

# Elektrodynamik

## FS 08

G.M. Graf

ETH Zürich

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>1</b>
1	Das Coulomb–Gesetz . . . . .	1
2	Singuläre Ladungsverteilungen . . . . .	3
3	Elektrostatische Energie . . . . .	4
4	Das Potentialproblem . . . . .	5
5	Leiter und Kapazitätskoeffizienten . . . . .	7
6	Felder in 2 Dimensionen . . . . .	9
7	Multipolentwicklung . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Die Maxwell–Gleichungen</b>	<b>14</b>
1	Elektromagnetismus . . . . .	14
2	Singuläre Stromverteilungen . . . . .	17
3	Elektrodynamik . . . . .	18
4	Elektromagnetische Potentiale . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Das freie Feld</b>	<b>23</b>
1	Ebene Wellen . . . . .	23
2	Dynamik des freien Feldes . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Die Erzeugung elektromagnetischer Wellen</b>	<b>28</b>
1	Lösung der inhomogenen Wellengleichung . . . . .	28
2	Ausstrahlung . . . . .	29

<b>5</b>	<b>Das Relativitätsprinzip</b>	<b>34</b>
1	Das klassische Relativitätsprinzip . . . . .	34
2	Das Einsteinsche Relativitätsprinzip . . . . .	35
3	Lorentz-Transformationen . . . . .	36
4	Diskussion der Lorentz-Gruppe . . . . .	37
<b>6</b>	<b>Relativistische Elektrodynamik und Mechanik</b>	<b>41</b>
1	Elektrodynamik . . . . .	41
2	Relativistische Mechanik . . . . .	44
<b>7</b>	<b>Erhaltungssätze</b>	<b>48</b>
1	Ladung . . . . .	48
2	Energie und Impuls . . . . .	48
3	Drehimpuls . . . . .	51
<b>8</b>	<b>Elektrodynamik materieller Medien</b>	<b>53</b>
1	Die mittleren Felder in Materie . . . . .	53
2	Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen . . . . .	56
3	Dispersion . . . . .	57
4	Wellen im Dielektrikum . . . . .	60
<b>9</b>	<b>Anwendungen der makroskopischen Maxwell-Gleichungen</b>	<b>64</b>
1	Reflexion und Brechung . . . . .	64
2	Das Feld in einem Leiter . . . . .	67
3	Das Feld in einem Supraleiter . . . . .	68
4	Streuung von Licht in Materie . . . . .	69
<b>10</b>	<b>Wellenleiter</b>	<b>73</b>
1	Das Randwertproblem . . . . .	73
2	Ausbreitung der Wellen . . . . .	75
3	Ohmsche Verluste in der Wand . . . . .	76
<b>11</b>	<b>Das Feld einer Punktladung</b>	<b>80</b>

1	Das retardierte Potential . . . . .	80
2	Ausgestrahlte Energie . . . . .	82
3	Strahlungsdämpfung . . . . .	84
4	Strahlungsverluste in Beschleunigern . . . . .	86
<b>A Anhang: Distributionen</b>		<b>90</b>
<b>B Anhang: Kugelfunktionen</b>		<b>93</b>
<b>C Anhang: Tensorkalkül</b>		<b>97</b>
<b>Repetitorium der Vektoranalysis</b>		<b>105</b>

Dank gebührt Prof. W. Hunziker, auf dessen Vorlesungsskript dieses weitgehend basiert.

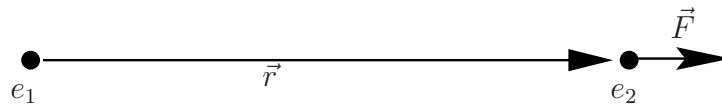


# 1. Elektrostatik

---

## 1. Das Coulomb-Gesetz

Elektrische Ladung wurde zuerst “erzeugt” durch “elektrisieren” (z.B. Reiben von Bernstein). Franklin (1747) erkannte darin ein Trennen positiver und negativer Ladungen: die Gesamtladung eines abgeschlossenen Systems ist konstant. Dies ist der grundlegend neue Erhaltungssatz der Elektrodynamik. Priestley (1766) und Coulomb (1785) erkannten die Analogie elektrischer Kräfte zur Gravitation:



$$\vec{F} = e_1 e_2 \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} \quad (1.1)$$

ist die Kraft auf die Punktladung  $e_2$  in der relativen Lage  $\vec{r}$  bezüglich der Punktladung  $e_1$ . Die Wahl der Konstanten  $1/4\pi$  ist willkürlich, aber zweckmässig. Gl. (1.1) liefert zugleich ein Mass für die Ladung. Deren Dimension ist

$$[e] = M^{1/2} L^{3/2} T^{-1} .$$

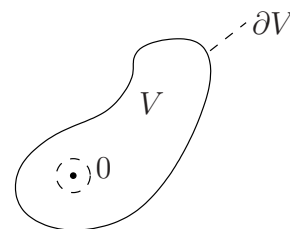
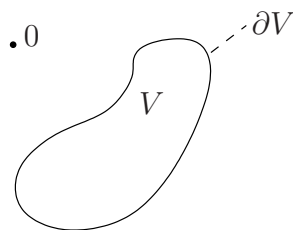
(Stattdessen könnte man eine Grundeinheit für  $e$  unabhängig vom Coulomb-Gesetz festlegen und in (1.1) eine experimentell zu bestimmende “Gravitationskonstante” einführen.) Die mathematische Ausgestaltung der Elektrostatik geht auf Poisson (1812) zurück. Als **elektrisches Feld**  $\vec{E}(\vec{x})$  bezeichnet man die Kraft auf die Probeladung 1 and der Stelle  $\vec{x}$ . Das Feld einer Punktladung  $e$  bei 0 ist somit

$$\vec{E}(\vec{x}) = e \frac{\vec{x}}{4\pi r^3} = -\vec{\nabla} \frac{e}{4\pi r} , \quad (r = |\vec{x}|) , \quad (1.2)$$

da  $\vec{\nabla} r = \vec{x}/r$ . Wegen

$$\Delta \frac{1}{r} = -\operatorname{div} \frac{\vec{x}}{r^3} = \frac{3\vec{x} \cdot \vec{x}}{r^5} - \frac{3}{r^3} = 0 , \quad (\vec{x} \neq 0) , \quad (1.3)$$

ist  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$  für  $\vec{x} \neq 0$  und



$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = 0 \qquad \int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = e , \quad (1.4)$$

denn im zweiten Fall kann man statt  $\partial V$  ebenso gut eine Kugelfläche um  $\vec{x} = 0$  wählen (Satz von Gauss); dort ist  $\vec{x} \cdot d\vec{\sigma} = r d\sigma$ .

Für das Feld mehrerer Punktladungen gilt das **Superpositionsprinzip**: die Felder superponieren sich vektoriell. Das von einer kontinuierlichen Ladungsdichte  $\rho(\vec{x})$  erzeugte Feld ist daher

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \quad \varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (1.5)$$

wobei  $\rho$  etwa eine glatte Funktion ist, die für grosse  $|\vec{x}|$  verschwindet. Nach (1.4) ist

$$\int_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{o} = \underbrace{\int_V d^3x \rho(\vec{x})}_{\text{Gesamtladung in } V} \quad (1.6)$$

für beliebige Raumgebiete  $V$  (Satz vom Fluss). Aus (1.5), (1.6) und dem Satz von Gauss ergeben sich die **Feldgleichungen** der Elektrostatik:

$$\text{rot } \vec{E} = 0, \quad (1.7)$$

$$\text{div } \vec{E} = \rho, \quad (1.8)$$

die sich in der Poisson-Gleichung (1812)

$$\Delta\varphi = -\rho \quad (1.9)$$

für das **elektrische Potential**  $\varphi$  zusammenfassen lassen.

Statt über (1.4) kann man (1.8), (1.9) auch wie folgt herleiten: für eine glatte Funktion  $v$  mit kompaktem Träger ist

$$\int d^3x \frac{1}{|\vec{x}|} \Delta v(\vec{x}) = -4\pi v(0), \quad (1.10)$$

d.h. (s. Anhang A)

$$\Delta \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi\delta(\vec{x}). \quad (1.11)$$

Mit Hilfe der **Greenschen Formel**

$$\int_{\partial V} (u\vec{\nabla}v - v\vec{\nabla}u) \cdot d\vec{o} = \int_V (u\Delta v - v\Delta u) d^3x \quad (1.12)$$

und wegen (1.3) ist nämlich

$$\begin{aligned} \int_{|\vec{x}| \geq \varepsilon} d^3x \frac{1}{|\vec{x}|} \Delta v(\vec{x}) &= \int_{|\vec{x}| = \varepsilon} \left( \frac{1}{r} \vec{\nabla}v + v \frac{\vec{x}}{r^3} \right) \cdot d\vec{o} \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \underbrace{\int_{|\vec{x}| = \varepsilon} \vec{\nabla}v \cdot d\vec{o}}_{\rightarrow -4\pi v(0)} - \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{|\vec{x}| = \varepsilon} v d\sigma \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -4\pi v(0), \\ &- \int_{|\vec{x}| \leq \varepsilon} d^3x \Delta v = O(\varepsilon^3) \end{aligned}$$

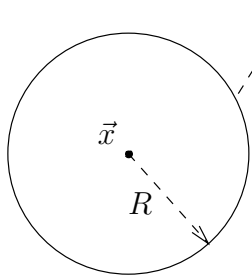
da  $\vec{x} \cdot d\vec{o} = -r d\sigma$ . Aus

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{y}|}$$

und (1.10) folgt

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\Delta_x \rho(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{y}|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\Delta_y \rho(\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{y}|} = -\rho(\vec{x}).$$

Umgekehrt ist (1.5) die einzige Lösung von (1.7, 1.8) oder (1.9), welche für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  verschwindet. Dies beruht darauf, dass die Lösungen  $\vec{E}(\vec{x})$ , bzw.  $\varphi(\vec{x})$  der homogenen Gleichungen ( $\rho = 0$ ) harmonische Funktionen sind, d.h. überall der Gleichung  $\Delta u = 0$  genügen. Für solche Funktionen gilt der Mittelwertsatz



$$u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{K_R} u \, do, \quad (1.13)$$

$(\vec{x}, R \text{ beliebig}).$

Die Funktion  $u(\vec{x}) \equiv 0$  ist die einzige Lösung von  $\Delta u = 0$  mit  $u(\vec{x}) \rightarrow 0$  für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ , denn (1.13) verschwindet für  $R \rightarrow \infty$ . Zum Beweis von (1.13) benützt man (1.12) mit  $v(\vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|^{-1}$ ,  $V$ : Kugelschale zwischen  $K_\varepsilon$  und  $K_R$  und lässt  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 2. Singuläre Ladungsverteilungen

Singuläre Ladungsverteilungen sind Idealisierungen, die zutreffend sind zur Beschreibung der Felder in grosser Entfernung.

- Punktladung:  $\rho(\vec{x})$  ist die Distribution

$$\rho(\vec{x}) = e\delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

oder

$$\rho(f) = ef(\vec{y})$$

und (1.5) liefert (1.2) (für  $\vec{y} = 0$ ).

- Dipol: Ladungen  $e$  in  $\vec{a}$  und  $-e$  in  $0$  im Limes  $\vec{a} \rightarrow 0$ ,  $e\vec{a} \rightarrow \vec{p}$ . Ladungsdichte:

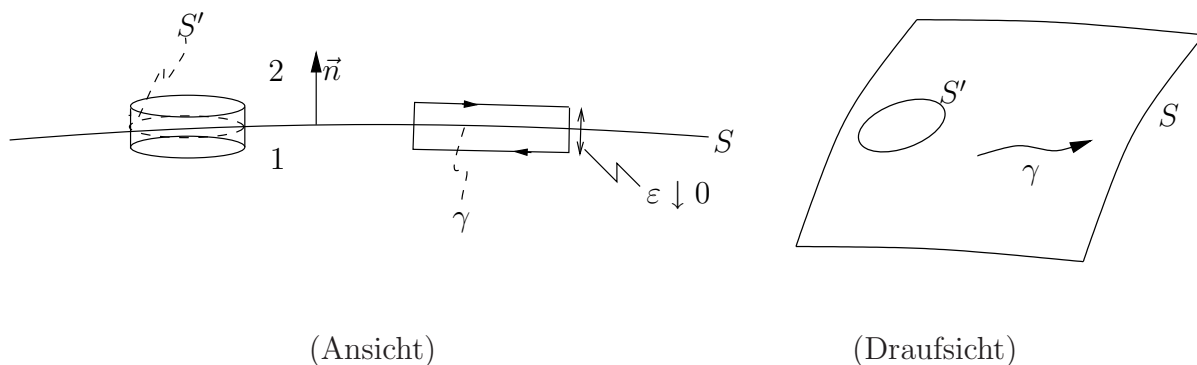
$$\begin{aligned} \rho(f) &= \lim e(f(\vec{a}) - f(0)) = \lim e(\vec{a} \cdot \vec{\nabla} f(0) + O(a^2)) \\ &= \vec{p} \cdot \vec{\nabla} f(0), \\ \rho &= -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Potential:

$$\varphi = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi r} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{4\pi r^3}. \quad (1.15)$$

- Oberflächenladung: Fläche  $S \ni \vec{y}$ , Flächenelement  $do(\vec{y})$ , Flächenladungsdichte  $\sigma(\vec{y})$ . Ladungsdichte:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}) &= \int_S do \sigma(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \rho(f) &= \int_S do \sigma(\vec{y}) f(\vec{y}). \end{aligned}$$



Für die einseitigen Randwerte  $\vec{E}_i$ ,  $i = 1, 2$  gilt nach (1.6)

$$\left( \int_{S'} \vec{E}_i \cdot \vec{n} \, do \right) \Big|_1^2 = \int_{S'} do \sigma(\vec{y})$$

für jede Fläche  $S' \subset S$ . Also

$$\vec{E}_i \cdot \vec{n} \Big|_1^2 = \sigma. \quad (1.16)$$

Wegen  $\text{rot } \vec{E} = 0$  ist  $\left( \int_\gamma \vec{E}_i \cdot d\vec{s} \right) \Big|_1^2 = 0$  für jede Kurve  $\gamma \subset S$ , also  $\vec{E}_i \cdot \vec{t} \Big|_1^2 = 0$  für  $\vec{t}$  tangential zu  $S$ . Mit  $\vec{t} = \vec{e} \wedge \vec{n}$ ,  $\vec{e}$  beliebig, ist

$$\vec{n} \wedge \vec{E}_i \Big|_1^2 = 0. \quad (1.17)$$

### 3. Elektrostatische Energie

Wir führen sukzessive  $N$  Punktladungen ins Feld ein, das durch die vorhergehenden gegeben ist. So ergibt sich die elektrostatische Energie

$$\begin{aligned} W_N &= W_{N-1} + \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{N-1} \frac{e_i e_N}{|\vec{x}_i - \vec{x}_N|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{i < j} \frac{e_i e_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} = \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq j} \frac{e_i e_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

(ausgehend von  $W_1 = 0$ ). Für eine kontinuierliche Ladungsverteilung ist entsprechend

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \rho(\vec{x})\varphi(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \int d^3x (\Delta\varphi) \cdot \varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{\nabla}\varphi)^2 = \frac{1}{2} \int d^3x \vec{E}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Die elektrostatische Energie kann also dem Feld zugeschrieben werden, und zwar vermittels der **Energiedichte**

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{E}(\vec{x})^2. \quad (1.20)$$



Beachte, dass (1.19) für das Feld einer (s.(1.2)) oder mehrerer Punktladungen divergiert und somit nicht identisch mit (1.18) ist. Vielmehr ist (1.18) gleich (benütze (1.11) und partielle Integration)

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \sum_{i \neq j} e_i e_j \int d^3x \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} &= \frac{1}{2} (4\pi)^{-2} \sum_{i \neq j} \int d^3x \vec{\nabla} \frac{e_i}{|\vec{x} - \vec{x}_i|} \cdot \vec{\nabla} \frac{e_j}{|\vec{x} - \vec{x}_j|} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \int d^3x \vec{E}_i \cdot \vec{E}_j = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{E}^2 - \sum_i \vec{E}_i^2), \end{aligned}$$

wobei  $\vec{E}_i$  das Feld der  $i$ -ten Ladung und  $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$  das gesamte Feld ist. Für Punktladungen ist also (1.18) die (renormierte) Feldenergie (1.19) nach Subtraktion der unendlichen **Selbstenergie**  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int d^3x \vec{E}_i^2$ .

