Übungsserie 6

Abgabe: 6.April 2009

Aufgabe 1 [*Drehimpuls elektromagnetischer Felder*]: Der Drehimpuls, der den elektromagnetischen Feldern **E** und **B** im ladungs- und stromfreien Raum zugeschrieben wird, ist

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi k\, c} \int d^3\mathbf{x}\ [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \wedge \mathbf{B}(\mathbf{x},t))]\ .$$

(i) Unter der Annahme, dass die Felder **E** und **B** kompakten Träger besitzen, zeige, dass

$$\mathbf{L} = \frac{1}{4\pi k\, c} \int d^3\mathbf{x} \left[\mathbf{E}(\mathbf{x},t) \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x},t) + \sum_{j=1}^{3} E_j(\mathbf{x},t)(\mathbf{x} \wedge \nabla) A_j(\mathbf{x},t) \right],$$

wobei **A** das Vektorpotential ist. Der erste Term kann als Beitrag des 'Spins' der Photonen zum Gesamtdrehimpuls interpretiert werden; der zweite Term ist der Bahndrehimpuls.
Hinweis: verwende die Identität $\epsilon_{ijk}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ und schreibe das Magnetfeld als $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$.

(ii) In der Coulomb Eichung ist das Vektorpotential durch die ebene Welle

$$\mathbf{A}(z,t) = \mathrm{Re}\left(A_+ \epsilon_+ e^{i(kz-\omega t)} + A_- \epsilon_- e^{i(kz-\omega t)} \right)$$

gegeben, wobei $\epsilon_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e_x} \pm i\mathbf{e_y})$ und $A_\pm$ beliebige Konstanten sind. Zeige, dass dieses Vektorpotential die Coulomb Eichung $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ erfüllt, und bestimme die zugehörigen elektrischen und magnetischen Felder. Zeige, dass diese die Maxwell Gleichungen im leeren Raum lösen.

(iii) Unter den Annahmen von (ii) zeige, dass der Zeitmittelwert des ersten (Spin) Terms des Drehimpulses

$$\mathbf{L}_{spin} = \frac{1}{4\pi kc} \frac{|\mathbf{k}|}{2} \mathbf{e}_z \left(|A_+|^2 - |A_-|^2 \right)$$

ist. Interpretiere das Ergebnis.

Aufgabe 2 [*Magnetischer Monopol*]: Der Dirac Ansatz für das Vektorpotentials eines magnetischen Monopols ist

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{l}' \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}\ ,$$

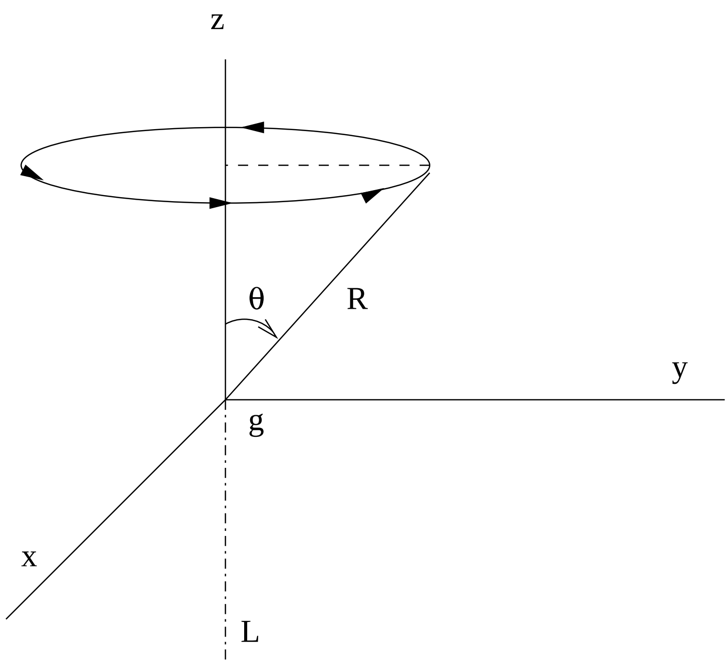
wobei das Linienintegral entlang des Dirac Strings L zu nehmen ist. Wir betrachten den Fall, wo L die negative z-Achse von $z = -\infty$ nach $z = 0$ ist.

(i) Berechne **A** explizit und zeige, dass die Komponenten des Vektorpotentials in Kugelkoordinaten $\mathbf{A}_r = 0$, $\mathbf{A}_\theta = 0$ und $\mathbf{A}_\phi = \frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta} = \frac{g}{r}\tan\frac{\theta}{2}$ sind.

(ii) Zeige, dass das zugehörige Magnetfeld $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ überall (abgesehen von $\theta = \pi$) dieselbe Form wie das Coulomb-Feld einer elektrischen Punktladung hat.
Hinweis: in sphärischen Koordinaten ist

$$\nabla \wedge (A_\phi \mathbf{e}_\phi) = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta)\, \mathbf{e}_r - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi)\mathbf{e}_\theta \ .$$

(iii) Ausgehend von dem in (ii) berechneten Feld **B** bestimme den magnetischen Gesamtfluss, der durch den in der Abbildung gezeigten Kreis vom Radius $R \sin\theta$ hindurchtritt. Betrachte die beiden Fälle $\theta < \frac{\pi}{2}$ und $\theta > \frac{\pi}{2}$ separat, aber betrachte in beiden Fällen den nach oben gerichteten Fluss.



(iv) Berechne das Linienintegral $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}$ entlang dem Kreisrand und vergleiche das Ergebnis mit dem Resultat aus (iii). Warum stimmen die beiden Ergebnisse für $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ überein, aber unterscheiden sich für $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ um eine Konstante? Interpretiere die Differenz.

Aufgabe 3 [*Ausstrahlung*]: Ein strahlender Quadrupol besteht aus einer Anordnung von vier Ladungen $\pm q$, die sich mit abwechselndem Vorzeichen an den Eckpunkten eines Quadrats (der Seitenlänge a) befinden. Das Quadrat rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, die senkrecht durch den Mittelpunkt der von ihm aufgespannten Fläche verläuft. Berechne für den Grenzfall grosser Wellenlängen die Quadrupolmomente, die Fernfelder, die Winkelverteilung der Strahlung und die abgestrahlte Gesamtleistung.
Hinweis: in der Wellenzone (Grenzfall grosser Wellenlängen) gilt

$$\mathbf{B} = -\frac{k}{6c^3 r}\, \mathbf{e} \wedge \frac{d^3}{dt^3}\mathbf{Q}\mathbf{e}\,, \qquad \mathbf{E} = -\mathbf{e} \wedge \mathbf{B}\ ,$$

wobei **Q** der Quadrupoltensor ist. Der Poynting Vektor ist durch $\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi k}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B})$ definiert.