

**Aufgabe 1.1** Vektoridentitäten

In der Elektrodynamik treten häufig Standardidentitäten der Vektoranalysis auf. Diese sollen mit dieser Aufgabe wieder ins Gedächtnis zurückgerufen werden. Dazu beweise:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \\
 \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \\
 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{d}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \\
 \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi &= 0 \\
 \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= 0 \\
 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} \\
 \operatorname{div}(\psi \mathbf{A}) &= \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \psi + \psi \operatorname{div} \mathbf{A} \\
 \operatorname{rot}(\psi \mathbf{A}) &= (\operatorname{grad} \psi) \wedge \mathbf{A} + \psi \operatorname{rot} \mathbf{A} \\
 \operatorname{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{A} \\
 \operatorname{div}(\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}.
 \end{aligned}$$

**Tipp:** Benutze das Levi Cita Symbol (total antisymmetrischer Tensor), welches in drei Dimensionen wie folgt definiert ist:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine gerade Permutation ist} \\ -1 & \text{wenn } (i, j, k) \text{ eine ungerade Permutation ist} \\ 0 & \text{wenn mindestens zwei Indizes gleich sind,} \end{cases}$$

sowie folgende Identitäten:

$$\sum_i \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \quad \text{und} \quad \sum_{ij} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijm} = 2\delta_{km}.$$

Schreibe die Vektoren in Indexschreibweise, wobei über doppelt auftretende Indizes summiert wird (Summenkonvention):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_i b_i, & (\operatorname{grad} \psi)_i &= \frac{\partial}{\partial x_i} \psi, & (\operatorname{rot} \mathbf{A})_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} A_k \\
 (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_i &= \epsilon_{ijk} a_j b_k, & \operatorname{div} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x_i} A_i & \Delta \psi &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \psi.
 \end{aligned}$$

## Aufgabe 1.2 Dirac'sche Delta-Funktion

Mit Hilfe der Dirac'schen Delta-Funktion in geeigneten Koordinaten drücke man die folgenden Ladungsverteilungen als räumliche Ladungsdichten  $\rho(\mathbf{x})$  aus.

- Eine über eine Kugelschale vom Radius  $R$  gleichmässig verteilte Ladung  $Q$  in Kugelkoordinaten.
- Eine über die Oberfläche eines Zylinders vom Radius  $b$  verteilte Ladung  $\lambda$  (pro Längeneinheit) in Zylinderkoordinaten.

**Tipp:** Die Delta-Funktion in drei Dimensionen ist

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \delta(x, y, z) = \begin{cases} \infty & \text{wenn } x = 0, y = 0 \text{ und } z = 0 \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x, y, z) dx dy dz = 1.$$

In Kugelkoordinaten mit  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$  gilt  $\delta(x, y, z) = \frac{\delta(\rho)}{4\pi\rho^2}$ . Eine ähnliche Identität gilt für Zylinderkoordinaten.

## Ablauf der Übungen

Die Übungsblätter werden jeweils am Mittwoch in der Vorlesung verteilt und müssen in der darauf folgenden Woche in der Übungsstunde abgegeben werden.

**Testatbedingung:** 70% der Übungsblätter müssen sinnvoll bearbeitet und rechtzeitig abgegeben werden. Die Übungen dürfen in Gruppen von bis zu drei Studenten gemeinsam gelöst werden. Die Zusammensetzung der Gruppen gilt für das ganze Semester.

### Übungsstunde ETH: Mi 10:45 -12:30

Assistenten:	Juan Carlos Andresen	andresen@itp.phys.ethz.ch	HIT F13
	Ruben Andrist	andrist@itp.phys.ethz.ch	HIT F31.2
	Normand Beaudry	nbeaudry@phys.ethz.ch	HIT F32
	Jonathan Buhmann	buhmann@itp.phys.ethz.ch	HIT H42
	Marco Tomamichel	marcoto@itp.phys.ethz.ch	HIT H51

### Übungsstunde Uni: Do 08:00 - 09:45

Assistenten:	Aurel Schneider	aurel@physik.uzh.ch	Y16-G05
	Erich Weihs	erich.weihs@physik.uzh.ch	Y16-G05

(Abgabe jeweils bis Mittwoch, 12:00, ins Fach im K-Stock.)

## Webseite zur Vorlesung

[http://www.itp.phys.ethz.ch/education/lectures\\_fs10/ED](http://www.itp.phys.ethz.ch/education/lectures_fs10/ED)