#### 4. Das Potentialproblem

Wir haben (1.9) gelöst mit der Randbedingung im Unendlichen:  $\varphi(\vec{x}) \rightarrow 0$ , ( $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ ). Stattdessen, sei nun  $D \subset \mathbb{R}^3$  eine offene Menge mit Rand  $\partial D$ . Gesucht ist  $\varphi(\vec{x})$ , ( $\vec{x} \in D$ ), mit

$$\Delta\varphi = -\rho \quad \text{in } D, \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \varphi \upharpoonright \partial D &= \psi \quad \text{auf } \partial D, \\ \varphi(x) &\xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0, \end{aligned} \quad (1.22)$$

(letztere Bedingung nur, falls  $D$  unbeschränkt ist), wobei  $\rho$ , bzw.  $\psi$ , glatte Funktionen auf  $D$ , bzw.  $\partial D$  sind, die für  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  verschwinden.

Die Lösung  $\varphi$  dieser Aufgabe minimiert das Funktional

$$\mathcal{F}[\varphi] = \int_D d^3x \left( \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\varphi)^2 - \rho \cdot \varphi \right) \quad (1.23)$$

unter der Randbedingung (1.22), und umgekehrt, denn für jedes  $\delta\varphi(\vec{x})$  mit  $\delta\varphi \upharpoonright \partial D = 0$  ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\varphi + \delta\varphi] - \mathcal{F}[\varphi] &= \int_D \left( \frac{1}{2} (\vec{\nabla}\delta\varphi)^2 + \vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}\delta\varphi - \rho\delta\varphi \right) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int_D \underbrace{(\vec{\nabla}\delta\varphi)^2}_{\geq 0} d^3x - \int_D (\Delta\varphi + \rho)\delta\varphi d^3x + \int_{\partial D} \underbrace{\delta\varphi}_{=0} \cdot \vec{\nabla}\varphi d\vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Insbesondere ist die Lösung von (1.21, 1.22) **eindeutig**, denn aus  $\mathcal{F}[\varphi + \delta\varphi] = \mathcal{F}[\varphi]$  folgt dann  $\vec{\nabla}\delta\varphi \equiv 0$ , also  $\delta\varphi \equiv 0$ . Die **Existenz** der Lösung (bei "vernünftigen" Rand  $\partial D$ ) beweisen wir hier zwar nicht, kann aber dadurch gezeigt werden, dass (1.23, 1.22) einen Minimierer besitzt.

Ist speziell das Komplement  $\mathbb{R}^3 \setminus D$  ein **Leiter** (d.h., die Ladungsträger darin sind frei beweglich), so ist dort im Gleichgewicht  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = 0$ . Somit ist  $\psi = \text{const}$  auf dem Rand jeder Zusammenhangskomponente von  $\mathbb{R}^3 \setminus D$ . Man sagt, der Leiter sei **geerdert**, falls  $\psi = 0$ .

Als **Greensche Funktion** definiert man das Potential einer Punktladung 1 bei  $\vec{y} \in D$  umgeben vom geerdeten Leiter  $\partial D$ :

$$\begin{aligned} G : \bar{D} \times D &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \Delta_x G(\vec{x}, \vec{y}) &= -\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\vec{x}, \vec{y} \in D), \\ G(\vec{x}, \vec{y}) &= 0 \quad \text{für } \vec{x} \in \partial D \cup \{\infty\}, \vec{y} \in D. \end{aligned}$$

Es gilt das **Reziprozitätsgesetz**:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = G(\vec{y}, \vec{x}), \quad (\vec{x}, \vec{y} \in D) \quad (1.25)$$

und die **Lösung** von (1.21, 1.22) ist

$$\varphi(\vec{x}) = \int_D \rho(\vec{y}) G(\vec{y}, \vec{x}) d^3 y - \int_{\partial D} \psi(\vec{y}) \cdot \vec{\nabla}_y G(\vec{y}, \vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}. \quad (1.26)$$

Aus (1.12) folgt nämlich für  $u(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{y})$ ,  $v(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{z})$  mit  $\vec{y} \neq \vec{z}$

$$0 = -G(\vec{z}, \vec{y}) + G(\vec{y}, \vec{z});$$

für  $u(\vec{x}) = \varphi(\vec{x})$ ,  $v(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{y})$  hingegen

$$\int_{\partial D} \psi(\vec{x}) \vec{\nabla}_x G(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\vec{\sigma}_x = -\varphi(\vec{y}) + \int_D G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{x}) d^3 x.$$

**Beispiele:**

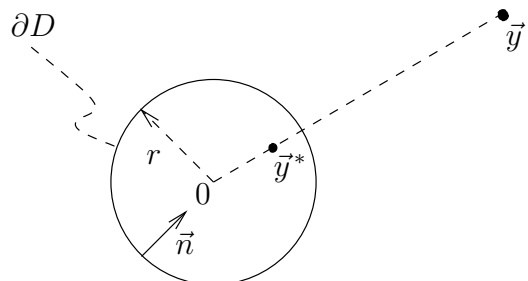
1)  $D = \mathbb{R}^3$ :  $4\pi G(\vec{x}, \vec{y}) = |\vec{x} - \vec{y}|^{-1}$ .

2)  $D = \{\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 > 0\}$  (Halbraum): Für  $\vec{y} \in D$  sei  $\vec{y}^* = (-y_1, y_2, y_3)$  das Spiegelbild von  $\vec{y}$  an der Ebene  $x_1 = 0$ . Die Greensche Funktion erhält man durch hinzufügen einer entgegengesetzten **Spiegelladung**  $-1$  bei  $\vec{y}^* \notin D$ :

$$4\pi G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}^*|}.$$

3)  $D = \{|\vec{x}| > r\}$  (Aussenraum der Kugel)

Spiegelladung  $-r/|\vec{y}|$  bei  $\vec{y}^* = r^2 \vec{y} / \vec{y}^2$ :



$$4\pi G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{r}{|\vec{y}|} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}^*|}. \quad (1.27)$$

Es gilt tatsächlich  $G(\vec{x}, \vec{y}) = 0$  für  $\vec{x}^2 = r^2$ , denn

$$\begin{aligned} (\vec{x} - \vec{y}^*)^2 &= \vec{x}^2 + \vec{y}^{*2} - 2\vec{x} \cdot \vec{y}^* = \vec{x}^2 + \frac{r^4}{\vec{y}^2} - 2\frac{r^2}{\vec{y}^2}\vec{x} \cdot \vec{y} \\ &\stackrel{(\vec{x}^2=r^2)}{=} \frac{r^2}{\vec{y}^2}(\vec{y}^2 + r^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}) = \frac{r^2}{\vec{y}^2}(\vec{x} - \vec{y})^2. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Auf der Kugel wird nach (1.16) die Ladungsdichte

$$\sigma(\vec{x}) = \vec{\nabla}_x G(\vec{x}, \vec{y}) \cdot \vec{n}(\vec{x})$$

( $\vec{n}$ : Aussenormale von  $D$ ) induziert. Die gesamte **induzierte Ladung** ist gleich der Spiegelladung:

$$Q(\vec{y}) = \int_{\partial D} \vec{\nabla}_x G(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\vec{o} = -\frac{r}{|\vec{y}|},$$

denn nach (1.26) ist  $Q(\vec{y})$  die Lösung des Potentialproblems zu  $\rho = 0$  und  $\psi = -1$ , was offensichtlich  $-r/|\vec{y}|$  ist (alternativ dazu kann man auf  $Q(\vec{y})$  den Satz von Gauss für  $\mathbb{R}^3 \setminus D$  anwenden). Die **Kraft** der induzierten Ladung auf die Ladung 1 bei  $\vec{y}$ ,

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{y}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left( \vec{\nabla}_y \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|} \right) \vec{\nabla}_x G(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\vec{o} \\ &= \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla}_z \left( -\int_{\partial D} \frac{1}{|\vec{z} - \vec{x}|} \vec{\nabla}_x G(\vec{x}, \vec{y}) \cdot d\vec{o} \right) \Big|_{\vec{z}=\vec{y}}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

ist ebenfalls gleich der Kraft, die von der Spiegelladung bei  $\vec{y}^*$  ausgehen würde:

$$\vec{F}(\vec{y}) = \frac{r}{4\pi|\vec{y}|} \vec{\nabla}_z \frac{1}{|\vec{z} - \vec{y}^*|} \Big|_{\vec{z}=\vec{y}}.$$

Beachte dazu, dass der Ausdruck in Klammern in (1.29), wieder nach (1.26), das Potential bei  $\vec{y}$  ist, das zu  $\rho = 0$  und  $\psi(\vec{x}) = |\vec{z} - \vec{x}|^{-1}$  gehört, nach (1.27) also gleich

$$\frac{1}{|\vec{z} - \vec{y}|} = \frac{r}{|\vec{z}|} \frac{1}{|\vec{y} - \vec{z}^*|} = \frac{r}{|\vec{y}|} \frac{1}{|\vec{z} - \vec{y}^*|}$$

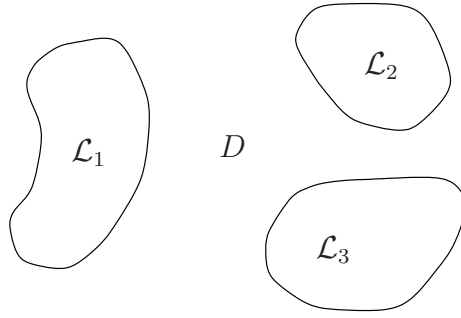
(letzteres wegen (1.25) oder (1.28)).

**Anwendung:** gegeben Punktladung  $Q$  bei  $\vec{y} \in D$  und Ladung  $Q'$  auf leitendem (aber nicht geerdetem)  $\partial D$ ; gesucht  $\varphi(\vec{x})$ :

$$\begin{aligned} 4\pi\varphi(\vec{x}) &= \left( \frac{Q}{|\vec{x} - \vec{y}|} + \frac{Q^*}{|\vec{x} - \vec{y}^*|} \right) + \frac{Q' - Q^*}{|\vec{x}|}, \\ Q^* &= -Q \frac{r}{|\vec{y}|}. \end{aligned}$$

## 5. Leiter und Kapazitätskoeffizienten

Betrachte das Feld ausserhalb einer Anordnung von Leitern, die auf verschiedenen Potentialen gehalten werden. Sei  $\mathbb{R}^3 \setminus D = \bigcup_{i=1}^N \mathcal{L}_i$ , wobei die  $\mathcal{L}_i$  disjunkte, kompakte, zusammenhängende Leiter sind:



Potentialproblem auf  $D$ :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 \quad \text{in } D, \\ \varphi(\vec{x}) &= V_i \quad \text{auf } \partial\mathcal{L}_i, \\ \varphi(\vec{x}) &\rightarrow 0 \quad (|\vec{x}| \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dann ist (Superpositionsprinzip)

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N V_j \varphi_j(\vec{x}), \quad (1.31)$$

wobei  $\varphi_j$  die Lösung von (1.30) für  $V_i = \delta_{ij}$  ist. Die Feldenergie (1.19) von (1.31) ist

$$W = \frac{1}{2} \int_D d^3x (\vec{\nabla}\varphi)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V_i V_j \underbrace{\int_D d^3x \vec{\nabla}\varphi_i \cdot \vec{\nabla}\varphi_j}_{\equiv C_{ij}}.$$

Die  $C_{ij}$  heissen **Kapazitätskoeffizienten**. Die Matrix  $(C_{ij})_{i,j=1}^N$  ist **symmetrisch** und **positiv definit**:  $W \geq 0$ , und  $= 0$  impliziert  $\vec{\nabla}\varphi = 0$ , also  $V_1 = \dots = V_N = \varphi(\infty) = 0$ . Zur Bedeutung der  $C_{ij}$ 's:

$$\begin{aligned} C_{ij} &= \int_D d^3x \vec{\nabla} \cdot (\varphi_i \vec{\nabla}\varphi_j) \quad (\text{da } \Delta\varphi_j = 0) \\ &= \int_{\partial D} \varphi_i \vec{\nabla}\varphi_j \cdot d\vec{\sigma} = - \int_{\partial\mathcal{L}_i} \vec{\nabla}\varphi_j \cdot d\vec{\sigma} \\ &= \text{Ladung auf } \partial\mathcal{L}_i, \text{ induziert durch Potential } \delta_{jk} \text{ auf } \mathcal{L}_k, \end{aligned}$$

denn die Ladungsdichte beträgt nach (1.16)  $-\vec{\nabla}\varphi_j \cdot \vec{n}_i$  ( $\vec{n}_i$ : Aussennormale von  $\partial\mathcal{L}_i$ ). Die Symmetrie  $C_{ij} = C_{ji}$  ist also eine Reziprozitätsaussage. Für die allgemeine Lösung (1.31) ist die Ladung  $Q_i$  auf  $\partial\mathcal{L}_i$

$$Q_i = \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j, \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.32)$$

**Anwendung:** gegeben  $Q_1, \dots, Q_n, V_{n+1}, \dots, V_N$ ; gesucht  $V_1, \dots, V_n, Q_{n+1}, \dots, Q_N$ :

$$\sum_{j=1}^n C_{ij} V_j = Q_i - \sum_{j=n+1}^N C_{ij} V_j, \quad (i = 1, \dots, n).$$

Die rechte Seite ist gegeben und die Matrix  $(C_{ij})_{i,j=1}^n$  ist invertierbar, da sie zu einer positiv definiten quadratischen Form (in  $n$  Variablen) gehört. Dies liefert  $V_1, \dots, V_n$ . Die Ladung  $Q_1, \dots, Q_N$  folgen aus (1.32).

Die Berechnung der  $C_{ij}$  erfordert i.A. das Lösen eines komplizierten Randwertproblems. Das Variationsprinzip (1.23) liefert aber eine obere Schranke für  $C_{ii}$ :

$$C_{ii} = \int_D (\vec{\nabla} \varphi_i)^2 d^3x \leq \int_D (\vec{\nabla} \tilde{\varphi})^2 d^3x$$

für jede Funktion  $\tilde{\varphi}(\vec{x})$  mit  $\tilde{\varphi} \upharpoonright \partial\mathcal{L}_j = \delta_{ij}$ .

## 6. Felder in 2 Dimensionen

Eine zweidimensionale Situation entsteht, wenn die Ladungsverteilung in einer Richtung (oEdA die 3-Richtung) translationsinvariant ist,  $\rho = \rho(x_1, x_2)$ . Dementsprechend suchen wir Felder der Form  $\vec{E} = \vec{E}(x_1, x_2)$ . Die Feldgleichungen (1.7, 1.8) liefern  $E_3 = \text{const}$  und lauten für  $\underline{E} = (E_1, E_2)$

$$\begin{aligned} \text{rot } \underline{E} &:= \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0, \\ \text{div } \underline{E} &:= \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} = \rho. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Als Hilfsmittel steht die Funktionentheorie zur Verfügung: Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet, wo  $\rho = 0$ . Jede **analytische Funktion**

$$E(z) = E_1(x_1, x_2) - iE_2(x_1, x_2)$$

von  $z = x_1 + ix_2$  löst (1.33) in  $G$ , denn dies sind gerade die Cauchy-Riemann Bedingungen  $\partial E / \partial x_1 = (1/i) \partial E / \partial x_2$ .

Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet lässt sich  $E(z)$  stets als Ableitung

$$E(z) = -\frac{d\Phi}{dz}$$

einer ebenfalls analytischen Funktion  $\Phi(z)$  schreiben. Zerlegen wir  $\Phi = \varphi_1 - i\varphi_2$ , so ist

$$E_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, \quad E_2 = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2},$$

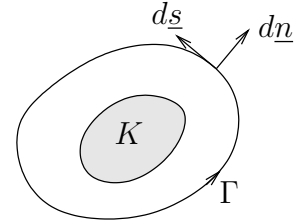
also

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} \varphi_1, \quad \underline{E}^\perp := (-E_2, E_1) = \underline{\nabla} \varphi_2.$$

Somit ist  $\varphi_1$  das Potential  $\varphi$ ; die Niveaulinien von  $\varphi_2$  sind die Feldlinien, da sie senkrecht zu  $\underline{\nabla} \varphi_2$ , bzw.  $\underline{E}^\perp$  verlaufen.

