{1 - (x_3/b)^2}}. \end{aligned}$$

Insbesondere nimmt die Wirbeldichte gegen die Flügelspitzen hin zu.

Um die Abhängigkeit des minimalen Widerstands von der Grösse der Flügel sichtbar zu machen, führen wir dimensionslose Auftrieb- und Widerstandskoeffizienten ein:

$$C_F = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S}, \quad C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S},$$

wobei S die Fläche des Flügels ist. C_F ist invariant unter einer homogenen Vergrößerung des Flügels. Dann lautet (9.31)

$$\frac{W}{F} = \frac{C_W}{C_F} \geq \frac{C_F}{4\pi} \cdot \frac{S}{b^2},$$

wobei $S/b^2 = O(b^{-1})$, ($b \rightarrow \infty$). Bei dieser Diskussion unberücksichtigt geblieben sind: (a) Die Wirbeldichte (9.27) ist keine Lösung der 2-dim. Wirbeldynamik (7.14). Unter dieser rollt sich die Wirbelschlepe seitwärts auf; (b) Der Widerstand infolge Viskosität des Fluidums.

10. Inkompressible, reibende Fluida

1. Allgemeines

Es sei an die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen (6.20) erinnert:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0, \\ \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \vec{F} - \vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Der Reibungsterm wirkt **dissipativ**: Wegen

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} &= -p\delta_{ik} + \eta(v_{i,k} + v_{k,i}) \quad (\text{Spannungstensor}) \\ \varepsilon &= \frac{\vec{v}^2}{2} + U(\vec{x}) \quad (\vec{F} = -\vec{\nabla}U), \quad (\text{Energiedichte pro Masseneinheit}) \end{aligned}$$

und $DU/Dt = \vec{v} \cdot \vec{\nabla}U$ lautet die Bilanzgleichung (6.9) der Energie eines mitgeführten Volumens V_t

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \varepsilon d^3x = \int_{\partial V_t} v_i \sigma_{ik} d\sigma_k - \int_{V_t} v_{i,k} \sigma_{ik} d^3x.$$

Der erste Term auf der rechten Seite beschreibt die Leistung $\vec{v} \cdot d\vec{f}$ der Oberflächenkräfte $f_i = \sigma_{ik} d\sigma_k$; der zweite,

$$\begin{aligned} - \int_{V_t} v_{i,k} \sigma_{ik} d^3x &= -2\eta \int_{V_t} D_{ik} D_{ik} d^3x \leq 0, \\ D_{ik} &= \frac{1}{2}(v_{i,k} + v_{k,i}) \quad (\text{Verzerrungsgeschwindigkeit}), \end{aligned}$$

die Reibungsverluste.

Randbedingung. Am Rand eines (ruhenden) Gefäßes G soll die Flüssigkeit haften

$$\vec{v} = 0, \quad (10.2)$$

(statt bloss $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ für die ideale Flüssigkeit; mathematisch: Die Gleichung (10.1) ist 2. Ordnung im \vec{x}). Wegen

$$D_{ik}^2 = \frac{1}{4}(v_{i,k} - v_{k,i})^2 + 4 \underbrace{v_{i,k} v_{k,i}}_{(v_{i,k} v_k)_i}$$

lautet die Energiebilanz für beschränktes G auch

$$\frac{d}{dt} \int_G \rho \varepsilon d^3x = -\eta \int_G (\operatorname{rot} \vec{v})^2 d^3x. \quad (10.3)$$

Reynolds-Skalierung. ($\vec{F} = 0$) Es sei λ eine durch die Anordnung ausgezeichnete **Länge** und ν eine ausgezeichnete **Geschwindigkeit**, z.B. $\lambda = R$ und $\nu = v_\infty$ für die Strömung um eine Kugel. Dann führen wir statt \vec{x}, t dimensionslose Variablen \vec{x}', t' ein durch

$$\vec{x} = \lambda \vec{x}', \quad \vec{v} = \nu \vec{v}' \quad \longrightarrow \quad t = \frac{\lambda}{\nu} t'.$$

Ferner skalieren wir

$$p = \rho \nu^2 p' .$$

Dann lautet (10.1)

$$\frac{D\vec{v}'}{Dt'} = -\vec{\nabla}' p' + \frac{1}{\text{Re}} \Delta' \vec{v}' \quad (10.4)$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \nu \lambda}{\eta} : \quad \text{Reynolds-Zahl des Problems.}$$

Geometrisch ähnliche Strömungen mit gleicher Reynoldszahl sind nur verschiedene Skalenmodelle einer einzigen, durch (10.4) beschriebenen Strömung.

2. Beispiele von Strömungen

Die Strömungen sind stationär, ausser das Gegenteil sei gesagt. Stets ist $\vec{F} = 0$.

(1) Ebene Strömungen

Wir verwenden kartesische Koordinaten (x, y, z) und Komponenten. Strömung:

$$\vec{v} = (v(y), 0, 0) .$$

Damit ist

$$\text{div } \vec{v} = 0 , \quad (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = 0 \quad (10.5)$$

und Gl. (10.1) lautet

$$\vec{\nabla} p = \eta \Delta \vec{v} = \eta \left(\frac{d^2 v}{dy^2}, 0, 0 \right) . \quad (10.6)$$

Somit hat $\vec{\nabla} p$ hat nur eine x -Komponente: $p = p(x)$. Wegen $\text{div } \vec{v} = 0$ ist

$$\Delta p = p''(x) = 0 , \quad \text{also } p(x) = p_0 - \alpha x$$

(α : Druckabfall pro Längeneinheit in x -Richtung). Gl. (10.6) lautet noch $d^2 v / dy^2 = -\alpha / \eta$. Nach zweimaliger Integration mit $v(0) = 0, v(h) = U$ ist

$$v(y) = \frac{\alpha}{2\eta} y(h-y) + \frac{U}{h} y .$$

Die **Schubspannung** auf eine horizontale Fläche ist

$$\eta \frac{dv}{dy} = \frac{\alpha}{2} (h - 2y) + \eta \cdot \frac{U}{h}$$

und der **Massenstrom pro Längeneinheit** in z -Richtung

$$\rho \int_0^h dy v(y) = \left(\frac{\alpha}{12\eta} h^3 + \frac{U}{2} \cdot h \right) \cdot \rho .$$

Spezialfälle sind $\alpha = 0$ (Couette-Strömung) und $U = 0$ (Poiseuille-Strömung).

(2) Poiseuille-Strömung im Rohr (Kreiszyylinder)

Wir rechnen mit kartesischen Komponenten, ausgedrückt in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) .

Die Strömung

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (0, 0, v(r))$$

erfüllt (10.5), sodass Gl. (10.1) lautet:

$$\text{grad } \rho = \eta \Delta \vec{v} = \eta(0, 0, \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} v(r)) \quad (10.7)$$

(benutze z.B. $\underline{x} \equiv (x_1, x_2, 0)$, $\vec{\nabla} r = \underline{x}/r$,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} v(r) + \frac{\underline{x}}{r} \cdot \frac{dv}{dr} &= \frac{\underline{x}}{r^2} \cdot r \frac{dv}{dr}, \\ \Delta v(r) &= \frac{\underline{x}}{r^2} \cdot \vec{\nabla} r \frac{dv}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv}{dr}, \end{aligned}$$

da $\text{div } \underline{x}/r^2 = 0$). Somit hat $\vec{\nabla} p$ nur eine z -Komponente, d.h. $p = p(z)$. Ferner ist nach (10.7) wegen $\text{div } \vec{v} = 0$

$$\Delta p = p''(z) = 0$$

also $p = p_0 - \alpha z$: $\alpha =$ Druckabfall pro Längeneinheit in z -Richtung. Die 3-Komponente von (10.7) lautet somit

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dv}{dr} = -\frac{\alpha}{\eta}$$

und nach Integration

$$r \frac{dv}{dr} = -\frac{\alpha}{2\eta} r^2 + C, \quad v(r) = v(0) - \frac{\alpha}{4\eta} r^2$$

($dv/dr(0)$ endlich $\rightarrow C = 0$). Die Randbedingung erfordert $v(R) = 0$, also

$$v(r) = \frac{\alpha}{4\eta} (R^2 - r^2) = v(0) \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Die **Schubspannung auf die Wand** ist

$$-\eta \frac{dv}{dr} = \frac{\alpha R}{2}$$

und der **Massenstrom durch das Rohr**

$$\begin{aligned} 2\pi\rho \int_0^R dr r v(r) &= \frac{\rho}{2} v(0) \cdot \pi R^2 \\ &= \frac{\pi\rho R^4}{8\eta} \cdot \alpha \quad (\text{Hagen-Poiseuille}) \end{aligned}$$

ist halb so gross wie für eine homogene Strömung $v(r) = v(0)$. Im Eulerschen Fall ($\eta = 0$) ist jedes Strömungsprofil $\vec{v} = (0, 0, v(x_1, x_2))$ möglich, aber nur wirbelfrei falls $v(x_1, x_2) =$ konstant.

