Übungsserie 10

Abgabe: 22. Mai 2009

Aufgabe 1 [*Feldimpuls*]: Der gesamte Feldimpuls einer Feldkonfiguration ist durch

$$P^\mu = \frac{1}{c}\int_{x^0=0} d^3\mathbf{x} T^{\mu 0}(x)$$

definiert, wobei $T^{\mu\nu}$ der Energie-Impuls Tensor ist

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi k}\Big[F^\mu{}_\sigma F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}\, g^{\mu\nu}\Big]$$

und wir annehmen, dass $F^{\mu\nu}$ für alle raumartigen Richtungen hinreichend schnell abfällt. Wir betrachten eine Poincaré-Transformation

$$\hat{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu,$$

wobei $\Lambda^\mu{}_\nu$ eine eigentliche orthochrone Lorentztranformation ist. Zeige, dass sich unter dieser Poincaré-Transformation der Gesamtimpuls im ladungsfreien Raum wie

$$\hat{P}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu$$

transformiert.

Hinweis: Benutze dieselbe Methode wie für die Analyse der Gesamtladung in der Vorlesung.

Aufgabe 2 [*Lienart-Wiechert Formel*]: Die Lienart-Wiechert Formel für die elektromagnetischen Felder ist

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= k\,e\left[\frac{\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3R^2}\right]_{ret} + \frac{ke}{c}\left[\frac{\mathbf{n}\wedge[(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})\wedge\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3R}\right]_{ret} \\ \mathbf{B} &= [\mathbf{n}\wedge\mathbf{E}]_{ret}\,, \end{aligned}$$

wobei die Ausdrücke zur retardierten Zeit auszuwerten sind. Für den Fall, dass sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, zeige, dass diese Formeln gerade mit jenen übereinstimmen, die man aus den Lorentztransformationseigenschaften der elektromagnetischen Felder ableiten würde.

Hinweis: Betrachte den Fall, wo der Beobachter bei $(0, b, 0)$ sitzt, und sich das Teilchen entlang der x-Achse mit Geschwindigkeit v bewegt, so dass seine Weltlinie durch $y(t') = (ct', vt', 0, 0)$ beschrieben ist. Zur retardierten Zeit t'_0 ist also die x-Komponente des Teilchens gerade $vt'_0 = vt + v(t'_0 - t)$. Mache eine geometrische Skizze der Anordnung.

Aufgabe 3 [*Lienart-Wiechert Felder*]:

(i) Betrachte ein Teilchen der Ladung e, das sich entlang der z-Achse auf der Bahn $z(t) = a\cos(\omega t)$ bewegt. Zeige, dass die instantan ausgestrahlte Leistung pro Winkelelement durch

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = \frac{ke^2c\beta^4}{4\pi a^2}\frac{\sin^2\theta\cos^2(\omega t')}{(1+\beta\cos\theta\sin\omega t')^5}$$

gegeben ist, wobei $\beta = a\omega/c$.

(ii) Deduziere, dass das Zeitmittel der ausgestrahlten Leistung pro Winkelelement durch

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{ke^2c\beta^4}{32\pi a^2}\left[\frac{4+\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^{7/2}}\right]\sin^2\theta$$

gegeben ist. Skizziere die Winkelverteilung im relativistischen und nicht-relativistischen ($\beta = 0$) Fall.

(iii) Betrachte nun ein nicht-relativistisches Teilchen der Ladung e, das sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis mit Radius R in der $x-y$-Ebene bewegt. Berechne wiederum das Zeitmittel der ausgestrahlten Leistung pro Winkelelement.

Hinweis: Die ausgestrahlte Leistung pro Winkelelement ist definiert durch

$$\frac{dP(t')}{d\Omega} = R^2(\mathbf{S}\cdot\mathbf{n})\frac{dt}{dt'}\ ,$$

wobei $t' = t - R(t')/c$ die retardierte Zeit ist.