Übungsserie VII

Abgabe: 27. April 2009

Aufgabe 1 [*Lineare Antenne*]: Eine dünne lineare Antenne der Länge d wird durch einen sinusförgigen Strom der Form

$$\mathbf{j}(z,t) = J_0 \sin\left(\frac{2\pi z}{d}\right) \cos(\omega t)\, \mathbf{e}_z \qquad z \in \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right]$$

angeregt.

(i) Berechne direkt das erzeugte elektrische und magnetische Feld in der Wellenzone, sowie die Energiestromdichte im Zeitmittel (als Funktion der Richtung). Was ist die gesamte abgestrahlte Leistung in Einheiten von $Z_0 J_0^2 \cdot (d/\lambda)^4$, wenn $Z_0 = 4\pi k/c$ die Wellenimpendanz und $\lambda = 2\pi c/\omega$ die Wellenlänge ist?

Hinweise: Bestimme zuerst $\mathbf{A}(r,\theta,t)$ und betrachte dann separat die Fälle $d = \lambda$ und $d \ll \lambda$ um den Ausdruck zu vereinfachen und weiterzurechnen. Um die gesamte abgestrahlte Leistung bei $d = \lambda$ abzuschätzen, benutze

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x \sin(\pi x)}{1-x^2} \approx 1.557\,.$$

(ii) Behandle nun dieses Problem mit Hilfe der Multipolentwicklung aus dem Skript, d.h. berechne die elektrische Dipolstrahlung, die magnetische Dipolstrahlung sowie die elektrische Quadrupolstrahlung.

(iii) Vergleiche die Winkelabhängigkeit der Energiestromdichte in beiden Fällen von (i) mit der Winkelabhängigkeit der ersten nichtverschwindenden Multipolstrahlung aus (ii). Vergleiche ausserdem die gesamte abgestrahlte Leistung. Interpretiere!

Hinweis: Welche Approximationen für die Beziehungen zwischen d, λ und r fliessen in die jeweiligen Rechnungen ein?

Aufgabe 2 [*Wasserstoffstrahlung*]: Wir beschreiben den Übergang des Elektrons vom 2p-Zustand mit $m = 0$ eines Wasserstoffatoms in seinen 1s-Grundzustand durch die Ladungsdichte

$$\rho(r,\theta,\phi,t) = \frac{2e}{\sqrt{6}\, a_0^4}\, r\, e^{-\frac{3r}{2a_0}}\, Y_{00}(\theta,\phi) Y_{10}(\theta,\phi) \cos(\omega_0 t)\,,$$

wobei $a_0 = \hbar^2/(mke^2)$ der Bohrradius und $\omega_0 = 3ke^2/(8\hbar a_0)$ die Frequenz des Übergangs ist.

(i) Berechne die elektrische Dipolstrahlung sowie die elektrische Quadrupolstrahlung. Was ist die gesamte abgestrahlte Energie in der elektrischen Dipolnäherung? Drücke deine Antwort in Einheiten von $\hbar\omega_0\,\alpha^4 c/a_0$ aus, wobei $\alpha = ke^2/(\hbar c)$ die Feinstrukturkonstante ist.

Hinweis: Berechne zuerst die sphärischen Multipolmomente (vgl. Serie 4) unter Benutzung der Orthogonalitätseigenschaften der Kugeloberflächenfunktionen.

$$\int \mathrm{d}\Omega\, Y_{lm}(\theta,\phi) Y_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \quad Y_{00}(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos(\theta)\,.$$

(ii) Statt der obigen quasiklassischen Ladungsdichte, betrachte nun das Bohr-Modell, bei dem sich das Elektron (im 2p-Zustand) auf einem Kreis mit Radius $2a_0$ mit der Frequenz ω_0 um den Kern bewegt. Berechne nun die elektrische Dipolstrahlung sowie die elektrische Quadrupolstrahlung. Vergleiche die abgestrahlte Leistung mit der Antwort aus (i).

Aufgabe 3 [*Idealer Hohlleiter*]: Betrachte einen unendlich langen Zylinder, dessen Längsachse entlang der z-Achse liegt, und der einen rechteckigen Querschnitt $0 \le x \le L_x$ und $0 \le y \le L_y$ hat. Die Wände des Zylinders sind ideale Leiter.

(i) Mit dem Ansatz $\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \mathbf{E}(x,y)\,e^{i(\kappa z-\omega t)}$ und entsprechend für $\mathbf{B}$, bestimme die Feldgleichungen im Innern, sowie die Randbedingungen. Zeige, dass die Feldgleichungen implizieren, dass

$$(\Delta_2+\lambda)\,\mathbf{E} = (\Delta_2+\lambda)\,\mathbf{B} = 0\,,$$

wobei $\lambda = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \kappa^2$ und Δ_2 der 2-dimensionale Laplace-Operator in der x-y-Ebene ist.

Hinweis: Drücke die x- und y-Komponenten der Felder durch die z-Komponenten aus. Die Randbedingungen können ebenfalls in den z-Komponenten geschrieben werden.

(ii) Bestimme die Lösungen für den sogenannten TM-Fall, für den $B_z = 0$ gilt.

Hinweis: Du kannst annehmen, dass $\lambda \neq 0$ — Warum?

(iii) Im TE-Fall ist $E_z = 0$. Finde zunächst die Lösung falls $\lambda \neq 0$. Schliesslich studiere den Fall $\lambda = 0$. Zeige, dass in diesem Fall $E_z = B_z = 0$ (TEM-Fall), und dass die Randbedingungen implizieren, dass es nur die triviale Lösung $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ gibt.

Hinweis: Zeige, dass $\int_\Gamma \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = 0$ gilt für jeden geschlossenen Weg Γ im Hohlraum falls $\lambda = 0$. Führe das Problem auf eines der Elektrostatik zurück, so dass nur $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\Phi$ und $\Delta_2\Phi = 0$ gelöst werden muss.

(iv) Wie verändert sich die Analyse des TEM-Falls wenn der Querschnitt kein Rechteck, sondern ein Kreisring $a \le r \le b$ (Koaxialkabel) ist? Finde für diese Geometrie die allgemeine TEM-Lösung.

Hinweis: Löse $\Delta_2\Phi = 0$ in der Ebene mit der Randbedingung, dass Φ auf den beiden Kreisen jeweils konstant sein muss. Berechne daraus die Felder.