Ist  $G$  nicht einfach zusammenhängend, so existiert nur das Potential  $\varphi_1$ ; hingegen ist  $\varphi_2$  (und damit  $\Phi$ ) nur als mehrwertige Funktion definiert: Für eine nicht zusammenziehbare Schleife  $\Gamma$  in  $G$  ist wegen  $E(z) dz = (E_1 dx_1 + E_2 dx_2) + i(E_1 dx_2 - E_2 dx_1)$

$$\oint_{\Gamma} E(z) dz = \underbrace{\oint_{\Gamma} \underline{E} \cdot d\underline{s}}_{=0} + i \oint_{\Gamma} \underline{E} \cdot d\underline{n} = i \int_K \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2 .$$



**Beispiel:** Das komplexe Potential eines homogen geladenen Drahts (Linienladungsdichte  $\lambda$ ) ist

$$\Phi(z) = -\frac{\lambda}{2\pi} \log z .$$

Randwertprobleme mit  $\rho = 0$  in  $G$  und Randbedingung  $\varphi_1 \upharpoonright \partial G = \psi$  können mit Hilfe von **konformen Abbildungen**  $f : G \rightarrow \tilde{G}$ ,  $z \mapsto \tilde{z}$  gelöst werden: Ist  $\tilde{\Phi}(\tilde{z})$  eine analytische Funktion auf  $\tilde{G}$ , so löst

$$\Phi(z) = \tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \tilde{\Phi}(f(z))$$

das Problem, sofern die Randbedingung für  $\text{Re } \Phi$  stimmt. Ist insbesondere der Rand geerdet ( $\psi = 0$ ), so folgt durch Betrachtung von  $\tilde{\Phi}(\tilde{z}) = \tilde{z}$ :  $\Phi(z)$  ist eine konforme Abbildung, die  $\partial G$  auf die imaginäre Achse abbildet. **Beispiel:** Sektor  $G = \{z \mid 0 < \arg z < \alpha\}$  mit Öffnungswinkel  $0 < \alpha \leq 2\pi$ ; das Gebiet ist komplementär zu einem Keil vom Winkel  $\beta = 2\pi - \alpha$ . Rand geerdet. Dann ist

$$\Phi(z) = \text{const} \cdot iz^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

eine Lösung (eindeutig erst bei passenden Randbedingungen im Unendlichen). Das elektrische Feld

$$|E(z)| \propto |z|^{\frac{\pi-\alpha}{\alpha}} = |z|^{-\frac{\pi-\beta}{2\pi-\beta}}$$

verschwindet oder divergiert an der Spitze  $z = 0$  je nachdem, ob  $0 < \alpha < \pi$  oder  $0 \leq \beta < \pi$ .

## 7. Multipolentwicklung

Gegeben eine Ladungsdichte  $\rho(\vec{x}')$  mit  $\text{supp } \rho \subset \{|\vec{x}'| < R\}$ . Wir wollen das Potential

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (1.34)$$

für  $r = |\vec{x}| \gg R$  auswerten. Die Taylorentwicklung in  $\vec{x}'$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla})^l \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{r^3} + \frac{3(\vec{x} \cdot \vec{x}')^2 - \vec{x}^2 \vec{x}'^2}{2r^5} + \frac{1}{r} O\left(\left(\frac{R}{r}\right)^3\right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

erhält man aus

$$\frac{1}{|\vec{x} - \lambda \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left( \frac{d}{d\lambda} \right)^l \frac{1}{|\vec{x} - \lambda \vec{x}'|} \Bigg|_{\lambda=0} \lambda^l ,$$

wo  $d/d\lambda$  wie  $-\vec{x}' \cdot \vec{\nabla}$  wirkt. Da (1.35) in  $|\vec{x}'| \leq R$  gleichmässig konvergent ist, folgt

$$4\pi\varphi(\vec{x}) = \frac{e}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 T_{ij} \frac{x_i x_j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots, \quad (1.36)$$

↑ Potential eines Quadrupols  
 ↑ Potential eines Dipols  
 ↑ Potential einer Punktladung

wobei

$$e = \int d^3x' \rho(\vec{x}') \quad \text{Gesamtladung}$$

$$\vec{p} = \int d^3x' \vec{x}' \rho(\vec{x}') \quad \text{Dipolmoment}$$

$$T_{ij} = T_{ji} = 3 \int d^3x' x'_i x'_j \rho(\vec{x}')$$

Die 6 Funktionen  $P_{ij}(\vec{x}) := (x_i x_j - (1/3)\vec{x}^2 \delta_{ij})/(2r^5)$ , ( $i \leq j$ ) sind linear abhängig, da  $\sum_{i=0}^3 P_{ii} = 0$ . Das Quadrupolfeld bestimmt somit die Koeffizienten  $T_{ij}$  nicht eindeutig. Stattdessen kann man es nach den linear unabhängigen Funktionen  $x_i x_j / (2r^5)$  entwickeln. Dazu bemerken wir, dass der letzte Term in (1.35) symmetrisch in  $\vec{x}$ ,  $\vec{x}'$  ist,

$$\frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 x'_i x'_j (3x_i x_j - \vec{x}^2 \delta_{ij}) = \frac{1}{2r^5} \sum_{i,j=1}^3 (3x'_i x'_j - \vec{x}'^2 \delta_{ij}) x_i x_j,$$

folglich das Quadrupolfeld auch gleich

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 Q_{ij} \frac{x_i x_j - \frac{1}{3} \vec{x}^2 \delta_{ij}}{r^5}$$

ist, wobei der **Quadrupoltensor**

$$Q_{ij} = Q_{ji} = \int d^3x' (3x'_i x'_j - \vec{x}'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{x}') \quad (1.37)$$

$$= T_{ij} - \frac{1}{3} (\text{tr } T) \delta_{ij}$$

spurlos ist:  $\text{tr } Q = 0$ . Im Unterschied zu den 6  $T_{ij}$ 's, sind die 5 unabhängigen  $Q_{ij}$ 's durch das Feld (und nicht bloss durch  $\rho$ ) eindeutig bestimmt.

**Beispiel:** Eine sphärisch symmetrische Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x}')$  hat  $4\pi\varphi(x) = e/r$  und somit kein Quadrupolfeld, obschon i.A.  $T_{ii} = \int d^3x' \vec{x}'^2 \rho(\vec{x}') \neq 0$ . Jedoch:  $Q = 0$ .

Die Beschreibung des Potentials  $l$ -ter Ordnung ( $l \geq 2$ ) in (1.36) mit Hilfe der (zu den  $T_{ij}$ 's analogen) Koeffizienten

$$\int d^3x x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \rho(\vec{x}) \quad (1.38)$$

( $m_i \in \mathbb{N}$ ,  $m_1 + m_2 + m_3 = l$ ) ist ebenfalls redundant: nur gewisse (den  $Q_{ij}$  analogen) Linearkombinationen davon werden benötigt. Eine systematische Erfassung dieser höheren

Multipolfelder ist mit Hilfe der **Kugelfunktionen** möglich. Sei  $\Omega = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{e}| = 1\}$  die Einheitskugel.

**Definition.**  $Y_l : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Kugelfunktion zum Index  $l = 0, 1, 2, \dots$ , falls  $Y_l$  die Einschränkung auf  $\Omega$  eines homogenen, harmonischen Polynoms  $u_l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  vom Grad  $l$  ist:

$$u_l(r\vec{e}) = r^l Y_l(\vec{e}), \quad \Delta u_l = 0. \quad (1.39)$$

Sei  $L^2(\Omega) = \{Y : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{\Omega} d\vec{e} |Y(\vec{e})|^2 < +\infty\}$  mit Skalarprodukt

$$(Y, Z) = \int_{\Omega} d\vec{e} \overline{Y(\vec{e})} Z(\vec{e}).$$

**Satz.**

- a)  $(Y_l, Y_{l'}) = 0$  für  $l \neq l'$ .
- b) Die  $Y_l$  (zu festem  $l$ ) bilden einen  $(2l+1)$ -dimensionalen Unterraum  $\mathcal{Y}_l \subset L^2(\Omega)$ .
- c) Diese Unterräume spannen  $L^2(\Omega)$  auf:

$$L^2(\Omega) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{Y}_l.$$

(Für den Beweis, wie auch für das folgende, s. Anhang B).

Im Raum  $\mathcal{Y}_l$  der Kugelfunktionen zum Index  $l$  kann man eine **orthonormierte Basis** von sogenannten **speziellen Kugelfunktionen** auszeichnen.

Bezeichnung:  $Y_{lm} = Y_{lm}(\vec{e})$ , ( $m = -l, \dots, +l$ ;  $l = 0, 1, \dots$ ).

Also:  $(Y_{lm}, Y_{l'm'}) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ .

Es gilt

**Lemma.** Sei  $\psi : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  eine stetige Funktion  $\psi = \psi(\vec{e}, \vec{e}')$  mit  $\psi(R\vec{e}, R\vec{e}') = \psi(\vec{e}, \vec{e}')$  für  $R \in \text{SO}(3)$ . Dann ist  $\psi$  darstellbar als

$$\psi(\vec{e}, \vec{e}') = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \sum_{m=-l}^l \overline{Y_{lm}(\vec{e}')} Y_{lm}(\vec{e}). \quad (1.40)$$

Durch Anwendung auf die rotationsinvariante Funktion  $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$  folgt

**Lemma.** ( $\vec{x} = r\vec{e}, \vec{x}' = r'\vec{e}'$ ). Für  $r' < r$  ist

$$\frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(\frac{r'}{r}\right)^l \frac{1}{2l+1} \overline{Y_{lm}(\vec{e}')} Y_{lm}(\vec{e}). \quad (1.41)$$

**Beweis:** Der  $l$ -te Term der Entwicklung (1.35) ist ebenfalls invariant unter  $(\vec{x}, \vec{x}') \rightarrow (R\vec{x}, R\vec{x}')$  und ist ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grad  $l$  in  $\vec{x}'$ . Nach (1.40) und der Definition (1.39) ist

$$\frac{1}{4\pi} \frac{(-1)^l}{l!} (\vec{x}' \cdot \vec{\nabla})^l \frac{1}{r} = c_l \frac{1}{r} \left(\frac{r'}{r}\right)^l \sum_{m=-l}^l \overline{Y_{lm}(\vec{e}')} Y_{lm}(\vec{e}),$$



d.h. es gilt (1.41) mit  $c_l$  anstelle von  $(2l + 1)^{-1}$ . Zur Bestimmung von  $c_l$  setze  $\vec{e} = \vec{e}'$  und integriere über  $\Omega$ :

$$\frac{1}{|r - r'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l c_l \underbrace{\sum_{m=-l}^l \underbrace{(Y_{lm}, Y_{lm})}_{=1}}_{2l+1};$$

andererseits ist aber  $|r - r'|^{-1} = r^{-1}(1 - (r'/r))^{-1} = r^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} (r'/r)^l$ , d.h.  $c_l = (2l + 1)^{-1}$ .

Aus (1.41) folgt nun die gesuchte Multipolentwicklung

$$\varphi(\vec{x}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l + 1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vec{e})}{r^{l+1}}$$

mit den  $2l + 1$  **sphärischen Multipolmomenten** der Ordnung  $l$

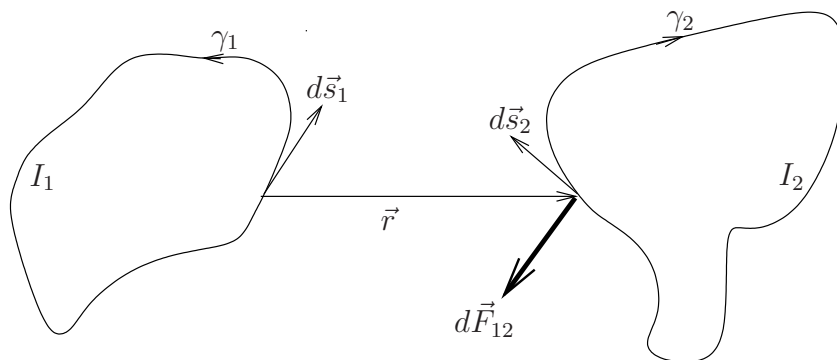
$$q_{lm} = \int d^3x' \overline{Y_{lm}(\vec{e}')} r'^l \rho(\vec{x}').$$

Sie sind durch  $\varphi$  eindeutig bestimmt, im Gegensatz zu den  $(l + 1)(l + 2)/2$  Koeffizienten (1.38).

## 2. Die Maxwell–Gleichungen

### 1. Elektromagnetismus

Permanente Magnete (Magnetit) waren schon im Altertum bekannt. Ein Stabmagnet weist entgegengesetzte Pole auf (de Maricourt, 1269), die später als magnetische Ladungen aufgefasst wurden, eine heute überholte Vorstellung. Für die Wechselwirkung solcher Magnetpole postulierten Michell (1750) und Coulomb (1785) ein zum Coulomb–Gesetz (1.1) analoges Verhalten. Nichtdestoweniger galten magnetische und elektrische Erscheinungen als unabhängig. Dies änderte sich erst als Ørsted (1819) die Ablenkung von Magnetenadeln in der Nähe stromführender Leiter fand: bewegte Ladungen sind magnetisch wirksam. Ampère vermutete daraufhin, dass auch (elektrisch neutrale) stromführende Leiter miteinander wechselwirken. Seine quantitative Beschreibung (1820) lautet:



$$\vec{F}_{12} = \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} d\vec{F}_{12} = \frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} \frac{d\vec{s}_2 \wedge (d\vec{s}_1 \wedge \vec{r})}{4\pi r^3} \quad (2.1)$$

ist die Kraft auf den Leiter  $\gamma_2$ , die vom Leiter  $\gamma_1$  ausgeht. Dabei ist  $I_i$  der **zeitlich konstante** elektrische Strom, der im Leiter  $\gamma_i$  fließt. Da die Einheit der Ladung, und somit des Stroms, durch (1.1) bereits festgelegt ist, wird in (2.1) eine Kopplungskonstante  $1/c^2$  benötigt:  $c$  hat die Dimension einer Geschwindigkeit. Aus

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \int_{\gamma_2} \int_{\gamma_1} \frac{\vec{r}}{4\pi r^3} (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2)$$

(benütze dazu  $d\vec{s}_2 \wedge (d\vec{s}_1 \wedge \vec{r}) = (\vec{r} \cdot d\vec{s}_2) d\vec{s}_1 - (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \vec{r}$  und  $-r^{-3} \vec{r} \cdot d\vec{s}_2 = d_2 r^{-1}$ , sowie  $\int_{\gamma_2} d_2 r^{-1} = 0$ ) folgt “actio = reactio” für  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$  (nicht aber für  $d\vec{F}_{12}$ ).

Man kann sich die Wechselwirkung (2.1) durch ein **Magnetfeld**  $\vec{B}(\vec{x})$ , das von einer Stromschleife erzeugt wird, vermittelt denken (Biot-Savart):

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi c} \int_{\gamma} \frac{d\vec{s} \wedge (\vec{x} - \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}. \quad (2.2)$$

Ein Stromelement  $I d\vec{s}$  erfährt dann im äusseren  $\vec{B}$ -Feld die Kraft

$$d\vec{F} = \frac{I}{c} d\vec{s} \wedge \vec{B}. \quad (2.3)$$

Da für jeden festen Vektor  $\vec{e}$

$$\vec{e} \wedge \frac{\vec{x}}{r^3} = \left( \vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) \wedge \vec{e} = \text{rot} \frac{\vec{e}}{r},$$

ist (2.2) äquivalent zu

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi c} \int_{\gamma} \frac{d\vec{s}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (2.4)$$

( $\vec{A}$  heisst **Vektorpotential**).