(3) **Laminare Grenzschicht**

Nicht-stationäre Lösung: Einführen einer ebenen Wand in eine homogene Strömung (Geschwindigkeit v_∞) zur Zeit $t = 0$, bzw. plötzliches Anhalten einer mitgeführten Wand

$$\begin{aligned} t < 0 : \vec{v} &= (v_\infty, 0, 0) \\ t > 0 : \vec{v} &= (v(y, t), 0, 0) \end{aligned}$$

Damit gilt auch hier (10.5) und die Navier-Stokes Gl. (10.1) lautet

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (\nu = \frac{\eta}{\rho}).$$

Wie oben folgt $p(x) = p_0 - \alpha(t) \cdot x$. Gleicher Druck bei $x = \pm\infty$ erfordert $\alpha(t) \equiv 0$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (10.8)$$

mit

$$v(y, 0) = v_\infty; \quad v(\infty, t) = v_\infty, \quad v(0, t) = 0.$$

Die Gleichung (10.8) mitsamt Randbedingungen ist invariant unter Skalierung $t \rightarrow \lambda^2 t$, $y \rightarrow \lambda y$, wobei y/\sqrt{t} fest bleibt:

$$\begin{aligned} v(y, t) &= v(\lambda y, \lambda^2 t) \\ &= v\left(\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} y}_{=: \xi}, \frac{1}{4\nu}\right) \equiv v_\infty \cdot \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Mit $\partial\xi/\partial t = -\xi/2t$, $\partial\xi/\partial y = \frac{1}{2\sqrt{\nu t}}$ folgt

$$\varphi'' + 2\xi\varphi' = 0.$$

Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{l} t = 0, y \neq 0 \\ t > 0, y = \infty \end{array} \right\} \xi = \infty \longrightarrow \varphi(\infty) = 1,$$

$$t > 0, y = 0 : \xi = 0 \longrightarrow \varphi(0) = 0.$$

Lösung:

$$\begin{aligned} \varphi'(\xi) &= a e^{-\xi^2}, \quad \varphi(\xi) = a \int_0^\xi ds e^{-s^2} \xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} a \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\ v(y, t) &= \frac{2v_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi ds e^{-s^2}, \quad \xi = \frac{y}{2} \frac{1}{\sqrt{\nu t}}. \end{aligned}$$

Die **Grenzschicht**, in der $v(y, t)$ wesentlich von v_∞ verschieden ist, wächst mit \sqrt{t} .

(4) Couette-Strömung zwischen rotierenden Zylindern

Wir rechnen mit 2-dim. kartesischen Geschwindigkeitskomponenten, ausgedrückt in Polarkoordinaten (r, φ) :

$$\vec{v} = v(r)(-\sin \varphi, \cos \varphi)$$

(**tangential** und **stationär**). Nun ist

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} = v(r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

also

$$\begin{aligned}
(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} &= -\frac{v^2}{r}(\cos \varphi, \sin \varphi), & \text{(radial)} \\
\Delta\vec{v} &= \left(v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{v}{r^2}\right)(-\sin \varphi, \cos \varphi), & \text{(tangential)}
\end{aligned}$$

Die Navier-Stokes Gl. (10.1) lautet

$$a = -\rho(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v} - \vec{\nabla}p + \eta\Delta\vec{v}.$$

Radialkomponente: Wegen der Zylindersymmetrie $p = p(r)$ ist

$$p'(r) = \frac{\rho v^2}{r}, \quad p(r) = \rho(R_1) + \rho \int_{R_1}^r ds \frac{v^2(s)}{s}. \quad (10.9)$$

Tangentialkomponente: Die Gleichung

$$v'' + \frac{1}{r}v' - \frac{v}{r^2} = 0; \quad v(R_i) = \omega_i R_i \quad (i = 1, 2)$$

hat die linear unabhängigen Lösungen $v = r, r^{-1}$. Somit ist

$$v(r) = ar + \frac{b}{r} \quad (10.10)$$

mit (aus Randbedingungen)

$$a = \frac{R_2^2\omega_2 - R_1^2\omega_1}{R_2^2 - R_1^2}; \quad b = \frac{(\omega_1 - \omega_2)R_1^2R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

3. Instabilitäten

Die Couette-Strömung (10.10) war eine der ersten, für die man die Stabilität experimentell und theoretisch untersuchte. Im Fall $\omega_1 > 0, \omega_2 = 0$ kann man z.B. die Reynolds-Zahl $Re = \rho(\omega_1 R_1)(R_1/\eta) = \rho\omega_1 R_1^2/\eta$ benutzen. Für kleine Re (kleine ω_1) ist die Couette-Strömung stabil. Bei einem kritischen Wert Re_c kippt sie aber um in eine andere stationäre, stabile und immer noch φ -unabhängige Strömung, die nun aber z -abhängig ist (Taylor-Strömung). (Für noch höhere ω_1 treten kompliziertere Muster auf, bis schliesslich Turbulenz eintritt.) Wir untersuchen das Einsetzen der Instabilität.

A. Das Rayleigh-Kriterium. Wann ist eine **tangentiale** Strömung $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi$ eines **idealen** Fluidums **instabil**? Heuristisches (notwendiges) Kriterium: Falls es energetisch günstig ist benachbarte Stromlinien (bei $r_2 > r_1$) zu vertauschen. Dies geschieht unter Erhaltung der Zirkulation $Z(r) = 2\pi r v(r)$ (Wirbelsatz von Kelvin, (7.9)). Die Energiedichte pro Masseneinheit ist $\varepsilon(r) = v(r)^2/2 = Z(r)^2/8\pi^2 r^2$, also

$$\begin{aligned}
\text{vorher :} & \quad 8\pi^2\varepsilon' = Z_1^2 r_1^{-2} + Z_2^2 r_2^{-2}, \\
\text{nachher :} & \quad 8\pi^2\varepsilon'' = Z_1^2 r_2^{-2} + Z_2^2 r_1^{-2},
\end{aligned}$$

also

$$8\pi^2(\varepsilon'' - \varepsilon') = (Z_2^2 - Z_1^2) \underbrace{\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)}_{>0},$$

d.h. Instabilität tritt ein, falls $Z^2(r)$ irgendwo fallend ist. Im Fall der Couette-Strömung (10.10), wo

$$Z(r) = 2\pi(ar^2 + b) ,$$

also, falls $\omega_1 \cdot a < 0$. Allerdings hat die (nicht berücksichtigte) Reibung eine Ausweitung des Stabilitätsgebiets zur Folge.

