Aufgabe 11.1 Gruppengeschwindigkeit

Ein Gaußsches Wellenpaket $u(x,t)$ bewege sich in einem Medium, in dem ω nichtlinear von k abhängt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei

$$u(x, t = 0) = e^{-\frac{x^2}{2(\Delta x)^2}}, \tag{1}$$

wobei wir Δx als Mass für die "Unschärfe" des Wellenpakets auffassen. Die Zeitentwicklung ist durch

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, u(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} \tag{2}$$

gegeben, wobei $u(k)$ die Fouriertransformierte von $u(x, t = 0)$ ist.

a.) Zeige mittels quadratischer Ergänzung, dass das Wellenpaket auch im Impulsraum ein Gaußsches Profil hat (setze t=0). Welches Verhältnis besteht zwischen Δx und dem analog definierten Δk? Was bedeutet dies?

Tipp:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 1 \tag{3}$$

b.) Sei k_0 der Wellenvektor k, für den $u(k)$ maximal ist. Entwickle $\omega(k)$ in erster Ordnung in k um k_0, setze dies in Gleichung (2) ein und zeige damit, dass sich das Maximum des Wellenpakets (bis auf einen Phasenfaktor) in der Zeit t vom Ursprung um $v_g t$ fortbewegt, wobei die *Gruppengeschwindigkeit* v_g gegeben ist durch

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}. \tag{4}$$

c.) Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die einzelnen Phasen?

d.) Schätze ab, wie schnell sich das Wellenpaket verbreitert, indem Du einen Ausdruck für die Variation der Gruppengeschwindigkeit innerhalb des Pulses findest. Benutze dazu das Resultat aus Teil a) und interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 11.2 Energietransport in Hohlleitern

Der Hohlleiter mit ideal leitenden Wänden sei mit einem Medium mit Permeabilität μ und Permittivität ϵ gefüllt. Seine Achse zeige in $\mathbf{e}_z$-Richtung. Die Felder erfüllen die Wellengleichung mit Randbedingungen

$$\begin{aligned} &(\nabla_t^2 + \gamma_\lambda^2)\Psi(x,y) = 0; \\ &\qquad \Psi|_s = 0 \ \text{ mit } \Psi = E_z \ \text{ (TM-Moden)}, \\ &\qquad \partial_n \Psi|_s = 0 \ \text{ mit } \Psi = H_z \ \text{ (TE-Moden)}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei $\gamma_\lambda^2 = \mu\epsilon\omega^2/c^2 - k_\lambda^2$ und $\nabla_t = \partial_x \mathbf{e}_x + \partial_y \mathbf{e}_y$.

Mit der *Grenzfrequenz* $\omega_\lambda = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}\gamma_\lambda$ gilt für die Wellenzahl $k_\lambda^2 = \mu\epsilon/c^2(\omega^2 - \omega_\lambda^2)$. Die Lösungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t &= +\frac{ik_\lambda}{\gamma_\lambda^2}\nabla_t E_z, \quad \mathbf{H}_t = +\frac{1}{Z_\lambda}\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{E}_t \ \ \text{(TM)}; \\ \mathbf{H}_t &= +\frac{ik_\lambda}{\gamma_\lambda^2}\nabla_t H_z, \quad \mathbf{E}_t = -Z_\lambda \mathbf{e}_z \wedge \mathbf{H}_t, \ \ \text{(TE)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Die *Wellenimpedanz* ist gegeben durch

$$Z_\lambda = \begin{cases} \dfrac{ck_\lambda}{\varepsilon\omega} & \text{(TM)}; \\ \dfrac{\mu\omega}{ck_\lambda} & \text{(TE)}. \end{cases} \tag{7}$$

Der komplexe Poyntingvektor

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi}\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^* \tag{8}$$

gibt Betrag und Richtung des Energieflusses an.