Eine kontinuierliche Stromverteilung wird durch eine Stromdichte  $\vec{i}(\vec{x}, t)$  beschrieben, d.h. der Strom durch eine orientierte Fläche  $S$  ist

$$I = \int_S \vec{i} \cdot d\vec{\sigma}. \quad (2.5)$$

Ganz allgemein gilt **Ladungserhaltung**:

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \vec{i} \cdot d\vec{\sigma} &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x, \\ \text{div} \vec{i} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.6)$$

(**Kontinuitätsgleichung**). Wir beschränken uns nun aber wieder auf den **stationären Fall** ( $\rho, \vec{i}$  unabhängig von  $t$ ):

$$\text{div} \vec{i} = 0. \quad (2.7)$$

Die Stromdichte, die einem Stromfaden  $\gamma$  entspricht, ist

$$\vec{i}(\vec{x}) = I \int_{\gamma} \delta(\vec{x} - \vec{x}(s)) d\vec{s} :$$

das Integral (2.5) liefert  $I$  für gleich orientierte  $S$  und  $\gamma$ , denn  $d\vec{\sigma} \cdot d\vec{s} = d^3y$  für  $\vec{y} = \vec{x} - \vec{x}(s)$ . So folgt  $\int_{\gamma} f(\vec{y}) I d\vec{s} = \int f(\vec{y}) \vec{i}(\vec{y}) d^3y$  und im kontinuierlichen Fall lautet (2.4) dank Superposition

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad \vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi c} \int d^3y \frac{\vec{i}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (2.8)$$

wobei

$$\text{div} \vec{A} = 0$$

wegen (2.7).  $\vec{B}$  genügt damit den **Feldgleichungen**

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{\vec{i}}{c}, \quad (2.10)$$

denn mit (1.10) ist

$$\text{rot rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \underbrace{\text{div} \vec{A}}_{=0} - \Delta \vec{A} = \frac{\vec{i}}{c}.$$

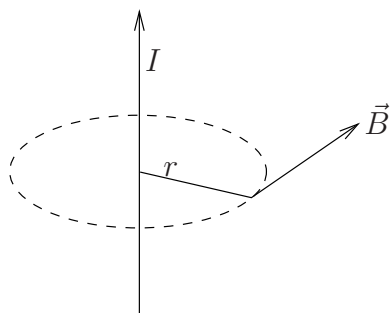
Beachte, dass (2.7) aus (2.10) folgt. Wiederum gilt Eindeutigkeit der Lösung im folgenden Sinn: für  $\vec{v}(\vec{x})$ , das für grosse  $|\vec{x}|$  verschwindet, ist (2.8) die einzige Lösung von (2.9, 2.10) mit  $\vec{B}(\vec{x}) \rightarrow 0$ , ( $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ ). Lösungen für  $\vec{v} = 0$  sind nämlich harmonisch (vgl. (1.13)).

Die Integralform von (2.9, 2.10) ist

$$\int_{\partial V} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0, \quad \int_{\partial S} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \int_S \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad (2.11)$$

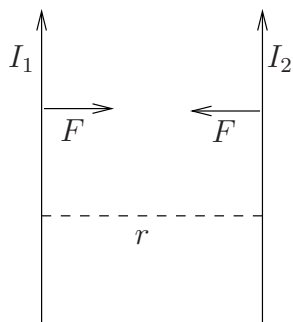
für beliebige Raumbereiche  $V$ , bzw. Flächen  $S$ .

**Beispiel:** Gerader Leiter. Nach (2.2) ist das Feld azimuthal gerichtet; seinen Betrag entnimmt man aus (2.11):



$$2\pi r B(r) = \frac{I}{c}$$

Kraft (2.3) pro Längeneinheit zwischen zwei parallelen Leitern:



$$F = \frac{I_1 I_2}{2\pi c^2 r}$$

Daraus haben Kohlrausch und Weber (1856) die Konstante  $c$  experimentell bestimmt:  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ . Kirchhoff (1857) konstatierte die überraschende Übereinstimmung mit der Lichtgeschwindigkeit (Fizeau 1849, Foucault 1850).

Die **Kraftdichte**  $\vec{f}$  auf eine kontinuierliche Stromverteilung  $\vec{v}$  im äusseren  $\vec{B}$ -Feld ist nach (2.3)

$$\vec{f} = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}. \quad (2.12)$$

Dies gilt auch für nicht stationäres  $\vec{v}$ . Beispiel: die Stromverteilung

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = e\vec{v}\delta(\vec{x} - \vec{x}(t)) \quad (2.13)$$

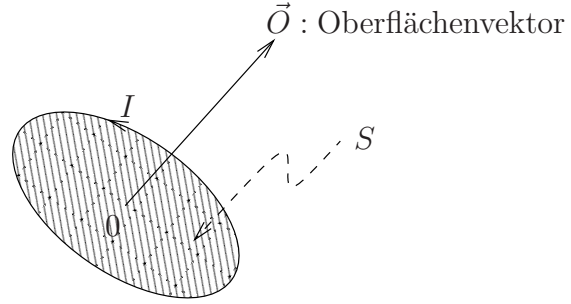
( $\vec{v} = \dot{\vec{x}}(t)$ ) einer bewegten Ladung mit Bahn  $\vec{x}(t)$  erfüllt, zusammen mit der Ladungsverteilung  $\rho(\vec{x}, t) = e\delta(\vec{x} - \vec{x}(t))$ , die Kontinuitätsgleichung (2.6). Auf sie übt das  $\vec{B}$ -Feld demzufolge die **Lorentz-Kraft**

$$\vec{F} = e\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \quad (2.14)$$

aus.

## 2. Singuläre Stromverteilungen

- Magnetisches Dipol: Stromschleife im Limes  $I \rightarrow \infty$ ,  $\vec{O} \rightarrow 0$ ,  $I\vec{O} \rightarrow c\vec{m}$  ( $\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment).



Das  $\vec{A}$ -Feld ist

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi c} \int_{\partial S} \frac{d\vec{s}}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{I}{4\pi c} \int_S d\vec{\sigma} \wedge \underbrace{\vec{\nabla}_y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}}_{\frac{\vec{x}}{r^3} + O(\frac{|\vec{y}|}{r^3})} \rightarrow \frac{\vec{m} \wedge \vec{x}}{4\pi r^3} = \text{rot} \frac{\vec{m}}{4\pi r},$$

das  $\vec{B}$ -Feld also

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \text{rot} \text{rot} \frac{\vec{m}}{4\pi r} = \vec{\nabla} \text{div} \frac{\vec{m}}{4\pi r} - \vec{m} \Delta \frac{1}{4\pi r} \\ &= \vec{\nabla} \left( \vec{m} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{4\pi r} \right) + \vec{m} \delta(\vec{x}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

die Stromverteilung  $\vec{i}$  schliesslich

$$\vec{i} = c \text{rot} \vec{B} = -c\vec{m} \wedge \vec{\nabla} \delta.$$

Beachte, dass der erste Term in (2.15) identisch ist mit dem  $\vec{E}$ -Feld eines elektrischen Dipols  $\vec{p} = \vec{m}$  (vgl. (1.14)). So versteht man, dass die ursprüngliche Vorstellung (Michell, Coulomb), magnetische Dipole bestünden aus magnetischen Ladungen, das  $\vec{B}$ -Feld (fast) korrekt zu beschreiben vermag: der Unterschied,  $\vec{m}\delta(\vec{x})$ , manifestiert sich nur im Innern des Magneten. Ampère nahm deshalb an, dass magnetische Dipole nur in Form von Kreisströmen existieren (Ampèresche Molekularströme): der Magnetismus wurde auf die Bewegung von Ladungen zurückgeführt. Das magnetische Moment eines quantenmechanischen Spins passt in dieses Bild bis auf die Tatsache, dass es für Elektronen doppelt so gross ist als klassisch erwartet.

Für eine kontinuierliche Magnetisierung  $\vec{M}(\vec{y})$  ist

$$\vec{A}(\vec{x}) = \text{rot} \int d^3y \frac{\vec{M}(\vec{y})}{4\pi|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\text{rot} \vec{M}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

was nach (2.8) einer äquivalenten Stromdichte  $\vec{i} = c \text{rot} \vec{M}$  entspricht.

- Oberflächenstrom: Fläche  $S$ , Flächenstromdichte  $\vec{J}(\vec{y})$ . Stromdichte:

$$\vec{i}(\vec{x}) = \int_S d\vec{o} \vec{J}(\vec{y}) \delta(\vec{x} - \vec{y}).$$

Für die einseitigen Randwerte  $\vec{B}_i$ ,  $i = 1, 2$  zur Fläche  $S$  (s. Fig. auf S. 4) gilt nach (2.11)

$$\left( \int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n} d\vec{o} \right) \Big|_1^2 = 0$$

für jede Fläche  $S' \subset S$ , also

$$\vec{B}_i \cdot \vec{n} \Big|_1^2 = 0. \quad (2.16)$$

Andererseits gilt

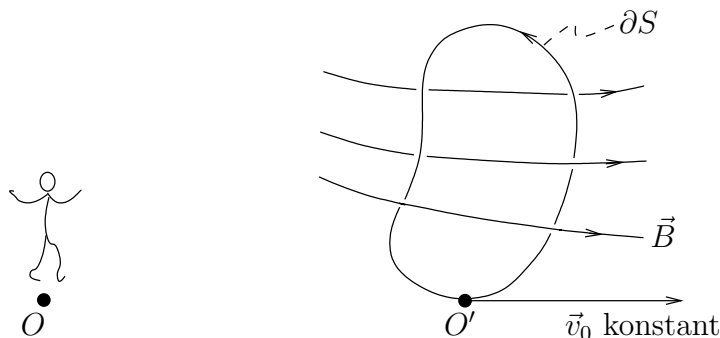
$$\left( \int_{\gamma} \vec{B}_i \cdot d\vec{s} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{c} \int_{\gamma} \vec{J} \cdot (\vec{n} \wedge d\vec{s}),$$

da die Normale zu der durch  $\gamma^{(2)} - \gamma^{(1)}$  berandeten Fläche  $\vec{n} \wedge \dot{\vec{s}}$  ist ( $\dot{\vec{s}}$ : Tangentialvektor zu  $\gamma$ ). Also  $\vec{B}_i \cdot \vec{t} \Big|_1^2 = c^{-1} (\vec{J} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{t}$  für  $\vec{t}$  tangential zu  $S$ , bzw.

$$\vec{n} \wedge \vec{B}_i \Big|_1^2 = \frac{1}{c} \vec{J}.$$

### 3. Elektrodynamik

Die **Zeit** tritt erstmals im Induktionsgesetz auf. Faraday bemerkte, dass in der Spule während der Bewegung ein Strom fließt: induziert wird eine "elektromotorische Kraft".



Laborsystem  $O$ , Ruhesystem  $O'$  der Spule: Setzen wir das **klassische Relativitätsprinzip** voraus (wir werden es später verwerfen!), so gilt

$$\begin{aligned} \vec{x}' &= \vec{x} - \vec{v}_0 t, \\ \vec{v}' &= \vec{v} - \vec{v}_0, \\ \vec{F}' &= \vec{F} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \right) \end{aligned}$$

für den Ort und die Geschwindigkeit eines Teilchens, bzw. für die Lorentz-Kraft darauf. Postuliert man noch  $e' = e$ , so folgt

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{\vec{v}_0}{c} \wedge \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B}. \quad (2.17)$$

Wir wollen annehmen

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{x}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{x}), \quad (2.18)$$

d.h.  $\vec{E}, \vec{B}$  seien zeitlich unabhängige Felder, für welche die bisherigen Feldgleichungen (1.7, 1.8; 2.9, 2.10) gelten. Das Transformationsverhalten (2.17) betrifft Felder, d.h. etwa

$$\vec{B}'(\vec{x}', t) = \vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}(\vec{x}' + \vec{v}_0 t),$$

wodurch

$$\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} = (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}.$$

Damit ist die elektromotorische Kraft längs  $\partial S$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \vec{E}' \cdot d\vec{s}' &= \int_{\partial S} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}_0}{c} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{s} = \int_S \underbrace{\text{rot} \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}_0}{c} \wedge \vec{B} \right)}_{=0} \cdot d\vec{\sigma} \\ &= \frac{1}{c} \int_S \left( \underbrace{(\text{div} \vec{B})}_{=0} \vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} \right) \cdot d\vec{\sigma} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t} \cdot d\vec{\sigma}' = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_S \vec{B}' \cdot d\vec{\sigma}'. \end{aligned}$$

Faraday (1831) fand dieses sogenannte **Induktionsgesetz** auf empirischem Wege (bis auf den Faktor  $1/c$ ), und zwar gilt es auch, falls es kein Laborsystem mit (2.18) gibt. In einer Notation ohne Striche ist es äquivalent zur Feldgleichung

$$\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

die erstmals  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  miteinander verknüpft.

Die Vollendung der Elektrodynamik ist das Werk Maxwells: sein "Treatise on Electricity and Magnetism" erschien 1873. Sie besteht in einer Ergänzung des Ampèreschen Gesetzes (2.10):

$$\text{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \left( \vec{i} + \underbrace{\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}} \right). \quad (2.19)$$

Maxwellscher Verschiebungsstrom

Dadurch wird die Ladungserhaltung gerettet! Ohne Verschiebungsstrom folgt ja  $\text{div} \vec{i} = 0$ , was nur für Gleichstrom richtig ist. Nach (2.19) ist nun

$$\text{div} \vec{i} = -\frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

wegen (1.8): wir erhalten die Kontinuitätsgleichung (2.6).

Wir fassen nun die endgültigen Feldgleichungen zusammen

$\text{div} \vec{B} = 0$	Homogene
$\text{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	Maxwell-Gleichungen
$\text{div} \vec{E} = \rho$	Inhomogene
$\text{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{i}}{c}$	Maxwell-Gleichungen

Als Folge davon gilt (2.6): Die Kontinuitätsgleichung ist eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit der Maxwell-Gleichung nach  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  (Integrabilitätsbedingung).

Dazu kommen die elektromagnetischen Kräfte, bzw. Kraftdichten

$$\begin{aligned}\vec{F} &= e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}), \\ \vec{f} &= \rho\vec{E} + \frac{\vec{i}}{c} \wedge \vec{B}\end{aligned}\tag{2.20}$$

auf Punktladungen, bzw. Ladungs- und Stromverteilungen.

Die für die ganze Physik revolutionären Konsequenzen dieser Theorie wollen wir hier andeutungsweise vorwegnehmen:

- Es tritt ein neues physikalisches System auf: das **freie elektromagnetische Feld** (Licht). Seine Bewegungsgleichungen sind die Maxwell-Gleichungen mit  $\rho = 0$ ,  $\vec{i} = 0$ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{rot } \vec{B}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E}\tag{2.21}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\text{div } \vec{E} = \text{div } \vec{B} = 0,\tag{2.22}$$

die mit (2.21) verträglich sind. Mit der Identität  $\text{rot rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \text{div } \vec{E} - \Delta \vec{E}$  folgt daraus die Wellengleichung

$$\begin{aligned}\square \vec{E} &= \square \vec{B} = 0, \\ \square &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\end{aligned}\tag{2.23}$$

(d'Alembert-Operator).  $c$  entpuppt sich als die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts. Die Optik ist fortan ein Zweig der Elektrodynamik.

- Es gibt keine instantane Fernwirkung mehr zwischen zwei geladenen Teilchen im Abstand  $r$ . Die Wirkung ist gegenüber der Ursache um die Laufzeit des Lichts  $r/c$  verzögert. Die Möglichkeit eines kausalen Zusammenhangs zwischen zwei Ereignissen hängt von **Zeit und Ort** ab: dies führt auf die Raum-Zeit - Struktur der speziellen Relativitätstheorie und zu einer neuen Mechanik.

- Da Energie, Impuls und Drehimpuls durch das Feld nicht instantan übertragen werden, können die Erhaltungssätze nur gelten, wenn das Feld selber solche Größen trägt. Wir illustrieren dies am Beispiel der Energie: Aus der Identität

$$\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

und den Maxwell-Gleichungen folgt

$$\text{div } c(\vec{E} \wedge \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \left( \vec{i} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \text{div } c(\vec{E} \wedge \vec{B}) + \vec{i} \cdot \vec{E} = 0,$$



oder integriert über  $V \subset \mathbb{R}^3$ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d^3x = - \int_{\partial V} c(\vec{E} \wedge \vec{B}) d\vec{\sigma} - \int_V \vec{i} \cdot \vec{E} d^3x . \quad (2.24)$$

Der letzte Term ist die im Gebiet  $V$  pro Zeiteinheit auf die Ladungsträger übertragene Energie, denn für eine Punktladung (2.13) in  $V$  (dank Superposition genügt es, diesen Fall zu betrachten) beträgt er  $e\vec{v} \cdot \vec{E}$ , was der Leistung der Lorentz-Kraft (2.20)

$$\vec{v} \cdot \left( e\vec{E} + \frac{e}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right) = e\vec{v} \cdot \vec{E}$$

entspricht. Wir definieren deshalb:

$$\begin{aligned} u &:= \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) && \text{Energiedichte des Feldes,} \\ \vec{S} &:= c(\vec{E} \wedge \vec{B}) && \text{Energistromdichte des Feldes (Poynting-Vektor).} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Gl. (2.24) besagt dann, dass sich die Feldenergie im Gebiet  $V$  nur ändern kann, indem entweder Energie durch die Oberfläche  $\partial V$  strömt oder auf Ladungen in  $V$  übertragen wird. Die Gesamtenergie von Feld und Materie bleibt damit erhalten.