B. Linearisierung der Navier-Stokes Gleichungen. Wir verwenden nun zylindrische Koordinaten und Komponenten,

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z ,$$

beschränken uns aber auf axialsymmetrische, d.h. φ -unabhängige Felder:

$$v_i = v_i(r, z) , \quad (i = r, \varphi, z).$$

(Damit wird die Beobachtung vorweggenommen, wonach die Taylor-Strömung diese Symmetrie aufweist.) Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_z \frac{\partial}{\partial z} , & (\text{skalar}) \\ \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \left(\frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\varphi^2}{r} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{Dv_\varphi}{Dt} + \frac{v_\varphi v_r}{r} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{Dv_z}{Dt} \vec{e}_z , \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} , & (\text{skalar}) \\ \Delta\vec{v} &= \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) \vec{e}_r + \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \vec{e}_\varphi + (\Delta v_z) \vec{e}_z , \\ \operatorname{div} \vec{v} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} . \end{aligned}$$

Damit lauten die Navier-Stokes Gleichungen (10.1)

$$\begin{aligned} \frac{Dv_r}{Dt} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} \right) , \\ \frac{Dv_\varphi}{Dt} + \frac{v_\varphi v_r}{r} &= \nu \left(\Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) , \\ \frac{Dv_z}{Dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z \end{aligned} \tag{10.11}$$

mit $\nu = \eta/\rho$, sowie die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 . \tag{10.12}$$

Die Lösung (10.10) schreibt sich hier als (\vec{v}^0, p^0) mit

$$v_\varphi^0 = ar + \frac{b}{r} \equiv V(r), v_r^0 = v_z^0 = 0 , \quad p^0 = (10.9) . \tag{10.13}$$

In den Gleichungen (10.11, 10.12) setzen wir nun

$$\vec{v} = \vec{v}^0 + \vec{v} , \quad p = p^0 + \tilde{p}$$

und behalten nur **Glieder 1. Ordnung** in (\vec{v}, \tilde{p}) . Diese erfüllen die Randbedingung

$$\vec{v} = 0 \quad \text{für } r = R_1, R_2 \quad (10.14)$$

(die Drehung der Zylinder ist schon in \vec{v}^0 berücksichtigt). Die so linearisierten Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} - \frac{2V}{r} \cdot \tilde{v}_\varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \nu \left(\Delta \tilde{v}_r - \frac{\tilde{v}_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{dV}{dr} + \frac{V}{r} \right)}_{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} rV} \tilde{v}_r &= \nu \left(\Delta \tilde{v}_\varphi - \frac{\tilde{v}_\varphi}{r^2} \right), \\ \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z} + \nu \Delta \tilde{v}_z, \\ \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} + \frac{\tilde{v}_r}{r} + \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (10.15)$$

behandeln wir im Grenzfall eines **engen Zwischenraumes**:

$$d := R_2 - R_1 \ll R_1. \quad (10.16)$$

Wegen $\partial/\partial r = O(1/d)$, $1/r = O(1/R_1)$ können dann die unterstrichenen Terme weglassen werden, und $\Delta = \partial^2/\partial r^2 + \partial^2/\partial z^2$.

Ansatz: (Translationsinvarianz in z -Richtung)

$$(\vec{v}, \tilde{p}) = (\vec{v}(r), p(r)) e^{\sigma t + ikz}.$$

Durch Einsetzen in (10.15) bestimmt man Moden $(\vec{v}_\alpha(r), p_\alpha(r))$ und komplexe "Frequenzen" $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha(k)$, ($\alpha = 1, 2, \dots$). Dabei bedeutet

$$\operatorname{Re} \sigma_\alpha \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases} \left. \vphantom{\operatorname{Re} \sigma_\alpha} \right\} \text{eine exponentiell} \begin{cases} \text{abfallende} \\ \text{anwachsende} \end{cases} \left. \vphantom{\operatorname{Re} \sigma_\alpha} \right\} \text{Störung.}$$

Die Stabilitätsgrenze (im Parameterbereich (ω_1, ω_2)) liegt dort, wo

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \sigma_\alpha(k) &\leq 0 \quad \text{für alle } \alpha, k, \\ \operatorname{Re} \sigma_\alpha(k) &= 0 \quad \text{für ein } \alpha, k. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Explizit:

$$\begin{aligned} \nu(D^2 - k^2 - \frac{\sigma}{\nu})v_r &= -\frac{2V}{r}v_\varphi + \frac{1}{\rho}Dp, \\ \nu(D^2 - k^2 - \frac{\sigma}{\nu})v_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rV) \cdot v_r, \\ \nu(D^2 - k^2 - \frac{\sigma}{\nu})v_z &= \frac{ik}{\rho}p, \\ Dv_r &= -ikv_z \end{aligned} \quad (10.18)$$

mit $D = d/dr$. Auflösung der letzten beiden Gleichungen nach v_z, p und Einsetzen in die ersten beiden liefert

$$\begin{aligned}\frac{\nu}{k^2}(D^2 - k^2 - \frac{\sigma}{\nu})(D^2 - k^2)v_r &= \frac{2V}{r}v_\varphi, \\ \nu(D^2 - k^2 - \frac{\sigma}{\nu})v_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV)v_r.\end{aligned}\quad (10.19)$$

Dabei ist mit (10.13): $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV) = 2a$, und im Sinne der Näherung (10.16),

$$\begin{aligned}\omega(r) &\equiv \frac{V(r)}{r} \cong \omega_2 x + \omega_1(1 - x) = \omega_1(1 + \alpha \cdot x), \\ x &= \frac{r - R_1}{d} \in [0, 1], \\ \alpha &= \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1.\end{aligned}$$

Schliesslich werden die Parameter in (10.19) dimensionslos durch die Substitutionen

$$\sigma' = \sigma \frac{d^2}{\nu}, \quad k' = k \cdot d, \quad D' = \frac{d}{dx} = d \cdot D, \quad v'_\varphi = v_\varphi, \quad v'_r = \frac{\nu}{2\Omega_1 k^2 d^4} v_r$$

(wir lassen die Striche gleich wieder weg):

$$\begin{aligned}(D^2 - k^2 - \sigma)(D^2 - k^2)v_r &= (1 + \alpha x)v_\varphi \\ (D^2 - k^2 - \sigma)v_\varphi &= -T \cdot k^2 v_r\end{aligned}$$

mit der Taylor-Zahl

$$T = a \cdot \frac{4\omega_1 d^4}{r^2}$$

und Randbedingungen (s. (10.14, 10.18))

$$v_r = Dv_r = v_\varphi = 0 \quad \text{bei } x = 0, 1. \quad (10.20)$$

Die Instabilität setzt ein, wenn erstmals ein Eigenwert mit $\text{Re } \sigma = 0$ eintritt. Wir nehmen an (und dies kann bewiesen werden), dies geschehe mit $\text{Im } \sigma = 0$ (Frequenz der Störung), was experimentell dadurch bestätigt ist, dass die Taylor-Strömung stationär ist. Dann gilt für die betreffende Mode

$$(D^2 - k^2)^2 v_r = (1 + \alpha x)v_\varphi, \quad (10.21)$$

$$(D^2 - k^2)v_\varphi = -T k^2 v_r, \quad (10.22)$$

was eine Beziehung zwischen T und k^2 impliziert. Eine approximative Lösung setzt

$$v_\varphi(x) = \sin \pi x, \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (10.23)$$

an, unter Vernachlässigung höherer Fourier-Anteile. Die Lösung v_r von (10.21, 10.20) ist eine Linearkombination von

$$e^{\pm kx}, \quad x e^{\pm kx}, \quad \sin \pi x, \quad x \sin \pi x,$$

die man im Sinne der Approximation wieder auf die niedrigste Fourier-Mode projiziert:

$$v_r(x) = \underbrace{2 + \alpha}_{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}} \cdot \frac{k^2 + \pi^2}{k^2 T(k^2)} \cdot \sin \pi x ,$$

$$T(k^2) = \frac{2(k^2 + \pi^2)^3}{k^2 \{1 - 16k\pi^2 \operatorname{ch}^2 \frac{k}{2} / [(k^2 + \pi^2)^2 (\operatorname{sh} k + k)]\}} . \quad (10.24)$$

Einsetzen in (10.22) liefert dann

$$T = \frac{T(k^2)}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}} .$$

Das Minimum von $T(k^2)$ ist

$$T(k^2) = 3430 \quad \text{erreicht bei } k = 3.12 , \quad (10.25)$$

also ist die Stabilitätsgrenze (10.17) erreicht für

$$T(\omega_1, \omega_2) = \frac{3430}{1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}} . \quad (10.26)$$

Die Berücksichtigung höherer Fourier-Moden in (10.23) ändert das Resultat nur wenig.