a.) Zeige, dass

$$\mathbf{S} = \frac{\omega k_\lambda}{8\pi\gamma_\lambda^4} \begin{cases} \epsilon[|\nabla_t\Psi|^2\mathbf{e}_z + i\frac{\gamma_\lambda^2}{k_\lambda}\Psi\nabla_t\Psi^*] & \text{(TM)} \\ \mu[|\nabla_t\Psi|^2\mathbf{e}_z - i\frac{\gamma_\lambda^2}{k_\lambda}\Psi^*\nabla_t\Psi] & \text{(TE)} \end{cases} \tag{9}$$

b.) Welcher Teil trägt zum Energietransport in z-Richtung bei? Integriere diesen Teil über den Leiterquerschnitt, nutze die erste Greensche Identität und die Randbedingungen und zeige damit dass für die transportierte Leistung gilt:

$$P = \frac{c}{8\pi\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}}\left\{\begin{array}{c} \varepsilon \\ \mu \end{array}\right\}\int_A d^2x\, \Psi^*\Psi \tag{10}$$

Tipp: Die *erste Greensche Identität* lautet für zwei Skalarfelder Φ,Ψ:

$$\int_V (\Phi\nabla^2\Psi + \nabla\Phi\cdot\nabla\Psi)dV = \oint_{\partial V}\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}da \tag{11}$$

c.) Berechne analog dazu die Energie pro Längeneinheit U. Ergebnis:

$$U = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\left\{\begin{array}{c} \varepsilon \\ \mu \end{array}\right\}\int_A d^2x\, \Psi^*\Psi. \tag{12}$$

Tipp: Die zeitgemittelte Energiedichte ist gegeben durch

$$u = \frac{1}{16\pi}(\epsilon|\mathbf{E}|^2 + \mu|\mathbf{H}|^2). \tag{13}$$

d.) Berechne aus Gleichung (10) und (12) die Geschwindigkeit des Energiestroms und vergleiche diese mit der *Gruppengeschwindigkeit* $v_g = dw/dk_\lambda$.

Aufgabe 11.3 Strahlender Quadrupol

Ein strahlender Quadrupol bestehe aus einer Anordnung von vier Ladungen $\pm q$, die sich mit abwechslendem Vorzeichen auf den Ecken eines Quadrats mit Seitenlänge a befinden. Das Quadrat rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Achse, die durch seinen Mittelpunkt geht und senkrecht auf der von ihm aufgespannten Fläche steht.

a.) Schreibe die zeitabhängige Ladungsverteilung auf und berechne daraus den Quadrupoltensor. Ergebnis:

$$\begin{aligned} &Q_{3i} = Q_{i3} = 0,\ i = 1, 2, 3 \\ &Q_{11} = -Q_{22} = 3qa^2 \Re(e^{-i(2\omega t)}), \\ &Q_{21} = 3qa^2 \Re(ie^{-i(2\omega t)}). \end{aligned} \tag{14}$$

Tipp: Der Quadrupoltensor ist gegeben durch

$$Q_{ij} = \int d^3x \rho(x)(3x_i x_j - |\mathbf{x}|^2 \delta_{ij}). \tag{15}$$

b.) Zeige, dass sich die Winkelverteilung der Strahlungsleistung in der Wellenzone schreiben lässt als

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{288\pi} k^6 |\hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{Q}|^2, \tag{16}$$

wobei in diesem Fall $k = 2\omega/c$ gilt.

Der "Vektor" $\mathbf{Q}$ ist gegeben durch

$$(\mathbf{Q})_i = \sum_j Q_{ij} \hat{\mathrm{r}}_j. \tag{17}$$

Tipp: Die Felder sind in diesem Bereich durch

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -\frac{ik^3}{6} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{\mathbf{r}} \wedge \mathbf{Q}, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{B} \wedge \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \tag{18}$$

gegeben. Die abgestrahlte mittlere Leistung ist

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{cr^2}{8\pi} \hat{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}^*). \tag{19}$$

c.) Berechne (16) für die vorliegende Ladungsverteilung und interpretiere das Resultat, indem Du sie mit der Winkelverteilung der Strahlung eines Dipols vergleichst.

Tipp: Drücke den normierten Ortsvektor $\hat{\mathbf{r}}$ in Kugelkoordinaten aus, d.h.

$$\hat{\mathbf{r}} = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta). \tag{20}$$