#### 4. Elektromagnetische Potentiale

Äquivalent zu den homogenen Maxwell-Gleichungen ist die Darstellung des Feldes durch die **elektromagnetische Potentiale**  $\varphi(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{A}(\vec{x}, t)$ :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.26)$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} \square\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) &= \rho, \\ \square\vec{A} + \vec{\nabla} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right) &= \frac{\vec{i}}{c}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Potentiale sind dabei nur bestimmt bis auf **Eichtransformationen**

$$\varphi \longrightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \quad (2.28)$$

mit einem beliebigen skalaren Feld  $\chi(\vec{x}, t)$ . Etwas eindeutiger werden sie durch die Forderung einer Eichbedingung, z.B. eine der folgenden:

**Lorenz-Eichung**

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} = 0. \quad (2.29)$$

**Coulomb-Eichung**

$$\text{div } \vec{A} = 0. \quad (2.30)$$

Ausgehend von  $\varphi', \vec{A}'$ , lässt sie sich erreichen durch Lösen von

$$\square\chi = \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} + \text{div } \vec{A}', \quad \left| \quad \Delta\chi = -\text{div } \vec{A}', \right.$$

d.h. es verbleiben Eichtransformationen mit

$$\square\chi = 0 \quad \Bigg| \quad \Delta\chi = 0 .$$

Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen (2.27) nehmen dann eine einfachere Form an:

$$\begin{array}{l} \square\varphi = \rho , \\ \square\vec{A} = \frac{\vec{i}}{c} . \end{array} \quad (2.31) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} \Delta\varphi = -\rho , \\ \square\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = \frac{\vec{i}}{c} . \end{array} \quad (2.32)$$

Bei Coulomb-Eichung kann man, wie im statischen Fall (1.5), die Lösung der ersten Gleichung (2.32) als

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

wählen. Im Spezialfall  $\rho \equiv 0$  ist dann  $\varphi \equiv 0$ , so dass die Lorenz-Eichung auch noch erfüllt ist.

### 3. Das freie Feld

---

#### 1. Ebene Wellen

In der Coulomb–Eichung (2.30) lauten die Maxwell–Gleichungen (2.32) für das freie Feld ( $\rho = 0, \vec{t} = 0$ )

$$\varphi = 0, \quad \square \vec{A} = 0.$$

Ebene Wellen sind Lösungen der Form

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{e} \cdot \vec{x} - ct), \quad (|\vec{e}| = 1)$$

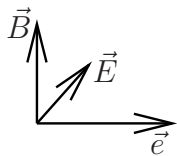
mit einer Vektorfunktion  $\vec{f}(s)$  einer Variablen. Die Eichbedingung (2.27)

$$0 = \operatorname{div} \vec{A} = \vec{e} \cdot \vec{f}', \quad (' = \frac{d}{ds})$$

besagt:  $\vec{f}' \perp \vec{e}$ . Die elektromagnetischen Felder (2.26)

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} = \vec{f}'(\vec{e} \cdot \vec{x} - ct), \\ \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{f} = \vec{e} \wedge \vec{f}'(\vec{e} \cdot \vec{x} - ct) = \vec{e} \wedge \vec{E} \end{aligned} \quad (3.1)$$

sind transversal zur Fortpflanzungsrichtung  $\vec{e}$ . So gibt jede zu  $\vec{e}$  transversale Funktion  $\vec{f}'$  Anlass zu einer ebenen Welle, in der stets:



$$\begin{aligned} |\vec{E}| &= |\vec{B}|, \\ (\vec{e}, \vec{E}, \vec{B}) &: \text{orthogonales Rechtskreuz.} \end{aligned}$$

Der Poynting–Vektor

$$\vec{S} = c \vec{E} \wedge \vec{B} = c(\vec{E}^2)\vec{e} = c(\vec{B}^2)\vec{e} \quad (3.2)$$

zeigt in die Fortpflanzungsrichtung. Man überprüft auch ohne Verwendung der Potentiale, dass (3.1) die Gleichungen (2.21, 2.22) des freien elektromagnetischen Feldes erfüllt. Für **monochromatische Felder** ist speziell  $\vec{f}'(s) = \vec{E}_0 e^{i\omega s/c}$ , d.h.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \vec{e} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit Frequenz  $\omega > 0$  und Wellenvektor  $\vec{k} = (\omega/c)\vec{e}$ . Die komplexe Amplitude

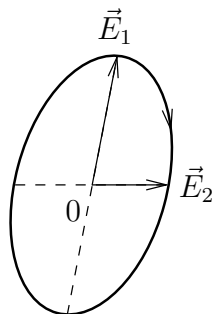
$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2, \quad (\vec{E}_{1,2} \text{ reell})$$

ist beliebig im 2–dimensionalen komplexen Raum

$$\vec{e}^\perp = \{\vec{E}_0 \in \mathbb{C}^3 \mid \vec{E}_0 \cdot \vec{e} = 0\}$$

der zu  $\vec{e}$  transversalen Vektoren. Das Rechnen mit komplexen Feldern ist legitim: da die linearen Feldgleichungen reelle Koeffizienten haben, sind Real– und Imaginärteil einer

Lösung wieder Lösungen. Wir fassen den Realteil als das physikalische Feld auf. Die **Polarisation** der Welle wird beschrieben durch die Bahn des Vektors  $\text{Re } \vec{E}(\vec{x}, t)$  in einem festen Raumpunkt, z.B.  $\vec{x} = 0$ :



$$\text{Re } \vec{E}(0, t) = \vec{E}_1 \cos \omega t + \vec{E}_2 \sin \omega t . \quad (3.4)$$

(Ellipse)

Spezialfälle:

- $\vec{E}_1 \parallel \vec{E}_2$ : lineare Polarisation
- $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2, |\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$ : zirkulare Polarisation, und zwar  
 $\vec{E}_2 = \pm \vec{e} \wedge \vec{E}_1$ : rechts, bzw. links zirkulare Polarisation  
 (bzgl. der Fortpflanzungsrichtung)

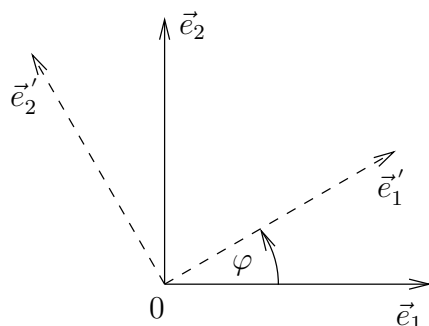
Durch Wahl einer Basis  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  in  $\vec{e}^\perp$  kann jede monochromatische Welle als Superposition von zwei ausgewählten Polarisationsfällen dargestellt werden. Die Basis sei orthonormiert im Sinne des Skalarproduktes

$$(\vec{E}, \vec{F}) = \overline{\vec{E}} \cdot \vec{F} = (\vec{E}_1 - i \vec{E}_2) \cdot (\vec{F}_1 + i \vec{F}_2) . \quad (3.5)$$

Die Zerlegung ist dann

$$\vec{E}_0 = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \vec{e}_i , \quad \alpha_i = (\vec{e}_i, \vec{E}_0) . \quad (3.6)$$

In den folgenden Beispielen ist  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \equiv \vec{e})$  eine reelle, orthonormierte, positiv orientierte Basis in  $\mathbb{R}^3$ . Solche Basen gehen unter Drehungen um die  $\vec{e}$ -Achse ineinander über:



$$\begin{aligned} \vec{e}'_1 &= \cos \varphi \cdot \vec{e}_1 + \sin \varphi \cdot \vec{e}_2 , \\ \vec{e}'_2 &= -\sin \varphi \cdot \vec{e}_1 + \cos \varphi \cdot \vec{e}_2 . \end{aligned} \quad (3.7)$$

1.  $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1, \vec{e}'_2 = \vec{e}_2$

Dann ist (3.6) die Zerlegung in zwei zueinander senkrecht linear polarisierte Wellen. Diese Zerlegung ist gemäss (3.7) nicht rotationsinvariant.

2.  $\vec{e}'_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 \pm i\vec{e}_2)$

Dann ist (3.6) die Zerlegung in eine rechts (+) und eine links (-) zirkular polarisierte Welle. Sie ist rotationsinvariant, denn unter der Drehung (3.7) ist

$$\vec{e}'_{\pm} = e^{\mp i\varphi} \vec{e}_{\pm} , \quad \alpha'_{\pm} = e^{\pm i\varphi} \alpha_{\pm} ,$$

also  $\alpha'_\pm \vec{\varepsilon}'_\pm = \alpha_\pm \vec{\varepsilon}_\pm$ .

Um die Energiestromdichte der Welle (3.3) auszurechnen, muss man zuerst zu den reellen Feldern übergehen, denn  $\vec{S}$  ist nicht linear in den Feldstärken. Für den Betrag  $S = |\vec{S}|$  der Energiestromdichte im Punkt  $\vec{x} = 0$  findet man aus (3.2, 3.4)

$$S(t) = c(\vec{E}_1^2 \cos^2 \omega t + \vec{E}_2^2 \sin^2 \omega t + \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \sin 2\omega t) .$$

Die **Intensität**  $I$  ist definiert als das Zeitmittel von  $S(t)$ :

$$I = \frac{c}{2}(\vec{E}_1^2 + \vec{E}_2^2) = \frac{c}{2}(\vec{E}_0, \vec{E}_0) .$$

Damit erhält das Skalarprodukt (3.5) eine physikalische Bedeutung. Bei der Zerlegung (3.6) in einer orthonormierten Polarisationsbasis sind die Intensitäten additiv:

$$I = \frac{c}{2} (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2) .$$

## 2. Dynamik des freien Feldes

Wir lösen das Anfangswertproblem der skalaren Wellengleichung  $\square u = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} u(\vec{x}, 0) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{x}, 0) \end{array} \right\} \longrightarrow u(\vec{x}, t) . \quad (3.8)$$

Damit ist auch das Anfangswertproblem für das freie Feld (2.21) gelöst,

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{x}, 0) \\ \vec{B}(\vec{x}, 0) \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) \end{array} \right.$$

wobei die linke Seite der Nebenbedingung (2.22) genügen muss. Durch (2.21) sind nämlich

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(\vec{x}, 0) , \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\vec{x}, 0)$$

und somit die Anfangsdaten für (2.23) bekannt. Ausgangspunkt ist die allgemeine kugelsymmetrische Lösung von  $\square u = 0$ , die wir in der Form

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} f(r, t) , \quad (r = |\vec{x}|)$$

ansetzen. Für solche Funktionen ist

$$\Delta u = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r u - 4\pi \delta(\vec{x}) f(0, t) , \quad (3.9)$$

sodass  $f(r, t)$  eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0 , \quad (0 < r < \infty)$$

sein muss. Im Gebiet  $0 < r < \infty$  wäre die allgemeine Lösung

$$f(r, t) = g(ct - r) + h(ct + r)$$

mit beliebigen Funktionen  $g, h$ . Für (3.8) kommen wegen (3.9) nur Lösungen mit  $f(0, t) = 0$  in Betracht. Also:  $h = -g$  und

$$u(\vec{x}, t) = \frac{1}{r} [g(ct - r) - g(ct + r)] .$$

Die Distributionslösung

$$D(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} [\delta(ct - r) - \delta(ct + r)] \quad (3.10)$$

gehört zu den Anfangsdaten

$$D(\vec{x}, 0) = 0 , \quad \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x}, 0) = \delta(\vec{x}) , \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\vec{x}, 0) = 0 . \quad (3.11)$$

Zum Beweis fasse man  $D(\vec{x}, t)$  auf als Distribution in  $\vec{x}$  zu festem  $t$ . Für jede Testfunktion  $f(\vec{x})$  ist dann

$$D(f, t) \equiv \int d^3x f(\vec{x}) D(\vec{x}, t) = \frac{ct}{4\pi} \int_{\Omega} d^2e f(c|t|\vec{e}) = \frac{ct}{4\pi} \int_{\Omega} d^2e f(ct\vec{e}) ,$$

wobei  $\Omega = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{e}| = 1\}$  die Einheitskugel ist; der letzte Ausdruck folgt durch Substitution  $\vec{e} \rightarrow -\vec{e}$  und zeigt, dass  $D(f, t)$  Ableitungen in  $t$  aller Ordnungen hat.  $D(f, t)$  ist ungerade in  $t$ , also gilt

$$D(f, 0) = \frac{d^2 D}{dt^2}(f, 0) = 0 .$$

Ferner ist

$$\frac{1}{c} \frac{dD}{dt}(f, 0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} d^2e f(0) = f(0) .$$

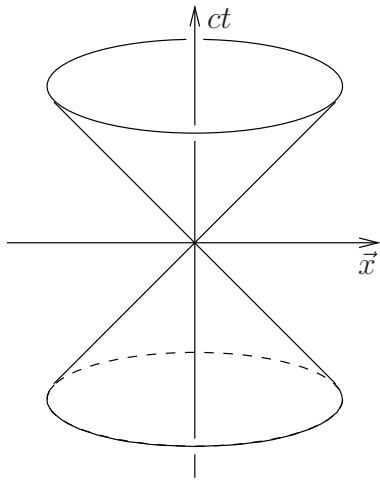
Dies beweist (3.11). Mit der Grundlösung (3.10) lässt sich nun das Anfangswertproblem (3.8) lösen durch

$$u(\vec{x}, t) = \int d^3y \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x} - \vec{y}, t) u(\vec{y}, 0) + D(\vec{x} - \vec{y}, t) \frac{1}{c} \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{y}, 0) \right] . \quad (3.12)$$

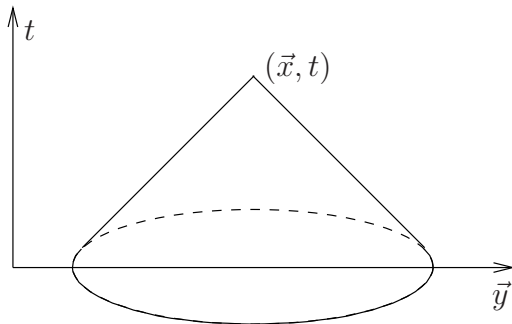
$\square u = 0$  folgt aus  $\square D = \square \partial D / \partial t = 0$  und die Anfangswerte stimmen wegen (3.11). Nach Ausintegration der  $\delta$ -Funktionen in (3.10) lautet sie

$$u(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=c|t|} do u(\vec{y}, 0) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|\vec{y}-\vec{x}|=c|t|} do \frac{\partial u}{\partial t}(\vec{y}, 0) .$$

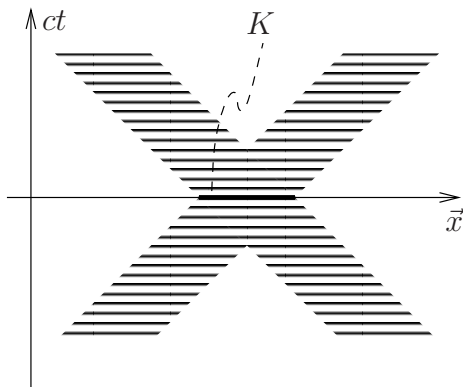
Die Lösung (3.12) bringt die geometrische Charakteristik der Wellenausbreitung zum Ausdruck:



Der Träger der Grundlösung  $D(\vec{x}, t)$  ist der **Lichtkegel**  $c^2t^2 - \vec{x}^2 = 0$ .



Für gegebenes  $(\vec{x}, t)$  hängt  $u(\vec{x}, t)$  nur ab von den Anfangswerten in den Punkten  $\vec{y}$  auf der Kugel  $|\vec{y} - \vec{x}| = c|t|$ .



Falls die Anfangswerte einen kompakten Träger  $K \subset \mathbb{R}^3$  haben, so ist die Wellenausbreitung auf das schraffierte Raum-Zeit Gebiet beschränkt.

Diese Figuren illustrieren die Aussage:  $c$  ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts.

Die Eindeutigkeit der Lösung von (2.21, 2.22) ergibt sich aus dem Energiesatz (2.24): Für verschwindende Anfangswerte folgt aus der Erhaltung von

$$\int d^3x \left[ \vec{E}(\vec{x}, t)^2 + \vec{B}(\vec{x}, t)^2 \right] = 0,$$

dass  $\vec{E}(\vec{x}, t) \equiv \vec{B}(\vec{x}, t) \equiv 0$ .