Die Stabilitätsgrenze stimmt gut mit dem Experiment überein. Ebenfalls gut ist die Vorhersage des Taylor-Strömungsbildes (**Konvektionszellen**),

$$v_r = A \sin \pi x \cos kz , \quad v_z = -A \cos \pi x \sin kz ,$$

sowie der **Wellenlänge**, s. (10.25)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3.12} \cdot d \cong 2d .$$

4. Stokes'sche Widerstandsformel

Eine ruhende Kugel wird mit der Geschwindigkeit \vec{u} im Unendlichen angeströmt. Dann ist nach Stokes (in erster Näherung)

$$\vec{F} = 6\pi R\eta\vec{u}$$

die **Kraft** auf die Kugel K . Die (für kleine $\operatorname{Re} = \rho v_\infty R / \eta$) gute Näherung besteht in der Vernachlässigung des Konvektionsterms:

$$0 = -\rho \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{\approx 0} - \operatorname{grad} p + \eta \Delta \vec{v} . \quad (10.27)$$

A. Bestimmung des Geschwindigkeitsfelds. Wir lösen (10.27) und $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ mit den Randbedingungen

$$\vec{v} = 0 \quad \text{für } |\vec{x}| \equiv r = R , \quad (10.28)$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{u} \quad \text{für } r \rightarrow \infty . \quad (10.29)$$

Wir benutzen die harmonischen Funktionen

$$\frac{\partial^n}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \frac{1}{r}.$$

Damit kann man die harmonischen Vektorfelder \vec{w}', \vec{w}'' (d.h. $\Delta \vec{w} = 0$) konstruieren:

$$\begin{aligned} w'_i &= \frac{u_i}{r}, \\ w''_i &= u_j \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} \frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (10.30)$$

bzw.

$$\vec{w}' = \frac{\vec{u}}{r}, \quad \vec{w}'' = \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{u})\vec{x} - \vec{x}^2 \vec{u}}{r^5}.$$

Die Divergenzen sind

$$\operatorname{div} \vec{w}' = -\frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{r^3}, \quad \operatorname{div} \vec{w}'' = u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \frac{1}{r} = 0.$$

(Beachte, vgl. Übungen, dass $\vec{v} = \vec{u} - \frac{R^2}{2} \vec{w}''$ die Lösung für die Euler Gleichung bei selber Geometrie ist). Nun muss hier \vec{v} nicht $\Delta \vec{v} = 0$ lösen, sondern $\Delta \vec{v}$ muss ein Gradient sein. Beachte aber, dass

$$\begin{aligned} \Delta r^2 \vec{w}'' &= \Delta(\vec{x}^2 \cdot \vec{w}'') \\ &= 2[(\vec{\nabla} \vec{x}^2) \cdot \vec{\nabla}] \vec{w}'' + (\Delta \vec{x}^2) \vec{w}'' \\ &= 4(\vec{x} \vec{\nabla}) \vec{w}'' + 6\vec{w}'' = (-12 + 6)\vec{w}'' = -6\vec{w}'' \end{aligned}$$

nach (10.30) ein Gradient ist! Zudem ist

$$\operatorname{div}(r^2 \vec{w}'') = 2\vec{x} \vec{w}'' + \underbrace{\vec{x}^2 \cdot \operatorname{div} \vec{w}''}_{=0} = \frac{4}{r^3} \vec{u} \cdot \vec{x}$$

von derselben Form wie $\operatorname{div} \vec{w}'$. **Ansatz:**

$$\vec{v} = \vec{u} + A\vec{w}' + B\vec{w}'' + Cr^2 \vec{w}'' . \quad (10.31)$$

Der erste Term, \vec{u} , gewährleistet (10.29). Die Bedingung $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ verlangt

$$-A + 4C = 0 . \quad (10.32)$$

Auf der Kugel $r = R$ sind \vec{u} und $(\vec{u} \cdot \vec{x})\vec{x}$ linear unabhängige Funktionen. Damit ist (10.28) äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1 + \frac{A}{R} - \frac{B}{R^3} - \frac{C}{R} &= 0, \\ 3\left(\frac{B}{R^5} + \frac{C}{R^3}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Einsetzen der Lösung von (10.32, 10.33),

$$A = -R, \quad B = \frac{1}{4}R^3, \quad C = -\frac{1}{4}R$$

in (10.31) liefert

$$v_i = u_k [\delta_{ik} - \frac{3R}{4r^3} (x_i x_k + \vec{x}^2 \delta_{ik}) + \frac{R^3}{4r^5} (3x_i x_k - \vec{x}^2 \delta_{ik})] . \quad (10.34)$$

(Beachte, dass wegen dem mittleren Term $\vec{v} - \vec{u} = O(r^{-1})$ ($r \rightarrow \infty$), statt $O(r^{-3})$ wie im Euler Fall, vgl. S. 89). Daraus bestimmt man noch den Druck

$$\begin{aligned} \text{grad } p &= \eta \Delta \vec{v} = \eta \cdot C \Delta (r^2 \vec{w}'') = -6\eta C \vec{w}'' , \\ p &= -6\eta C (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = -\frac{3}{2} \eta R \frac{\vec{u} \cdot \vec{x}}{r^3} . \end{aligned} \quad (10.35)$$

B. Berechnung der Kraft. Zuerst bemerken wir, dass wegen $\text{div } \vec{v} = 0$ und (10.27) für

$$\sigma_{kl} = -p \delta_{kl} + \hat{\sigma}_{kl} , \quad \hat{\sigma}_{kl} = \eta (v_{k,l} + v_{l,k})$$

gilt

$$\begin{aligned} \sigma_{kl,l} &= -p_{,k} + \eta (v_{k,l} + v_{l,k})_{,l} \\ &= -p_{,k} + \eta \Delta v_k + (\text{div } \vec{v})_{,k} = 0 . \end{aligned}$$

Deshalb ist

$$\vec{F}_k = \oint_{|\vec{x}|=R} \sigma_{kl} d\sigma_l = \oint_{|\vec{x}|=r} \sigma_{kl} d\sigma_l$$

unabhängig von r ! Nur die ersten zwei Terme in (10.34) liefern Beiträge $\sim r^{-2}$ zu $\hat{\sigma}_{kl}$, nämlich

$$\hat{\sigma}_{kl} = -\frac{3}{2} \eta R u_i \left(\frac{x_i \delta_{kl}}{r^3} - \frac{3x_i x_k x_l}{r^5} \right) + O(r^{-4}) . \quad (10.36)$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sigma_{kl} d\sigma_l &= (-p + \hat{\sigma}_{kl}) \frac{x_l}{r} \cdot d\sigma \\ &= \frac{9}{2} \eta R u_i \frac{x_i x_k}{r^5} \cdot \underbrace{x_l x_l}_{=r^2} \cdot d\sigma , \end{aligned}$$

da sich der erste Term (10.36) gegen den Beitrag von (10.35) weghebt, und schliesslich

$$F_k = \frac{9}{2} \eta \frac{R}{r^4} u_i \oint_{|\vec{x}|=r} x_i x_k d\sigma = 6\pi \eta R u_k .$$

Dabei wurde verwendet, dass das Integral von der Form $\lambda \delta_{ik}$ sein muss, und $\lambda = (4\pi/3)r^4$ durch Bildung der Spur ermittelt.

5. Grenzschichten

Inkompressible Navier-Stokes Gleichungen (dimensionslos)

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} , \quad (10.37)$$

$$\text{div } \vec{v} = 0 ,$$

$$\vec{v} = 0 \quad \text{auf } \partial G . \quad (10.38)$$

Fragen:

1) Streben die Lösungen für $\text{Re} \rightarrow \infty$ gegen die der Euler Gleichungen?

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\text{grad } p, \quad \text{div } \vec{v} = 0, \quad (10.39)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{auf } \partial G \quad (10.40)$$

Nein: Da der kleine Parameter $(\text{Re})^{-1}$ vor der höchsten Ableitung steht, ist (10.37) keine "reguläre" Störung von (10.39). Typischerweise bleibt

$$\frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} = O(1) \quad \text{für} \quad \text{Re} \rightarrow \infty.$$

2) Stationäre Potentialströmungen (s. Kap. 9) erfüllen (10.39) sowie

$$\Delta \vec{v} = \text{grad} \underbrace{\text{div } \vec{v}}_{=0} - \text{rot} \underbrace{\text{rot } \vec{v}}_{=0} = 0,$$

also auch die Navier-Stokes Gleichungen?

