Übungsserie IV

Abgabe: 23.März 2009

Aufgabe 1 [*Quadrupolmomente*]: Bestimme den Zusammenhang zwischen den kartesischen Quadrupolmomenten

$$Q_{i,j} = \int d^3\mathbf{y}\, \left(3y_iy_j - \mathbf{y}^2\delta_{ij}\right) \rho(\mathbf{y}) = Q_{ji}$$

und den sphärischen Quadrupolmomenten

$$q_{l,m} = \int \overline{Y_{l,m}(\theta,\phi)}\, r^{l+2}\, \rho(\mathbf{x})\, d\Omega(\theta,\phi)dr$$

mit $l = 2$.

Hinweise: Drücke die kartesischen Koordinaten in $Q_{i,j}$ durch Kugelkoordinaten aus und verwende folgende Identitäten:

$$\begin{aligned} Y_{2,2}(\theta,\phi) &= \overline{Y_{2,-2}(\theta,\phi)} = \frac{1}{4}e^{2i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2(\theta)\,, \\ Y_{2,1}(\theta,\phi) &= -\overline{Y_{2,-1}(\theta,\phi)} = -\frac{1}{2}e^{i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos(\theta)\sin(\theta)\,, \\ Y_{2,0}(\theta,\phi) &= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(3\sin^2(\theta) - 2\right)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2 [*Sphärische Multipolmomente*]: Berechne die Multipolmomente q_{lm} der in Teilaufgabe (i) und (ii) angegebenen Ladungsanordnungen (Superpositionen von punktförmigen Ladungen, wobei $a > 0$ — siehe Abbildung 1) und gib jeweils die ersten beiden nicht verschwindenden Sätze der q_{lm} mit $m = -l, -l+1, \ldots, l$ explizit an.

(i) Ladungen q bei $(a,0,0)$ und $(0,a,0)$, sowie Ladungen $-q$ bei $(-a,0,0)$ und $(0,-a,0)$.

(ii) Ladungen q bei $(0,0,a)$ und $(0,0,-a)$, sowie Ladung $-2q$ bei $(0,0,0)$.

(iii) Vergleiche (im Limes $r = |\mathbf{x}| \to \infty$) den ersten nicht verschwindenden Term in der Multipolentwicklung des Potentials von (ii) mit dem führenden Term des exakten Potentials in Abhängigkeit des Abstandes r vom Ursprung des Koordinatensystems in der (x,y)-Ebene.

Hinweise: Drücke die Ladungsdichten (Distributionen) in Kugelkoordinaten aus und verifiziere, dass das Intgeral der Ladungsdichte jeder Punktladung auch in Kugelkoordinaten die richtige Ladung reproduziert. Benütze die (verallgemeinerte) Rodrigues-Formel, um zu zeigen, dass $P_l^m(1) = \delta_{m,0}$, $P_l^m(-1) = (-1)^l\delta_{m,0}$, $P_1^1(0) = -1$, $P_3^1(0) = \frac{3}{2}$, $P_3^3(0) = -15$. Zeige schliesslich, dass $P_l^m(0) = 0$, falls $l + m$ ungerade und grösser als 0 ist.

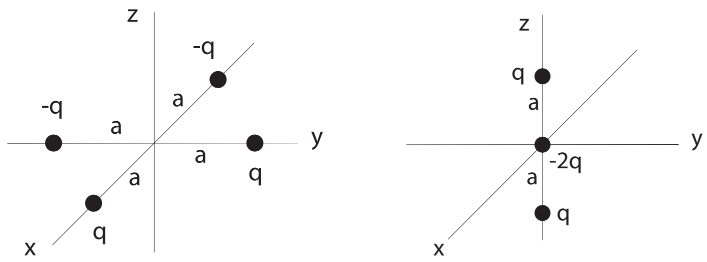

Abbildung 1: Ladungsanordnung von Aufgabe 2 (i) und (ii)

Aufgabe 3 [*Abhängigkeit der Multipolmomente vom Koordinatenursprung*]:

(i) Eine Ladungskonfiguration hat kartesische Multipolmomente q, $\mathbf{p}$ und Q_{ij} bezüglich eines Koordinatensystems, und kartesische Multipolmomente $\hat{q}$, $\hat{\mathbf{p}}$ und $\hat{Q}_{ij}$ bezüglich eines anderen Koordinatensystems, das relativ zu dem ersten um den Abstand $\mathbf{R}$ verschoben ist. (Die Koordinatenachsen der beiden Systeme sind aber parallel.) Berechne explizit den Zusammenhang zwischen dem Monopol, Dipol- und Quadrupolmoment in den beiden Koordinatensystemen.

(ii) Falls $q \neq 0$, kann $\mathbf{R}$ so gewählt werden, dass $\hat{\mathbf{p}} = 0$? Falls $q \neq 0$ und $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, kann $\mathbf{R}$ so gewählt werden, dass $\hat{Q}_{ij} = 0$?