## 4. Die Erzeugung elektromagnetischer Wellen

### 1. Lösung der inhomogenen Wellengleichung

Wir konstruieren eine spezielle Lösung der Maxwell-Gleichungen zu vorgegebenen  $\rho(\vec{x}, t)$ ,  $\vec{i}(\vec{x}, t)$  die der Kontinuitätsgleichung (2.6) genügen. In der Lorenz-Eichung (2.29) lauten die Gleichungen

$$\square\varphi = \rho, \quad \square\vec{A} = \frac{\vec{i}}{c}. \quad (4.1)$$

Der auslaufende Teil

$$D_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(ct - r), \quad (r = |\vec{x}|),$$

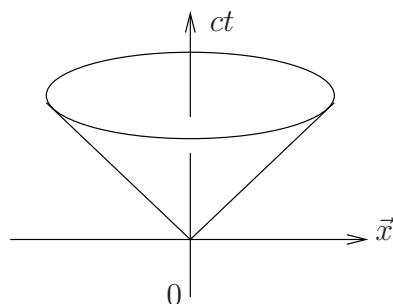
der freien Kugelwelle (3.10) ist eine Greensche Funktion des d'Alembert-Operators, d.h. eine Lösung von

$$\square D_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \delta(\vec{x}) \delta(t). \quad (4.2)$$

Verwendet man Raum-Zeit-Koordinaten  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (ct, \vec{x})$ , so lautet dies

$$\square D_{\text{ret}}(x) = \delta(x),$$

wobei rechts die  $\delta$ -Distribution in vier Dimensionen steht.



$D_{\text{ret}}$  hat als Träger den Vorwärts-Lichtkegel und entspricht einer bei  $x = 0$  ausgelösten Kugelwelle.

Zum Beweis von (4.2) erinnern wir zunächst daran, dass  $D(f, t)$  glatt in  $t$  ist, womit  $(\partial^n D / \partial t^n)(\vec{x}, t) \delta(t) = (\partial^n D / \partial t^n)(\vec{x}, 0) \delta(t)$  eine wohldefinierte Distribution auf  $\mathbb{R}^4$  ist. Insbesondere ist nach (3.11)

$$D(\vec{x}, t) \delta(t) = 0, \quad \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t}(\vec{x}, t) \delta(t) = \delta(\vec{x}) \delta(t).$$

Somit folgt für  $D_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = D(\vec{x}, t) \theta(t)$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial D_{\text{ret}}}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \theta, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D_{\text{ret}}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} \theta + \frac{1}{c} \delta(\vec{x}) \delta(t).$$

Zusammen mit  $\Delta D_{\text{ret}} = (\Delta D) \theta$  und  $\square D = 0$  folgt die Behauptung.

Eine spezielle Lösung von (4.1) lautet somit

$$\varphi(x) = \int d^4 y D_{\text{ret}}(x - y) \rho(y), \quad \vec{A}(x) = \frac{1}{c} \int d^4 y D_{\text{ret}}(x - y) \vec{i}(y).$$



Wegen der Kontinuitätsgleichung (2.6) erfüllt sie die Lorenz-Eichung (2.29). Nach Integration der  $\delta$ -Funktion lautet sie

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\rho(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{|\vec{x}-\vec{y}|},$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi c} \int d^3y \frac{\vec{i}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

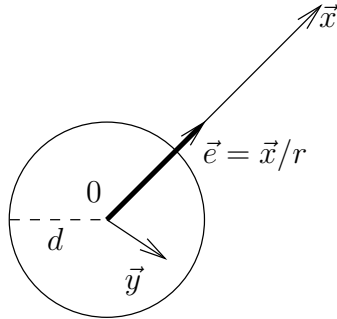
(**retardierte Potentiale**). Der Unterschied zu den statischen Formeln (1.5) und (2.8) für  $\varphi$  und  $\vec{A}$  besteht in der Retardierung: eine Änderung von  $\rho$  oder  $\vec{i}$  an der Stelle  $\vec{y}$  wirkt sich erst nach der Zeit  $|\vec{x}-\vec{y}|/c$  auf das Feld an der Stelle  $\vec{x}$  aus.

Der einlaufende Teil

$$D_{\text{av}}(x) = \frac{1}{4\pi r} \delta(x^0 + r) = D_{\text{ret}}(-x)$$

der freien Kugelwelle (3.10) ist ebenfalls eine Greensche Funktion des d'Alembert-Operators, und die entsprechenden **avancierten Potentiale** eine spezielle Lösung von (4.1). Die retardierten (bzw. avancierten) Potentiale liegen in der kausalen Zukunft (bzw. Vergangenheit) der Quellen  $\rho$ ,  $\vec{i}$ . Also bringen erstere die Einsicht zum Ausdruck, dass die Quellen die **Ursachen** der Felder sind. Diese Kausalitätsforderung ist mit den Maxwell-Gleichungen vereinbar, aber keine Folgerung derselben. Diese zeichnen keine Zeitrichtung aus.

## 2. Ausstrahlung



Wir betrachten eine Ladungs- und Stromverteilung im Gebiet  $|\vec{y}| < d$ . Im statischen Fall fallen die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  für  $r \rightarrow \infty$  mindestens ab wie  $r^{-2}$ , bzw.  $r^{-3}$ . Im zeitabhängigen Fall bewirkt die Retardierung, dass  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  nur wie  $r^{-1}$  abfallen: der Energiefluss in ein festes Raumwinkelelement wird konstant für  $r \rightarrow \infty$  (Ausstrahlung). Um die Glieder  $\sim r^{-1}$  von  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  zu finden, schreibt man

$$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{1}{r} \left( 1 + O\left(\frac{d}{r}\right) \right), \quad (r = |\vec{x}|),$$

sodass

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \int d^3y \rho\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right),$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r c} \int d^3y \vec{i}\left(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right),$$
(4.3)

sofern

$$r \gg d. \quad (4.4)$$

Auf (4.3) operiert  $\vec{\nabla}$  wie

$$-\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \cong -\frac{\vec{e}}{c} \frac{\partial}{\partial t},$$

falls er auf  $\rho$  oder  $\vec{v}$  wirkt, und wie Multiplikation mit  $-\vec{x}/r^2$ , falls er auf  $r^{-1}$  wirkt. Der erste Beitrag überwiegt falls  $\omega/c \gg r^{-1}$ , wobei  $\omega$  eine typische inverse Zeit ist, über welche  $\rho, \vec{v}$  eine relative Änderung der Ordnung 1 erfahren. Im zeitlich harmonischen Fall ( $\rho, \vec{v} \sim e^{-i\omega t}$ ) bedeutet dies

$$r \gg \lambda, \quad (4.5)$$

wobei  $\lambda = 2\pi c/\omega$  die Lichtwellenlänge zur Frequenz  $\omega$  ist. Unter den Bedingungen (4.4, 4.5) ist also

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = -\vec{e} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

und unter der Benützung von (2.29)

$$\vec{E} = \vec{e} \underbrace{\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{-\text{div } \vec{A} = \vec{e} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{e} \wedge \left( \vec{e} \wedge \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\vec{e} \wedge \vec{B}.$$

In Ordnung  $r^{-1}$  sind also  $\vec{E}, \vec{B}$  vollständig bestimmt durch die Transversalkomponente von  $\vec{A}$  (Komponente  $\perp \vec{e}$ ), und  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{e}$  verhalten sich lokal wie in einer ebenen Welle der Fortpflanzungsrichtung  $\vec{e}$ . Das durch (4.4, 4.5) charakterisierte Gebiet heisst deshalb **Wellenzone**. Insbesondere ist dort der Energiefluss radial:

$$\vec{S} = c(\vec{E}^2)\vec{e} = c(\vec{B}^2)\vec{e}.$$

Wir betrachten nun weiter den Fall, wo

$$d \ll \lambda,$$

der insbesondere in der Atomphysik eintritt (Atomdurchmesser  $d \approx 10^{-9}\text{m}$ , optische Wellenlänge  $\lambda \approx 10^{-6}\text{m}$ ). Mit

$$|\vec{x} - \vec{y}| = r - \vec{e} \cdot \vec{y} + O\left(\frac{d^2}{r}\right)$$

gilt für das Vektorpotential (4.3)

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r c} \int d^3 y \vec{v}\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{y}}{c}\right), \quad (4.6)$$

denn in der Zeit  $O(d^2/rc)$  ist die relative Änderung von  $\vec{v}$  von der Ordnung

$$\frac{d^2}{rc} \cdot \omega \approx \frac{d^2}{r\lambda} \ll 1.$$

In (4.6) können wir uns dann mit den niedrigsten Gliedern der Taylorreihe

$$\vec{v}\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{e} \cdot \vec{y}}{c}\right) = \vec{v}\left(y, t - \frac{r}{c}\right) + (\vec{e} \cdot \vec{y}) \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\left(y, t - \frac{r}{c}\right) + \dots \quad (4.7)$$

begnügen.

- Elektrische Dipolstrahlung: Der Beitrag des ersten Terms in (4.7) zu  $\vec{A}$  ist

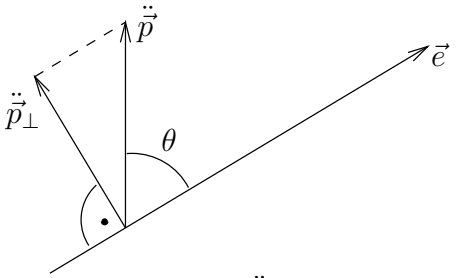
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi r c} \int d^3 y \vec{v}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) = \frac{1}{4\pi r c} \dot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$$

mit dem elektrischen Dipolmoment

$$\vec{p}(t) = \int d^3 y \vec{y} \rho(\vec{y}, t),$$

denn für jeden festen Vektor  $\vec{n}$  folgt aus  $\vec{n} = \vec{\nabla}_y (\vec{n} \cdot \vec{y})$  und der Kontinuitätsgleichung (2.6)

$$4\pi r c \vec{n} \cdot \vec{A} = \int d^3 y (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) (\vec{n} \cdot \vec{y}) = - \int d^3 y (\vec{n} \cdot \vec{y}) \operatorname{div} \vec{v} = \vec{n} \cdot \dot{\vec{p}}.$$



Das zugehörige Feld (in Ordnung  $r^{-1}$ ) ist

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi r c^2} \underbrace{\vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \ddot{\vec{p}})}_{-\ddot{\vec{p}}_{\perp}}, \quad (4.8)$$

$$\vec{B} = \vec{e} \wedge \vec{E},$$

wobei  $\ddot{\vec{p}} = \ddot{\vec{p}}(t - \frac{r}{c})$  zur retardierten Zeit zu nehmen ist. Die Energiestromdichte ist radial mit Betrag

$$S(\theta) = \frac{1}{16\pi^2 r^2 c^3} \ddot{\vec{p}}^2 \sin^2 \theta,$$

(links: Polardiagramm dazu). Die total abgestrahlte Leistung beträgt

$$W = \frac{\ddot{\vec{p}}^2}{16\pi^2 c^3} \underbrace{\int d\Omega \sin^2 \theta}_{8\pi/3} = \frac{1}{6\pi c^3} \ddot{\vec{p}}^2.$$

Im zeitlich harmonischen Fall ist  $W \propto \omega^4$ .

Den zweiten Term in (4.7) zerlegen wir gemäss

$$(\vec{e} \cdot \vec{y}) \vec{v} = -\frac{1}{2} \vec{e} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{v}) + \frac{1}{2} [(\vec{e} \cdot \vec{y}) \vec{v} + (\vec{e} \cdot \vec{v}) \vec{y}]. \quad (4.9)$$

- Magnetische Dipolstrahlung: Der Beitrag des ersten Teils in (4.9) zu  $\vec{A}$  ist  $\vec{A}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi r c} \vec{e} \wedge \dot{\vec{m}}(t - \frac{r}{c})$ , wobei

$$\vec{m}(t) = \frac{1}{2c} \int d^3 y \vec{y} \wedge \vec{v}(\vec{y}, t)$$

das **magnetische Dipolmoment** ist. Das entsprechende Feld ist

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi r c^2} \underbrace{\vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \ddot{\vec{m}})}_{-\ddot{\vec{m}}_{\perp}}, \quad \vec{E} = -\vec{e} \wedge \vec{B}.$$

Es ist analog zur elektrischen Dipolstrahlung und geht aus (4.8) hervor durch die Substitution  $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{B}, -\vec{E}, \vec{m})$ . Wegen  $\vec{S} \rightarrow \vec{S}$  ist dabei die Ausstrahlung (bei gleichen Dipolmomenten) dieselbe.

• Elektrische Quadrupolstrahlung: Für den zweiten Teil in (4.9) gilt  $[(\vec{e} \cdot \vec{y}) \vec{v} + (\vec{e} \cdot \vec{v}) \vec{y}] \cdot \vec{n} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_y)(\vec{e} \cdot \vec{y})(\vec{n} \cdot \vec{y})$ . Somit ist sein Beitrag zu  $\vec{A}$

$$8\pi c^2 r \vec{n} \cdot \vec{A} = \int d^3 y \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{\nabla} \right) (\vec{e} \cdot \vec{y})(\vec{n} \cdot \vec{y}) = - \int d^3 y (\vec{n} \cdot \vec{y})(\vec{e} \cdot \vec{y}) \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\text{div } \vec{v}}_{-\partial \rho / \partial t},$$

d.h.

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{24\pi r c^2} \ddot{T}(t - \frac{r}{c}) \vec{e},$$

wobei die Komponenten des Tensors  $T(t)$  durch

$$T_{ij}(t) = 3 \int d^3 y y_i y_j \rho(\vec{y}, t)$$

gegeben sind. Benützt man stattdessen den elektrischen Quadrupoltensor (1.37)

$$Q = T - \frac{1}{3} (\text{tr } T) \mathbf{1},$$

so ist

$$\vec{A} = \frac{1}{24\pi r c^2} \left( \ddot{Q} \vec{e} + \frac{1}{3} (\text{tr } \ddot{T}) \vec{e} \right).$$

Da der zweite Term parallel zu  $\vec{e}$  ist, trägt er zu  $\vec{E}, \vec{B}$  in der Wellenzone nicht bei. Das Feld ist

$$\vec{B} = -\frac{1}{24\pi r c^3} \vec{e} \wedge \ddot{Q} \vec{e}, \quad \vec{E} = -\vec{e} \wedge \vec{B}$$

und die Energiestromdichte

$$S = \frac{1}{576\pi^2 r^2 c^5} \underbrace{(\vec{e} \wedge \ddot{Q} \vec{e})^2}_{\vec{e} \cdot \ddot{Q}^2 \vec{e} - (\vec{e} \cdot \ddot{Q} \vec{e})^2}.$$

Im Hauptachsensystem des Quadrupoltensors ist  $Q = \text{diag}(q_1, q_2, q_3)$ ,  $\vec{e} \cdot Q \vec{e} = \sum_i q_i e_i^2$  und

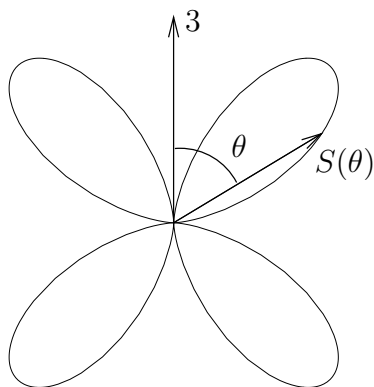
$$\int de (\vec{e} \cdot Q \vec{e})^2 = \sum_{i,j} q_i q_j \underbrace{\int de e_i^2 e_j^2}_{\frac{4\pi}{15} (1+2\delta_{ij})} = \frac{4\pi}{15} [(\underbrace{\text{tr } Q}_{=0})^2 + 2 \text{tr } Q^2].$$

Somit beträgt die total ausgestrahlte Leistung

$$W = \frac{4\pi}{576\pi^2 c^5} \left( \frac{1}{3} - \frac{2}{15} \right) \text{tr } \ddot{Q}^2 = \frac{1}{720\pi c^5} \text{tr } \ddot{Q}^2.$$

Beispiel: Um die 3-Achse rotationsymmetrische Ladungsverteilung. Dann ist

$$Q = \begin{pmatrix} -q & & \\ & -q & \\ & & 2q \end{pmatrix}, \quad \vec{e} \wedge \ddot{Q} \vec{e} = 3\ddot{q} (e_2 e_3, -e_1 e_3, 0),$$



$$S(\theta) = \frac{\ddot{q}^2}{64\pi^2 r^2 c^5} \underbrace{[(e_1 e_3)^2 + (e_2 e_3)^2]}_{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}.$$

Die verschiedenen Multipolfelder überlagern sich. Dabei sind die Energiestromdichten nicht additiv, es treten Interferenzterme auf. Man kann aber zeigen, dass die total abgestrahlte Leistung additiv ist.