Nein: Sie erfüllen die Randbedingung (10.38) nicht!

Dies legt nahe, dass eine Lösung von (10.39, 10.40) bloss in einer **Grenzschicht** beim Rand ∂G abgeändert werden muss, um (10.37, 10.38) zu erfüllen; die Änderung verschwindet aber nicht für $\text{Re} \rightarrow \infty$.

Illustration. Die Differentialgleichung auf $x \in [0, \infty)$

$$\frac{df}{dx} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

hat die triviale Lösung: $f_0(x) = 1$. Die singuläre Störung

$$\varepsilon \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = 0, \quad (\varepsilon > 0 \text{ klein})$$

mit der zusätzlichen Randbedingung (da die Gleichung von 2. Ordnung ist)

$$f(0) = 0$$

hat die Lösung

$$f_\varepsilon(x) = 1 - e^{-x/\varepsilon}.$$

Zwar gilt $f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} f_0(x)$ für festes $x > 0$, aber nicht gleichmässig.

Größenordnungen in der Grenzschicht

Die Dicke $\delta(x)$ sei annähernd konstant

$$\frac{d}{dx} \delta(x) \ll 1.$$

Setze $\vec{v} = (u, v)$. Stationäre Navier-Stokes Gleichung:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (10.41)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (10.42)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (10.43)$$

zudem

$$u = v = 0 \quad \text{bei } y = 0 \quad (10.44)$$

$$u \rightarrow U(x), \quad v \rightarrow 0 \quad \text{für } y \rightarrow \infty. \quad (10.45)$$

Größenordnungen: $x \approx O(1)$, $y \approx O(\delta)$

$$u(x, y) = O(1), \quad p(x, y) = O(1)$$

$$(10.43, 10.44) : \quad v(x, y) = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, y') dy' = O(\delta);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = O(1), \quad \frac{\partial}{\partial y} = O(\delta^{-1})$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = O(1), \quad v \frac{\partial u}{\partial y} = O(1), \quad \frac{\partial p}{\partial x} = O(1),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = O(\delta), \quad v \frac{\partial v}{\partial y} = O(\delta), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = O(\delta^{-1}),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O(1), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O(\delta^{-2}), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O(\delta), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O(\delta^{-1}).$$

Die Gleichung (10.41) erfordert $O(1) = (\text{Re})^{-1} O(\delta^{-2})$ für $\text{Re} \rightarrow \infty$, damit sie nicht trivial wird, also

$$\delta \cong \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}.$$

Nach Weglassen der Terme, die für $\text{Re} \rightarrow \infty$ irrelevant werden, lauten (10.41—10.43) noch

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (10.46)$$

mit Randbedingungen (10.44). “ $y \rightarrow \infty$ ” bedeutet ausserhalb der Grenzschicht. Deshalb ist (10.45) zu interpretieren als

$$u(x, y) \rightarrow U(x); \quad p(x, y) \rightarrow p(x) \quad (y \rightarrow \infty)$$

wobei $U(x), p(x)$ die Randwerte der Lösung der Euler Gleichungen sind, von der man ausgeht. Nach Bernoulli bei $y = 0$ ist

$$p(x) + \frac{1}{2} U(x)^2 = \text{const},$$

also $-\frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}$. Nach (10.46) gilt dann $p(x, y) = p(x)$. Zusammenfassend:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (10.47)$$

mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} u = v = 0 & \quad \text{auf } y = 0 \\ u \rightarrow U(x), & \quad (y \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(**Prandtl-Gleichungen**). Da nur 1. Ableitungen von v vorkommen, ist dafür keine weitere Randbedingung bei $y \rightarrow \infty$ zu setzen. Zur eindeutigen Festlegung der Lösung wird noch ein ‘‘Anfangsprofil’’ benötigt:

$$u(x_0, y) = u_0(y)$$

(U, u_0 vorgegeben).

Beispiel. Die Grenzschicht an der Halbplatte. Durch Einführung der Stromfunktion ψ (dank (10.43)),

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

lautet (10.47)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (10.48)$$

(wir schreiben ν statt Re^{-1} , da keine ausgezeichnete Längenskala vorhanden) mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= U \quad \text{bei } x = 0 \quad (\text{Anfangsprofil}) \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &\xrightarrow{y \rightarrow \infty} U, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \psi = 0 \quad \text{bei } y = 0 \end{aligned}$$

(da $\partial \psi / \partial x = 0$ bei $y = 0$). Die Lösung ψ erfüllt

$$\psi(x, y) = \delta \cdot \psi(\delta^{-2}x, \delta^{-1}y)$$

($\delta \neq 0$ beliebig), da die rechte Seite sowohl Gleichung wie Randbedingung erfüllt. Mit

$$\delta = \delta(x) := \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

ist

$$\psi(x, y) = U \delta(x) f(\xi), \quad \xi = \frac{y}{\delta(x)}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} &= U \cdot \frac{d\delta}{dx} (f - \xi \cdot f'), & (' = \frac{d}{d\xi}) \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} &= -U \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dx} \cdot \xi f'' \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= U f', & \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{U}{\delta} f'' \\ \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} &= \frac{U}{\delta^2} f''' .\end{aligned}$$

Einsetzen in (10.48) liefert wegen $\frac{d\delta}{dx} = -\frac{1}{2} \frac{\delta}{x}$

$$\frac{1}{2} f f'' + f''' = 0 \quad (10.49)$$

mit Randbedingungen

$$f'(\infty) = 1, \quad f(0) = f'(0) = 0 .$$

Das Geschwindigkeitsprofil ist dann

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = U \cdot f'(\xi), \quad \xi = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} . \quad (10.50)$$

Die Differentialgleichung (10.49) kann nicht in geschlossener Form integriert werden. Numerisch ist $\xi_0 := \int_0^\infty (1 - f'(\xi)) d\xi \cong 1,72$.

Die Strömungsgeschwindigkeit (10.50) unterscheidet sich von der Eulerschen $u = U$, was auf eine Differenz $\Delta\dot{m}$ der Massenströme hinführt:

$$\Delta\dot{m} = \rho \int_0^\infty U(1 - f'(\xi)) \underbrace{dy}_{=\delta(x) d\xi} = \rho U \xi_0 \delta(x) .$$

Somit ist $\xi_0 \delta(x)$ die effektive Dicke der Grenzschicht.

11. Turbulenz

1. Statistische Beschreibung

Für kleine Werte $\nu = \eta/\rho > 0$ der kinematischen Viskosität wird die Flüssigkeitsbewegung turbulent, d.h.

- Die Strömung weist Strukturen (Vortizes) auf, deren Längenskalen sich um etliche Zehnerpotenzen unterscheiden.
- Starke Abhängigkeit der Strömung von den Anfangsbedingungen und den äusseren Kräften: Das einzelne Strömungsbild ist nicht reproduzierbar.
- Verschiedene Momentaufnahmen erscheinen als zufällige Stichproben einer Gesamtheit: Das statistische Verhalten ist reproduzierbar.