Führt man die Entwicklung (4.7) weiter, so treten, wie in der Elektrostatik, sukzessive höhere Multipole auf, die wir hier nicht behandeln.

# 5. Das Relativitätsprinzip

---

## 1. Das klassische Relativitätsprinzip

Nach Festlegung der Einheiten von Länge und Zeit, kennzeichnen wir Ereignisse durch  $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^{1+3}$  mit

$t$ : Zeitkoordinate  
 $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ : kartesische Koordinaten.

Eine absolute, vom Bezugssystem unabhängige Bedeutung haben die Grössen

- $|t_1 - t_2|$ : Zeitabstand von zwei beliebigen Ereignissen  $(t_1, \vec{x}_1), (t_2, \vec{x}_2)$  (insbesondere: Gleichzeitigkeit ist absolut); (5.1)

- falls  $t_1 = t_2$ :  
 $|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|$ : Raumabstand von zwei gleichzeitigen Ereignissen. (5.2)

Die Koordinatentransformationen, die diese Grössen invariant lassen, sind

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & (\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R}), \\ \vec{x}' &= R(t)\vec{x} + \vec{b}(t), & (R(t) \in O(3), \vec{b}(t) \in \mathbb{R}^3), \end{aligned}$$

d.h. die räumlichen Bezugssysteme sind beliebig gegeneinander bewegt.

Physikalisch sind jedoch nicht alle diese Bezugssysteme gleichberechtigt. Die besondere Klasse der **Inertialsysteme** ist ausgezeichnet durch die Gültigkeit des Trägheitsgesetzes:

$$\ddot{\vec{x}} = 0 \tag{5.3}$$

für freie Teilchen. Die dann noch erlaubten Transformationen sind die **Galilei-Transformationen**

$$\begin{aligned} t' &= \lambda t + a, & (\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R}), \\ \vec{x}' &= R\vec{x} + \vec{v}t + \vec{b}, & (R \in O(3), \vec{v}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Das klassische Relativitätsprinzip verlangt, dass die Bewegungsgleichungen eines isolierten Systems, das keinen äusseren Einflüssen unterliegt, in jedem Inertialsystem gleich lauten, also forminvariant sind unter Galilei-Transformationen. Beispiel: Newtonsche Gleichungen eines  $N$ -Teilchensystems

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = \vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N), \quad (i = 1, \dots, N),$$

falls

$$\vec{F}_i(R\vec{x}_1 + \vec{a}, \dots, R\vec{x}_N + \vec{a}) = R\vec{F}_i(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$$

für alle  $R \in O(3)$ ,  $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ .

Durch die Elektrodynamik wird dieses Prinzip verletzt: das Gesetz der Lichtausbreitung

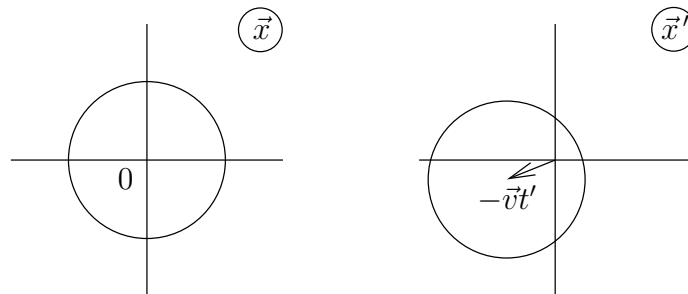
$$c^2(t_1 - t_2)^2 - |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 = 0 \tag{5.4}$$

charakterisiert zwei Ereignisse  $(t_1, \vec{x}_1)$  und  $(t_2, \vec{x}_2)$ , die durch ein Lichtsignal der festen Geschwindigkeit  $c$  verbunden werden können. Insbesondere ist sie unabhängig vom Bewegungszustand des Senders und von der Fortpflanzungsrichtung.

Das Gesetz ist nur noch invariant unter Galilei-Transformationen mit  $\vec{v} = 0$ . Zum Beispiel beschreibt  $|\vec{x}| = ct$  die Front einer vom Ereignis  $(0, 0)$  ausgehenden Lichtwelle. Unter der Galilei-Transformation

$$t' = t, \quad \vec{x}' = \vec{x} - \vec{v}t$$

behält das auslösende Ereignis die Koordinaten  $(0, 0)$ , aber die Wellenfront zur Zeit  $t = t'$  wird zur Kugel  $|\vec{x}' + \vec{v}t'| = ct'$  mit Mittelpunkt  $-\vec{v}t'$ :



Mechanik und Elektrodynamik zeichnen eine Klasse “ruhender” Bezugssysteme aus. Diese Vorstellung erschien solange natürlich, als man einen materiellen “Äther” als Träger des elektromagnetischen Feldes vermutete. Die Bewegung eines Inertialsystems relativ zum Äther liesse sich feststellen durch Abweichungen vom Gesetz (5.4) der Lichtausbreitung. Dies aber misslang (Michelson, Morley 1887).

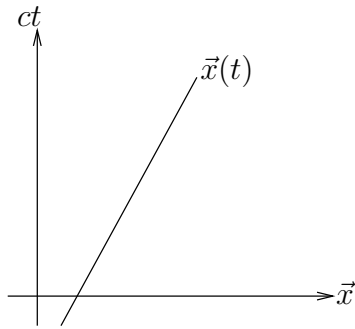
## 2. Das Einsteinsche Relativitätsprinzip

Einstein (1905) befreit sich obiger Auffassung von Raum und Zeit. Er gibt die Invarianten (5.1, 5.2) preis und führt ein neues Relativitätsprinzip ein:

- a) Definition: Inertialsysteme sind ausgezeichnet durch das Trägheitsgesetz (5.3) und das Gesetz (5.4) der Lichtausbreitung.
- b) Postulat: Es gibt Inertialsysteme. Die Gesetze der Mechanik und Elektrodynamik lauten in jedem Inertialsystem gleich.

Daraus ergibt sich folgendes Programm: (a) Bestimmung der Gruppe der Transformationen die (5.3) und (5.4) invariant lassen (Lorentz-Transformationen). (b) Relativistische (d.h. Lorentz-invariante) Formulierung der Mechanik und der Elektrodynamik. Dabei zeigt sich, dass die Maxwell-Gleichungen bei passender Transformation der Felder bereits Lorentz-invariant sind. Anders die Mechanik: Fernwirkungsgesetze (Bsp. Newtonsches Gravitationsgesetz) sind a priori nicht-relativistisch, da sie sich auf die klassischen Invarianten (5.1, 5.2) berufen, etwa auf den “Abstand zweier Körper zur gleichen Zeit”. An ihre Stelle tritt die Feldwirkung: eine relativistische Theorie wechselwirkender Teilchen muss das gekoppelte System Materie & Feld beschreiben.

### 3. Lorentz-Transformationen



Das Trägheitsgesetz (5.3) besagt, dass die Bewegung eines freien Teilchens mit Koordinaten  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x})$  durch eine Gerade gegeben ist. Die gesuchten Transformationen (bijektive Abbildungen  $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ) müssen deshalb geradentreu sein. Dies sind bloss die affinen Transformationen

$$x'^{\mu} = A^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}, \quad (5.5)$$

kurz:  $x' = Ax + a$ . Koordinatendifferenzen  $\xi = x - y$  transformieren dabei homogen

$$\xi' = A\xi \quad (5.6)$$

(Grössen, die so transformieren, heissen **4-er Vektoren**) und wegen (5.4) muss der **Lichtkegel**

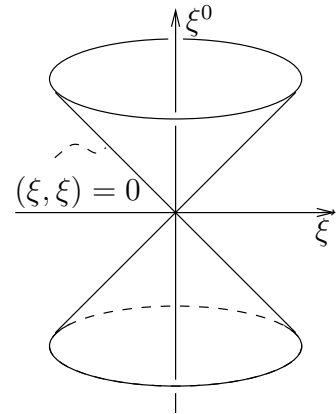
$$(\xi^0)^2 - \vec{\xi}^2 = 0$$

invariant sein. Die hier auftretende quadratische Form ist

$$(\xi, \xi) = g_{\mu\nu} \xi^{\mu} \xi^{\nu} = \xi^T g \xi$$

mit

$$g = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$



Man zeigt (s. S. 40), dass (5.4) unter (5.5) invariant bleibt genau, falls

$$A^T g A = \alpha g \quad (5.8)$$

für ein  $\alpha \neq 0$ . Tatsächlich ist  $\alpha > 0$ . Dies folgt aus dem Trägheitssatz für quadratische Formen, oder geometrisch:  $\alpha < 0$  würde bedeuten, dass unter (5.6) das (nicht zusammenhängende) Innere des Lichtkegels ( $(\xi, \xi) > 0$ ) mit dem (zusammenhängenden) Äusseren ( $(\xi, \xi) < 0$ ) vertauscht wird. Dies ist aber unmöglich, da (5.6) stetig ist.

Die Gruppe der Transformationen (5.5, 5.8) enthält die reinen Dilatationen

$$x \mapsto \lambda x, \quad (\lambda > 0),$$

die einer Änderung der Zeit- und Längeneinheiten entsprechen. Wegen  $\alpha > 0$  lässt sich jedes  $A$  eindeutig zerlegen in

$$A = \lambda \Lambda, \quad (\lambda > 0), \quad (5.9)$$

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (5.10)$$

Die durch (5.10) definierten Transformationen heissen **Lorentz-Transformationen** und bilden die **Lorentz-Gruppe**  $L$ . Beschränkt man sich auf Inertialsysteme mit **festen**



**Masstäben**, so folgt aus deren Äquivalenz, dass der Faktor  $\lambda$  in (5.9) durch  $\Lambda$  bestimmt ist, also

$$A(\Lambda) = \lambda(\Lambda) \cdot \Lambda .$$

Die Gruppeneigenschaft dieser Transformationen verlangt

$$\lambda(\Lambda_1) \lambda(\Lambda_2) = \lambda(\Lambda_1 \Lambda_2) . \quad (5.11)$$

Man kann zeigen, dass die einzige stetige Lösung  $\lambda : L \rightarrow \mathbb{R}$  davon  $\lambda \equiv 1$  ist.

**Zusammenfassung.** Die Gruppe der Transformationen, welche Inertialsysteme mit festen Masstäben verbinden, ist die Gruppe der inhomogenen Lorentz-Transformationen

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} , \quad \text{bzw.} \quad x' = \Lambda x + a .$$

Dies sind die affinen Transformationen mit der Invarianten

$$(x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2 . \quad (5.12)$$

Durch (5.12) wird der  $\mathbb{R}^4$  mit einer Metrik versehen, die in jedem Inertialsystem die Normalform (5.7) annimmt.

**Anwendung: Zeitdilatation.** Sei  $\Delta t = t_B - t_A$  die Zeitdifferenz zweier Ereignisse  $A, B$  in einem Inertialsystem  $K$ , wo sie am selben Ort stattfinden, z.B. Zeitanzeigen einer Uhr in ihrem Ruhesystem:  $\Delta \vec{x} = 0$ . In einem zweiten Inertialsystem  $K'$  bewegt sich die Uhr ebenfalls auf einer Trägheitsbahn,  $\vec{x}' = \vec{v}t' + \vec{b}$ , aber nun i.A. mit Geschwindigkeit  $\vec{v} \neq 0$ . In  $K'$  beträgt die Zeitdifferenz beider Ereignisse

$$|\Delta t'| = \gamma |\Delta t| , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > 1 .$$

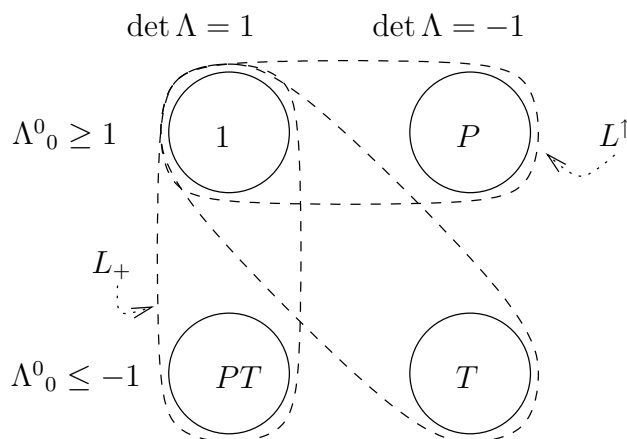
Dies folgt aus (5.12), d.h.  $c^2(\Delta t')^2 - (\Delta \vec{x}')^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta \vec{x})^2$  und  $|\Delta \vec{x}'| = v|\Delta t'|$ .

#### 4. Diskussion der Lorentz-Gruppe

Durch Bildung der Determinante, bzw. der (00)-Komponente von (5.10) folgt für  $\Lambda \in L$

$$\begin{aligned} (\det \Lambda)^2 &= 1 , \\ (\Lambda^0_0)^2 - \sum_{k=1}^3 (\Lambda^k_0)^2 &= 1 . \end{aligned}$$

Somit zerfällt  $L$  in 4 disjunkte Komponenten



Dass alle 4 Fälle auftreten, zeigen die **Spiegelungen**

$$\begin{aligned} 1 &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, & P &= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \\ T &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, & PT &= \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

die selber eine Untergruppe bilden. Weitere Untergruppen sind z.B.

$$\begin{aligned} L_+ &= \{\Lambda \in L \mid \det \Lambda = 1\} && \text{eigentliche Lorentz-Transformationen} \\ L^\uparrow &= \{\Lambda \in L \mid \Lambda^0_0 \geq 1\} && \text{orthochrone Lorentz-Transformationen} \\ L^\uparrow_+ &= L_+ \cap L^\uparrow. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dass  $L^\uparrow$  eine Gruppe ist, sieht man geometrisch:  $\Lambda \in L$  bildet das Innere des Lichtkegels auf sich ab und die beiden Teilkegel

$$V_\pm = \{\xi \mid (\xi, \xi) > 0, \pm \xi^0 \geq 0\}$$

bleiben invariant oder werden vertauscht. Entscheidend ist das Vorzeichen  $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$ , da  $\Lambda : (1, \vec{0}) \mapsto (\Lambda^0_0, \Lambda^1_0, \Lambda^2_0, \Lambda^3_0)$ . Somit sind  $\text{sgn}(\Lambda^0_0)$  und  $\det \Lambda$  multiplikativ unter Gruppenmultiplikation.

Jedes  $\Lambda \in L$  ist das Produkt eines Elements aus  $L^\uparrow_+$  mit einer Spiegelung. Wir beschränken uns deshalb auf die Diskussion von  $L^\uparrow_+$ .

### 1) Räumliche Drehungen

$$\Lambda = \left( \begin{array}{c|ccc} * & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & * \\ 0 & & & \end{array} \right) \implies \Lambda = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & R \\ 0 & & & \end{array} \right) = \Lambda(R) \quad (5.15)$$

mit  $R \in \text{SO}(3)$ , wie aus (5.10, 5.14) folgt.

2) **Spezielle Lorentz-Transformationen** (Boosts) sind charakterisiert durch die Blockform

$$\Lambda = \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & & 0 \\ c & d & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right) \implies \Lambda = \left( \begin{array}{cc|cc} \text{ch } \chi & -\text{sh } \chi & & 0 \\ -\text{sh } \chi & \text{ch } \chi & & 0 \\ \hline & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \end{array} \right) = \Lambda(\chi) \quad (5.16)$$

für ein  $\chi \in \mathbb{R}$ . Beweis: (5.10) lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}.$$

Aus  $a = \Lambda^0_0 \geq 1$  und  $a^2 - c^2 = 1$  folgt  $a = \operatorname{ch} \chi$ ,  $c = -\operatorname{sh} \chi$  für ein  $\chi \in \mathbb{R}$ . Aus  $ab - cd = 0$  folgt  $(b, d) = \lambda(-\operatorname{sh} \chi, \operatorname{ch} \chi)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Schliesslich ist  $1 = \det \Lambda = \lambda(\operatorname{ch}^2 \chi - \operatorname{sh}^2 \chi) = \lambda$ .