Die Navier-Stokes Gleichung

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{F} - \rho^{-1} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad \text{div } \vec{v} = 0 \quad (11.1)$$

beschreibt eine grundsätzlich **deterministische** Zeitentwicklung. Die Momentaufnahmen

$$\vec{v}(\cdot, t_1), \dots, \vec{v}(\cdot, t_n) \quad (11.2)$$

zu hinreichend verschiedenen Zeiten t_1, \dots, t_n aber zum selben Kraftgesetz $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$ (und z.B. Anfangsbedingung $\vec{v} = 0$) erscheinen unkorreliert: Sie scheinen der selben Gesamtheit zu entstammen, wie Felder $\vec{v}(\cdot, t)$ zur selben, grossen Zeit t aber zu verschiedenen Kräften

$$\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n .$$

Der Zufallscharakter kommt explizit ins Spiel, indem wir $\vec{F}(\vec{x}, t)$ und demzufolge $\vec{v}(\vec{x}, t)$ als **Zufallsvariable** auffassen. Wir postulieren statistische Stationarität, Homogenität und Isotropie:

$$\langle F_{i_1}(\vec{x}_1, t_1) \dots F_{i_n}(\vec{x}_n, t_n) \rangle = \langle R_{i_1 j_1} F_{j_1}(R\vec{x}_1 + \vec{a}, t_1 + \tau) \dots R_{i_n j_n} F_{j_n}(R\vec{x}_n + \vec{a}, t_n + \tau) \rangle ,$$

wobei $R \in \text{SO}(3)$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\tau \in \mathbb{R}$ und $\langle \cdot \rangle$ den Mittelwert bezeichnet. Insbesondere ist $\langle \vec{F}(\vec{x}, t) \rangle = 0$ und $\langle \vec{F}(\vec{x}_1, t_1) \cdot \vec{F}(\vec{x}_2, t_2) \rangle$ nur von $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$, $|t_1 - t_2|$ abhängig. All dies überträgt sich auf \vec{v} , abgesehen von einer anfänglichen Erinnerung an die Anfangsbedingung.

Energiebilanz

$$\frac{1}{2} \frac{D\vec{v}^2}{Dt} = \vec{v} \cdot \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{v} \cdot (\vec{F} - \rho^{-1} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v})$$

d.h. (verwende $\Delta \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \text{rot rot } \vec{v}$ und $\text{div } \vec{v} = 0$)

$$\frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t} \frac{1}{2} = -\text{div} \left(\left(\frac{\vec{v}^2}{2} + \rho^{-1} p \right) \vec{v} \right) + \vec{v} \cdot \vec{F} - \nu \vec{v} \cdot \text{rot rot } \vec{v} .$$

In gemittelter Form lautet die Bilanz

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle \vec{v}^2 \rangle}{2} = \langle \vec{v} \cdot \vec{F} \rangle - \nu \langle (\text{rot } \vec{v})^2 \rangle .$$

Benütze dazu, dass $\langle \text{div } \vec{w} \rangle = \text{div} \langle \vec{w} \rangle = 0$ für $\langle \vec{w}(\vec{x}) \rangle \equiv \langle \vec{w} \rangle$ unabhängig von \vec{x} . sowie

$$\text{div}(\vec{v} \wedge \text{rot } \vec{v}) = (\text{rot } \vec{v})^2 - \vec{v} \cdot \text{rot rot } \vec{v} .$$

Detaillierter lässt sich die Bilanz im Fourierraum führen. Setze dazu

$$\begin{aligned} \hat{v}(\vec{k}) &= (2\pi)^{-3} \int \vec{v}(\vec{x}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} d^3x , \\ \vec{v}(\vec{x}) &= \int \hat{v}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k . \end{aligned} \quad (11.3)$$

Mit $(2\pi)^{-3} \int d^3k e^{-i\vec{k}\vec{x}} = \delta(\vec{k})$ folgt daraus

$$\langle \hat{v}(\vec{k}) \rangle = \langle \vec{v} \rangle \delta(\vec{k}) ,$$

und, auf $\widehat{\vec{v} \cdot \vec{w}}(\vec{k}) = \int d^3q \hat{v}(\vec{q}) \cdot \hat{w}(\vec{k} - \vec{q})$ angewandt,

$$\int d^3q \langle \hat{v}(\vec{q}) \cdot \hat{w}(\vec{k} - \vec{q}) \rangle = \langle \vec{v} \cdot \vec{w} \rangle \delta(\vec{k}) . \quad (11.4)$$

Insbesondere ist für $\vec{v}(\vec{x})$ reell

$$\int d^3q \langle \hat{v}(\vec{q}) \cdot \overline{\hat{v}(\vec{q} - \vec{k})} \rangle = \langle \vec{v}^2 \rangle \delta(\vec{k}) \quad (11.5)$$

Für festes $K > 0$ ist

$$\vec{v}_K(\vec{x}) = \int_{|\vec{k}| \leq K} \hat{v}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k \quad (11.6)$$

der **langwellige Anteil** von $\vec{v}(\vec{x})$. Beachte, dass

$$\langle \vec{v}_K \cdot \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} \cdot \vec{w}_K \rangle = \langle \vec{v}_K \cdot \vec{w}_K \rangle . \quad (11.7)$$

Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \vec{v}_K(\vec{x}) &= (2\pi)^{-3} \int_{|\vec{k}| \leq K} d^3y d^3k e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \vec{v}(\vec{y}) , \\ \langle \vec{v}_K(\vec{x}) \cdot \vec{w}(\vec{x}) \rangle &= (2\pi)^{-3} \int_{|\vec{k}| \leq K} d^3y d^3k e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} \langle \vec{v}(\vec{y}) \cdot \vec{w}(\vec{x}) \rangle \\ &= \langle \vec{v}(-\vec{x}) \cdot \vec{w}_K(-\vec{x}) \rangle = \langle \vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{w}_K(\vec{x}) \rangle , \end{aligned} \quad (11.8)$$

wobei $\langle \vec{v}(\vec{y}) \cdot \vec{w}(\vec{x}) \rangle = \langle \vec{v}(-\vec{x}) \cdot \vec{w}(-\vec{y}) \rangle$ (Translation um $-\vec{x} - \vec{y}$) und Substitution $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ verwendet wurde. Mit \vec{v}_K verbunden sind die kinetische Energiedichte

$$E_K = \frac{1}{2} \langle \vec{v}_K^2 \rangle$$

(auch ohne Index K) und die quadratische Wirbeldichte (Enstrophie)

$$\Omega_K = \frac{1}{2} \langle (\text{rot } \vec{v}_K)^2 \rangle .$$

Multiplikation von (11.1) mit \vec{v}_K und anschliessender Mittelung liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\langle \vec{v}_K^2 \rangle}{2} + \langle \vec{v}_K \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_K \cdot \vec{F} \rangle - \nu \langle (\text{rot } \vec{v}_K)^2 \rangle$$

d.h.

$$\frac{dE_K}{dt} = -\Pi_K + \langle \vec{v} \cdot \vec{F}_K \rangle - 2\nu\Omega_K , \quad (11.9)$$

$$\Pi_K = \langle \vec{v}_K \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle : \quad (11.10)$$

Die kinetische Energie in den Fouriermoden $|k| \leq K$ ändert sich nach Massgabe der eingespienen Leistung $\langle \vec{v} \cdot \vec{F}_K \rangle$, der Reibungsverluste $2\nu\Omega_K$, sowie der an höhere Fouriermoden abgetretenen Leistung Π_K .

Beachte, dass

$$\Omega_K \leq K^2 E_K \leq K^2 E . \quad (11.11)$$

Beweis. Heuristisch folgt dies aus

$$\widehat{\text{rot } \vec{v}(\vec{k})} = i\vec{k} \wedge \hat{v}(\vec{k}) , \quad |\widehat{\text{rot } \vec{v}(\vec{k})}|^2 \leq \vec{k}^2 |\hat{v}(\vec{k})|^2$$

und (11.5) für $\vec{k} = 0$. Da $\vec{v}(\vec{x})$ nicht abfällt und somit $\hat{v}(\vec{k})$ eine Distribution ist, wenden wir die Parseval-Identität auf $\varphi(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})$ an, wobei φ eine reelle Testfunktion ist:

$$\int (\varphi(\vec{x})\vec{v}(\vec{x}))^2 d^3x = (2\pi)^3 \int |(\hat{\varphi} * \hat{v})(\vec{k})|^2 d^3k \quad (11.12)$$

und ebenso

$$\int (\text{rot}(\varphi\vec{v}))^2 d^3x = (2\pi)^3 \int \vec{k}^2 |(\hat{\varphi} * \hat{v})(\vec{k})|^2 d^3k . \quad (11.13)$$

Nun ist $\varphi \text{rot } \vec{v} = \text{rot}(\varphi\vec{v}) - \vec{\nabla}\varphi \wedge \vec{v} \equiv \vec{a} - \vec{b}$ und $(\vec{a} - \vec{b})^2 \leq (1 + \delta)\vec{a}^2 + ((1 + \delta^{-1})\vec{b}^2$ für jedes $\delta > 0$. Wir wählen φ mit $\hat{\varphi}(\vec{k}) = 0$ für $|\vec{k}| \geq \kappa$ und $\int \varphi(\vec{x})^2 d^3x = 1$. Ersetzt man $\varphi(\vec{x})$ durch $\varphi_L(\vec{x}) = L^{-3/2}\varphi(\vec{x}/L)$, womit $\int \varphi_L(\vec{x})^2 d^3x = 1$, $\int (\vec{\nabla}\varphi_L)^2 d^3x = CL^{-1}$ und $\widehat{\varphi}_L(\vec{k}) = L^{3/2}\hat{\varphi}(L\vec{k})$, sowie \vec{v} durch \vec{v}_K , so wird nach (11.12, 11.13)

$$\langle (\text{rot } \vec{v}_K)^2 \rangle \leq (1 + \delta)(K + (\kappa/L))^2 \langle \vec{v}_K^2 \rangle + C(1 + \delta^{-1})L^{-1} \langle \vec{v}_K^2 \rangle ,$$

also folgt im Limes $L \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow 0$ die erste Ungleichung der Behauptung. Die zweite folgt aus (11.7). \square

2. Der Limes kleiner Viskositäten

Fluidum im \mathbb{R}^3 , statistisch homogene Kraft $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x}, t)$. Nach kurzer Zeit stellt sich ein statistisch stationärer Zustand ein. Insbesondere: $dE_K/dt = 0$.

Annahmen (Richardson, Kolmogorov) im Limes $\nu \rightarrow 0$

i) Eine endliche, positive Leistung wird eingespienen:

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle =: \varepsilon > 0 .$$

Die Kraft (pro Masseneinheit) \vec{F} wirkt auf makroskopischer Skala K_0^{-1} , d.h.

$$\vec{F}_K = \vec{F} \quad \text{für} \quad K > K_0 .$$

ii) Im stationären Zustand bleibt die Energiedichte endlich und wir bezeichnen den Limes wieder mit E :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle =: E .$$

Solange $\nu K^2 E \ll \varepsilon$, d.h. für

$$K^2 \ll K_i^2 \equiv \frac{\varepsilon}{E\nu} \quad \left(\xrightarrow{\nu \downarrow 0} \infty \right) ,$$

sind wegen (11.11) die Reibungsverluste vernachlässigbar und (11.9) vereinfacht sich zu

$$\Pi_K = \varepsilon \quad (\text{unabhängig von } K)$$

für $K_0 \leq K \ll K_i$ (“inertial range”). In anderen Worten: Die Energie wird auf der Skala K_0^{-1} eingespiessen, dann an sukzessive kleinere Skalen übertragen, um schliesslich bei K_i^{-1} verheizt zu werden.

iii) Im Limes $\nu \rightarrow 0$ sind alle statistischen Eigenschaften durch ε und ν bestimmt. Mit den physikalischen Dimensionen

$$[\nu] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}} , \quad [\varepsilon] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^3} , \quad [E] = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

folgt aus Dimensionsgründen

$$E \propto (\varepsilon\nu)^{1/2} , \quad K_i^{-1} \propto \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} .$$

Beispiel: 1 Liter Wasser im Küchenmixer.

$$\varepsilon = 100 \frac{\text{watt}}{\text{kg}} = 100 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} , \quad \nu = 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} .$$

Die Umsetzung der kinetischen Energie in Wärme erfolgt auf der Längenskala

$$K_i^{-1} \approx 10^{-2} \text{mm} .$$

Geschwindigkeitskorrelationen

Benachbarte “Teilchen” des Fluidums entfernen sich rasch voneinander aufgrund ihrer verschiedenen Geschwindigkeiten. Quantitativ erfassen kann man dies anhand von **Korrelationsfunktionen** der Form

$$S_n(r) = \langle |\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{x})|^n \rangle \equiv \langle |\delta\vec{v}(\vec{x}, \vec{r})|^n \rangle \quad (11.14)$$

(wegen statistischer Isotropie nur abhängig von $r = |\vec{r}|$), oder ähnlich, z.B. für $n = 3$

$$\begin{aligned} \tilde{S}_3(r)\vec{e} &= \langle (\delta\vec{v})^2 \delta\vec{v} \rangle , & (\vec{e} = \vec{r}/r) , \\ S_3^{\parallel}(r) &= \langle (\delta\vec{v} \cdot \vec{e})^3 \rangle ; \end{aligned} \quad (11.15)$$

die erste Korrelation ist $\propto \vec{e}$ wegen der Isotropie. Erwartet wird ein Verhalten

$$S_n(r) \propto r^{\zeta_n}, \quad (r \rightarrow 0)$$

im Limes $\nu \rightarrow 0$. Genauer,

$$\zeta_n = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\log S_n(r)}{\log r},$$

wobei die Reihenfolge der Grenzübergänge dafür sorgt, dass diese innerhalb des "inertial range" ($r \gg K_1^{-1}$) erfolgen.

Bestimmung von ζ_3

Nach (11.10, 11.8) ist (setze $\vec{y} = \vec{x} + \vec{r}$)

$$\begin{aligned} \Pi_K &= \langle \vec{v}_K \cdot (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \rangle \\ &= (2\pi)^{-3} \int_{|\vec{k}| \leq K} d^3k d^3r e^{-i\vec{k}\vec{r}} \underbrace{\langle \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \cdot (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}(\vec{x}) \rangle}_{\equiv f(\vec{r})} \\ &= \int d^3r K^3 F(Kr) f(\vec{r}) \end{aligned} \quad (11.16)$$

mit

$$\begin{aligned} K^3 F(Kr) &= (2\pi)^{-3} \int_{|\vec{k}| \leq K} d^3k e^{-i\vec{k}\vec{r}} = K^3 (2\pi)^{-3} \int_{|\vec{q}| \leq 1} d^3q e^{-i\vec{q}(Kr)}, \\ F(\rho) &= \frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin \rho - \rho \cos \rho}{\rho^3} \end{aligned}$$

(Auswertung in Kugelkoordinaten für \vec{q}). Wie (11.14) ist die Funktion f von der Form $f(\vec{r}) = f(r)$. Sie steht in Verbindung zu $\tilde{S}_3(r)$:

$$\begin{aligned} \langle (\delta\vec{v})^2 \delta\vec{v} \rangle &= \langle (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r})^2 + \vec{v}(\vec{x})^2 - 2\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x} + \vec{r})) (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{x})) \rangle \\ &= \langle \vec{v}(\vec{x} + \vec{r})^2 (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{x})) \rangle + \langle \vec{v}(\vec{x})^2 (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) - \vec{v}(\vec{x})) \rangle \\ &\quad + 2 \langle (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x} + \vec{r})) v(\vec{x}) \rangle - 2 \underbrace{\langle (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x} + \vec{r})) \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \rangle}_{\equiv \vec{g}(\vec{r})} \\ &= -2(\vec{g}(\vec{r}) - \vec{g}(-\vec{r})) : \end{aligned}$$

Die erste Zeile des mittleren Ausdrucks ist von der Form $h(r)\vec{e} - h(r)\vec{e} = 0$. Wegen $\text{div}_r \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) = 0$ ist $\text{div}_r \langle \vec{v}(\vec{x})^2 \vec{v}(\vec{x} \pm \vec{r}) \rangle = 0$ und

$$\begin{aligned} \text{div}_r \vec{g}(\vec{r}) &= \langle (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_r) (\vec{v}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x} + \vec{r})) \rangle \\ &= \langle \vec{v}(\vec{x}) \cdot (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_r) \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \rangle \\ &= \langle \vec{v}(\vec{x}) \cdot (\vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \cdot \vec{\nabla}_x) \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \rangle = f(r). \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\text{div}_r(\tilde{S}_3(r)\vec{e}) = \tilde{S}_3 \underbrace{\text{div}_r \vec{e}}_{2/r} + \frac{d\tilde{S}_3}{dr} = r^{-2} \frac{d}{dr} r^2 \tilde{S}_3(r),$$

zusammenfassend also (s. (11.15))

$$r^{-2} \frac{d}{dr} r^2 \tilde{S}_3 = -4f(r).$$

Damit lautet (11.16)

$$\Pi_K = -\frac{1}{4} \int d^3r K^3 F(Kr) r^{-2} \frac{d}{dr} r^2 \tilde{S}_3(r) .$$

Für $r \rightarrow 0$ gilt $\Pi_K = \varepsilon$ in einem Bereich, der $K \rightarrow \infty$ zulässt. Dann kommt der Hauptbeitrag zum Integral von $r \lesssim K^{-1} \rightarrow 0$, d.h.

$$\varepsilon \cong -\frac{1}{4} \underbrace{\left(\int d^3r K^3 F(KR) \right)}_{=1} (r^{-2} \frac{d}{dr} r^2 \tilde{S}_3(r)) \Big|_{r=0} .$$

Demzufolge ist für kleine r

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} r^2 \tilde{S}_3(r) &\cong -4\varepsilon r^2 , \\ \tilde{S}_3(r) &\cong -\frac{4}{3} \varepsilon r \end{aligned} \quad (11.17)$$

und insbesondere $\zeta_3 = 1$. Daraus kann (ohne Beweis) auch

$$S_3^{\parallel}(r) = -\frac{4}{5} \varepsilon r \quad (11.18)$$

hergeleitet werden.

Eine Berechnung der Exponenten ζ_n , ($n \neq 3$) auf der Basis der Navier-Stokes Gleichung ist nicht bekannt, was man durch eine weitere Annahme überbrücken kann:

iv) Das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} ist (im Limes $\nu \rightarrow 0$) statistisch skaleninvariant

$$\delta\vec{v}(\vec{x}, \vec{r}) \quad \text{und} \quad \lambda^h \delta\vec{v}(\vec{x}, \lambda\vec{r})$$

sind gleichverteilt (für geeignetes h).

Dann folgt aus (11.14) mit $\lambda = r^{-1}$

$$S_n(r) = \lambda^{nh} S_n(\lambda r) = r^{-nh} S_n(1)$$

(Kolmogorov-Skalierung) und aus (11.17) oder (11.18)

$$h = -1/3 \quad (11.19)$$

also allgemein $\zeta_n = n/3$. Experimentell werden etwas kleinere Werte gemessen.

Energiespektrum

Statt in (11.6) über $M = \{|\vec{k}| \leq K\}$ zu integrieren, kann man dafür eine beliebige Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ wählen:

$$\vec{v}_M(\vec{x}) = \int_{\vec{k} \in M} \hat{v}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} d^3k$$

mit zugehöriger kinetischer Energie (pro Masseneinheit)

$$E_M = \frac{1}{2} \langle |\vec{v}_M|^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{v}_M \cdot \vec{v}_{-M} \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{v}_M \cdot \vec{v} \rangle$$

(benütze $\vec{v}_M = \vec{v}_{-M}$, $\langle \vec{v}_M \cdot \vec{w} \rangle = \langle \vec{v} \cdot \vec{w}_{-M} \rangle$). Nach (11.4) gilt

$$\langle \vec{v}_M \cdot \vec{v} \rangle \delta(\vec{k}) = \int_M d^3q \langle \hat{v}(\vec{q}) \cdot \hat{v}(\vec{k} - \vec{q}) \rangle .$$

Damit kann man eine Energiedichte im Fourierraum dE/d^3q einführen,

$$E_M = \int_M d^3q \frac{dE}{d^3q}(q) ,$$

für welche gilt

$$\frac{dE}{d^3q} \delta(\vec{k}) = \frac{1}{2} \langle \hat{v}(q) \cdot \hat{v}(\vec{k} - \vec{q}) \rangle .$$

Andererseits folgt aus (11.4) mit $\widehat{\vec{v}(\cdot + \vec{r})}(\vec{q}) = e^{-i\vec{q}\vec{r}} \hat{v}(\vec{q})$

$$\langle \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \vec{v}(\vec{x}) \rangle \delta(\vec{k}) = \int d^3q e^{-i\vec{q}\vec{r}} \langle \hat{v}(\vec{q}) \cdot \hat{v}(\vec{k} - \vec{q}) \rangle = 2 \left(\int d^3q e^{-i\vec{q}\vec{r}} \frac{dE}{d^3q} \right) \delta(\vec{k}) .$$

Also

$$2 \frac{dE}{d^3q} = (2\pi)^{-3} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} \langle \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) \rangle d^3r :$$

Die spektrale Energiedichte ist die Fouriertransformierte der Paarkorrelation (Wiener-Kintchine Theorem).

Nun folgt mit $\langle \vec{v}(\vec{x} + \vec{r}) \vec{v}(\vec{x}) \rangle = -\frac{1}{2} \langle (\delta\vec{v})^2 \rangle + \langle \vec{v}^2 \rangle = -\frac{1}{2} S_2(r) + 2E$, dass

$$\frac{dE}{d^3q} = -\frac{1}{4} \cdot (2\pi)^{-3} \int e^{i\vec{q}\vec{r}} S_2(r) d^3r + E \cdot \delta(\vec{q}) .$$

Für grosse $|\vec{q}|$ erstreckt sich das Integral im wesentlichen über $r \lesssim |\vec{q}|^{-1}$, wo nach (11.19) $S_2(r) \propto r^{2/3}$, also

$$\frac{dE}{d^3q} \propto \varepsilon^{2/3} |\vec{q}|^{-11/3} ,$$

wobei der Faktor $\varepsilon^{2/3}$ aus Dimensionsgründen (vgl. iii)) bestimmt ist. Öfters wird die Dichte nur bzgl. des Betrags $q = |\vec{q}|$, $d^3q = 4\pi q^2 \cdot dq$ gemessen:

$$\frac{dE}{dq} = 4\pi q^2 \frac{dE}{d^3q} \propto \varepsilon^{2/3} q^{-5/3} .$$

Dieses Energiespektrum und insbesondere das Potenzgesetz sind experimentell recht gut verifiziert.

Formelsammlung zur Vektoranalysis

(\vec{v} : Vektorfeld; v : Skalarfeld)

- Vektoridentitäten:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{\nabla} v &= 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} &= \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v} \\ (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= \nabla(v^2/2) - \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v}\end{aligned}$$

- Produktregeln:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\rho \vec{v}) &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} \\ \operatorname{rot}(\rho \vec{v}) &= \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{v} + \rho \operatorname{rot} \vec{v} \\ \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{w} + \vec{w} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} \\ \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \vec{w} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{w} \\ \operatorname{rot}(\vec{v} \wedge \vec{w}) &= (\operatorname{div} \vec{w}) \vec{v} - (\operatorname{div} \vec{v}) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}\end{aligned}$$

- Sätze:

$$\begin{aligned}\int_V \operatorname{div} \vec{v} d^3x &= \int_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} && \text{(Gauss)} \\ \int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} &= \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} && \text{(Stokes)}\end{aligned}$$

- Korollare:

$$\begin{aligned}\int_V \vec{\nabla} v d^3x &= \int_{\partial V} v d\vec{\sigma} \\ \int_V \operatorname{rot} \vec{v} d^3x &= \int_{\partial V} d\vec{\sigma} \wedge \vec{v} \\ \int_V (u \Delta v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v) d^3x &= \int_{\partial V} u \vec{\nabla} v \cdot d\vec{\sigma} \\ \int_V (u \Delta v - v \Delta u) d^3x &= \int_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma} \\ \int_S d\vec{\sigma} \wedge \vec{\nabla} u &= \int_{\partial S} u d\vec{s}\end{aligned}$$

- Kettenregeln:

$$\begin{aligned}(\vec{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}) \\ \operatorname{div} \vec{P}(\tau(\vec{x})) &= \dot{\vec{P}}(\tau(\vec{x})) \cdot \vec{\nabla} \tau(\vec{x}) \\ \operatorname{rot} \vec{P}(\tau(\vec{x})) &= \vec{\nabla} \tau(\vec{x}) \wedge \dot{\vec{P}}(\tau(\vec{x})) \\ (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{P}(\tau(\vec{x})) &= (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \tau(\vec{x})) \cdot \dot{\vec{P}}(\tau(\vec{x}))\end{aligned}$$