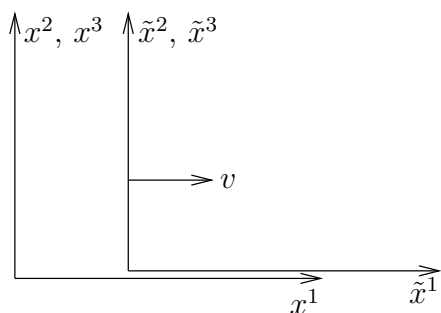
Die Boosts bilden eine Untergruppe, und zwar mit dem Multiplikationsgesetz

$$\Lambda(\chi_1)\Lambda(\chi_2) = \Lambda(\chi_1 + \chi_2). \quad (5.17)$$

Bedeutung der Boosts:  $\tilde{x} = \Lambda(\chi)x$  lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned} c\tilde{t} &= (\operatorname{ch} \chi)ct - (\operatorname{sh} \chi)x^1, & \tilde{x}^2 &= x^2, \\ \tilde{x}^1 &= -(\operatorname{sh} \chi)ct + (\operatorname{ch} \chi)x^1, & \tilde{x}^3 &= x^3. \end{aligned}$$

Ein im neuen Koordinatensystem ruhender Punkt folgt im alten der Bahn



$$\begin{aligned} x^1 &= (\operatorname{ch} \chi)^{-1}\tilde{x}^1 + (\operatorname{th} \chi)ct, \\ x^2 &= \tilde{x}^2, & x^3 &= \tilde{x}^3. \end{aligned}$$

$\Lambda(\chi)$  transformiert also auf ein neues Inertialsystem, das gegenüber dem alten achsenparallel ist und sich gleichförmig und in 1-Richtung bewegt mit der Relativgeschwindigkeit

$$v = c \cdot \operatorname{th} \chi,$$

womit  $-c < v < c$ . Mit

$$\operatorname{ch} \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \operatorname{sh} \chi = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

lautet (5.18)

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \frac{t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{vx^1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & \tilde{x}^2 &= x^2, \\ \tilde{x}^1 &= -\frac{vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{x^1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & \tilde{x}^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Schreiben wir dafür  $\Lambda(v)$  statt  $\Lambda(\chi)$ , so lautet (5.17) nun  $\Lambda(v_1)\Lambda(v_2) = \Lambda(v)$  mit

$$v = c \cdot \operatorname{th}(\chi_1 + \chi_2) = c \frac{\operatorname{th} \chi_1 + \operatorname{th} \chi_2}{1 + \operatorname{th} \chi_1 \cdot \operatorname{th} \chi_2} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \quad (5.19)$$

(Additionsgesetz der Geschwindigkeiten). Im Limes  $c \rightarrow \infty$  gehen die Boosts (5.18) über in die Galilei-Transformationen

$$\tilde{t} = t, \quad \tilde{x}^1 = x^1 - vt, \quad \tilde{x}^2 = x^2, \quad \tilde{x}^3 = x^3$$

und (5.19) in  $v = v_1 + v_2$ .

Lässt man den Boosts (5.16) noch eine Drehung (5.15) vorangehen bzw. nachfolgen, so erhält man alle  $\Lambda \in L_+^\uparrow$ :

**Zerlegungssatz.** Jede Lorentz-Transformation  $\Lambda \in L_+^\uparrow$  lässt sich schreiben als

$$\Lambda = \Lambda(R_1)\Lambda(\chi)\Lambda(R_2). \quad (5.20)$$

**Beweis.** Sei  $y = \Lambda x$ : Betrachte den Unterraum

$$M = \{x \mid x^0 = y^0 = 0\} .$$

Es gibt zwei Fälle:

a)  $\dim M = 3$ . Dann ist  $M = \{x^0 = 0\} = \{y^0 = 0\}$ .  $M$  ist also invariant unter  $\Lambda$ , ebenso das orthogonale Komplement

$$M^\perp = \{x \mid x^1 = x^2 = x^3 = 0\}$$

im Sinne der Metrik (5.7). Somit hat  $\Lambda$  die für Drehungen typische Blockform (5.15).

b)  $\dim M = 2$ . Wir wählen in  $M$  zwei orthonormierte Vektoren  $e_2, e_3$ . Durch eine passende Drehung in  $\{x^0 = 0\} \supset M$  (bzw. in  $\{y^0 = 0\} \supset M$ ) können wir erreichen, dass  $e_2, e_3$  mit den 2- und 3-Richtungsvektoren in den  $x$ - (bzw.  $y$ -) Koordinaten übereinstimmen. Dann ist  $M = \{x^0 = x^1 = 0\} = \{y^0 = y^1 = 0\}$  unter  $\Lambda$  punktweise invariant.  $M^\perp = \{x^2 = x^3 = 0\}$  ist zumindest als Menge invariant. Also hat  $\Lambda$  die für Boosts typische Blockform (5.16).  $\square$

**Nachtrag** zur Herleitung der Lorentz-Transformationen.

**Lemma 1.** Sei  $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $\det A \neq 0$ . Falls  $A$  die Gleichung  $(\xi, \xi) = \xi^T g \xi = 0$  invariant lässt, dann ist

$$A^T g A = \alpha g , \quad \alpha \neq 0 .$$

**Beweis.** Aus  $\xi^0 = \pm |\vec{\xi}|$  folgt  $(\xi, \xi) = 0$ . Somit muss gelten

$$\begin{aligned} 0 &= (A\xi, A\xi) = \xi^T \underbrace{A^T g A}_{B=B^T} \xi = B_{\mu\nu} \xi^\mu \xi^\nu \\ &= \sum_{k=1}^3 (B_{00} + B_{kk}) \underline{(\xi^k)^2} \pm 2 \sum_{k=1}^3 B_{0k} \underline{|\vec{\xi}| \xi^k} + 2 \sum_{i < k} B_{ik} \underline{\xi^i \xi^k} \end{aligned}$$

für alle  $\vec{\xi} \in \mathbb{R}^3$ . Da die unterstrichenen Funktionen linear unabhängig sind, folgt

$$B_{ik} = 0 , \quad B_{0k} = 0 , \quad B_{kk} = -B_{00} ,$$

d.h.  $B = B_{00}g$  und wegen  $\det A \neq 0$  ist  $B_{00} \neq 0$ .  $\square$

**Lemma 2.** Sei  $\lambda : L \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $\lambda(\cdot) > 0$  und (5.11). Dann ist  $\lambda \equiv 1$ .

**Beweis.** Nach (5.11, 5.20) genügt es,  $\lambda(\Lambda) = 1$  zu zeigen für  $\Lambda$  (i) eine Spiegelung, (ii) einen Boost, und (iii) eine Drehung.

(i) Aus  $\Lambda^2 = 1$  folgt  $\lambda(\Lambda)^2 = 1$ , also  $\lambda(\Lambda) = 1$ .

(ii) Es gilt  $\Lambda(-\chi) = P\Lambda(\chi)P$ . Wegen  $\lambda(P) = 1$  ist also  $\lambda(-\chi) = \lambda(\chi)$ . Aus  $\Lambda(-\chi)\Lambda(\chi) = 1$  folgt  $\lambda(\chi)^2 = 1$ .

(iii) Jede Drehung  $R \in \text{SO}(3)$  ist eine Drehung um eine feste Achse  $\vec{e}$  mit Winkel  $\varphi$ . Bei festem  $\vec{e}$  ist  $R(\varphi_1)R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2)$  und  $R(2\pi) = 1$ . Also:  $\lambda(\varphi_1)\lambda(\varphi_2) = \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)$  und  $\lambda(2\pi) = 1$ . Sei nun  $\varphi = 2\pi m/n$  ( $m, n$  ganz). Dann ist  $\lambda(\varphi)^n = \lambda(2\pi)^m = 1$ , d.h.  $\lambda(\varphi) = 1$ . Da  $\lambda$  stetig ist, folgt  $\lambda(\varphi) = 1$  für alle  $\varphi$ .  $\square$

## 6. Relativistische Elektrodynamik und Mechanik

---

### 1. Elektrodynamik

Die Maxwell-Gleichungen erweisen sich als forminvariant unter Lorentz-Transformationen (Lorentz 1904, Poincaré 1905). Zunächst festzulegen ist allerdings das Transformationsverhalten von  $\rho$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  unter Koordinatentransformationen. Am einfachsten geschieht dies mittels **Tensorfelder**, s. Anhang C:  $\rho$ ,  $\vec{v}$  werden als Komponenten eines 4-er Vektors aufgefasst (**4-er Strom**)

$$j^\mu = (c\rho, \vec{v}) , \quad (6.1)$$

$\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  hingegen als Komponenten eines antisymmetrischen Tensors (**elektromagnetischer Feldtensor**)

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F_{\nu\mu} , \quad (6.2)$$

d.h.  $E_i = F_{0i}$ ,  $B_i = -F_{i+1, i+2}$ , ( $i = 1, 2, 3$ ). Damit ist das Verhalten dieser Felder unter affinen Koordinatentransformationen  $\bar{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$  festgelegt:

$$\begin{aligned} \bar{j}^\mu(\bar{x}) &= j^\alpha(x) \Lambda^\mu_\alpha , \\ \bar{F}_{\mu\nu}(\bar{x}) &= F_{\alpha\beta}(x) \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta . \end{aligned}$$

Die Maxwell-Gleichungen lauten in relativistischer Form

$$F_{\mu\nu, \sigma} + F_{\sigma\mu, \nu} + F_{\nu\sigma, \mu} = 0 , \quad (6.3)$$

$$F^{\mu\nu}{}_{, \mu} = \frac{1}{c} j^\nu . \quad (6.4)$$

Die Metrik geht darin ein über

$$F^{\mu\nu} = F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} .$$

In einem Inertialsystem, d.h. in einem, wo die Metrik die Normalform (5.7) hat, ist

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} = -F^{\nu\mu} .$$

Man prüft nach, dass (6.3, 6.4) mit den Maxwell-Gleichungen auf S. 19 übereinstimmen: ( $i = 1, 2, 3$ )

$$\begin{aligned} F_{12,3} + F_{31,2} + F_{23,1} &= -(B_{3,3} + B_{2,2} + B_{1,1}) = -\operatorname{div} \vec{B} , \\ F_{0i,i+1} + F_{ii+1,0} + F_{i+10,i} &= E_{i,i+1} - B_{i+2,0} - E_{i+1,i} = -\left(\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)_{i+2} , \end{aligned}$$

$$F^{\mu 0}_{,\mu} = E_{1,1} + E_{2,2} + E_{3,3} = \operatorname{div} \vec{E} ,$$

$$F^{\mu i}_{,\mu} = -E_{i,0} + B_{i+2,i+1} - B_{i+1,i+2} = \left( \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)_i .$$

Als Tensorgleichungen gelten (6.3, 6.4) in beliebigen affinen Koordinaten, aber nur in Inertialsystemen stimmen sie mit den Maxwell-Gleichungen für die durch (6.1, 6.2) definierten Felder  $\rho, \vec{v}, \vec{E}, \vec{B}$  überein. Weitere Gleichungen der Elektrodynamik lauten in Tensorform:

- Ladungserhaltung: Aus (6.5) und  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$  folgt

$$j^\nu_{,\nu} = c F^{\mu\nu}_{,\mu\nu} = 0 .$$

- Elektromagnetische Potentiale  $A_\mu$ :

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$$

erfüllt die homogene Maxwell-Gleichung (6.3) und ist mit  $A_\mu = (\varphi, -\vec{A})$  äquivalent zu (2.26):

$$A_{i,0} - A_{0,i} = -\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \varphi \right)_i ,$$

$$A_{i+2,i+1} - A_{i+1,i+2} = -\partial_{i+1}(\vec{A})_{i+2} + \partial_{i+2}(\vec{A})_{i+1} = -(\operatorname{rot} \vec{A})_i ,$$

- Eichtransformationen:  $F_{\mu\nu}$  ist invariant unter

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu - \chi_{,\mu} \tag{6.5}$$

mit einer beliebigen Funktion  $\chi(x)$ . Das sind die Eichtransformationen (2.28).

- Lorenz-Eichung: (2.29) lautet

$$A^\mu_{,\mu} = 0 .$$

- Wellengleichung: Bei Lorenz-Eichung lautet (2.31)

$$\square A^\mu = \frac{j^\mu}{c} .$$

$\square$  ist der Laplace-Operator bezgl. der Metrik (5.7). Die Wellengleichung folgt aus (6.5) wegen

$$F^{\mu\nu}_{,\mu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \partial^\nu (A^\mu_{,\mu}) .$$

- Retardiertes Potential: In Inertialsystemen ist

$$A^\mu(x) = \frac{1}{c} \int d^4 y D_{\text{ret}}(x-y) j^\mu(y) .$$

Dabei sind  $d^4 x, D_{\text{ret}}(x)$  Lorentz-invariant (letzteres nur für orthochrone Transformationen). Denn:  $|\det \Lambda| = 1$  für das eine,

$$D_{\text{ret}}(x) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^\mu x_\mu) \theta(x^0)$$

für das andere.

### Transformation der Felder

Wir beschränken uns fortan auf Inertialsysteme und damit auf Lorentz-Transformationen  $\Lambda^\mu{}_\nu$ .

- Diskrete Transformationen (5.13):

– Raumspiegelung  $P$

$$\begin{aligned}(\rho(\vec{x}, t), \vec{i}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (\rho(-\vec{x}, t), -\vec{i}(-\vec{x}, t)) , \\ (\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (-\vec{E}(-\vec{x}, t), \vec{B}(-\vec{x}, t)) .\end{aligned}$$

Man sagt,  $\vec{E}$  (bzw.  $\vec{B}$ ) transformiere wie ein Vektor (bzw. Pseudovektor).

– Zeitumkehr  $T$

$$\begin{aligned}(\rho(\vec{x}, t), \vec{i}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (-\rho(\vec{x}, -t), \vec{i}(\vec{x}, -t)) , \\ (\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (-\vec{E}(\vec{x}, -t), \vec{B}(\vec{x}, -t)) .\end{aligned}\tag{6.6}$$

Eine weitere Symmetrie der Maxwell-Gleichungen ist die Ladungskonjugation  $C$ :

$$\begin{aligned}(\rho(\vec{x}, t), \vec{i}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (-\rho(\vec{x}, t), -\vec{i}(\vec{x}, t)) , \\ (\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (-\vec{E}(\vec{x}, t), -\vec{B}(\vec{x}, t)) .\end{aligned}$$

Die Zeitumkehr (6.6) hat den Nachteil, dass sie das Vorzeichen der Ladung wechselt. Man kann sie aber ersetzen durch ihre Kombination mit  $C$ :

$$\begin{aligned}T : (\rho(\vec{x}, t), \vec{i}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (\rho(\vec{x}, -t), -\vec{i}(\vec{x}, -t)) , \\ (\vec{E}(\vec{x}, t), \vec{B}(\vec{x}, t)) &\longmapsto (\vec{E}(\vec{x}, -t), -\vec{B}(\vec{x}, -t)) .\end{aligned}\tag{6.7}$$

- Boosts (5.16): Für diese lautet (6.3)

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= \frac{\rho}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \\ \bar{i}_\parallel &= -\frac{\rho \vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{\vec{i}_\parallel}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \quad \bar{i}_\perp = \vec{i}_\perp , \\ \bar{\vec{E}}_\parallel &= \vec{E}_\parallel , \quad \bar{\vec{E}}_\perp = \frac{\vec{E}_\perp + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} , \\ \bar{\vec{B}}_\parallel &= \vec{B}_\parallel , \quad \bar{\vec{B}}_\perp = \frac{\vec{B}_\perp - \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{E}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,\end{aligned}$$

wobei  $\parallel$  und  $\perp$  die Anteile parallel und senkrecht zu  $\vec{v}$  bezeichnen. Diese Formeln gelten allgemein für die Transformation auf ein achsenparalleles Inertialsystem, das sich gegenüber dem ursprünglichen System mit der Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  ( $v = |\vec{v}| < c$ ). Zur Herleitung sei  $\vec{v} = (v, 0, 0)$  und setze  $\beta = v/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Die  $F^{\mu\nu}$  transformieren wie Produkte  $x^\mu y^\nu$  von Vektorkomponenten, z.B.

$$\bar{x}^1 \bar{y}^0 = \gamma(-\beta x^0 + x^1) \cdot \gamma(y^0 - \beta y^1) = \gamma^2(x^1 y^0 + \beta^2 x^0 y^1) - \gamma^2 \beta (x^0 y^0 + x^1 y^1) ,$$

also, mit  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ ,

$$\bar{E}_1 = \bar{F}^{10} = \underbrace{\gamma^2(1 - \beta^2)}_{=1} F^{10} = E_1 ;$$

oder  $\bar{x}^2 \bar{y}^1 = x^2 \cdot \gamma(y^1 - \beta y^0)$ , d.h.

$$\bar{B}_3 = \bar{F}^{21} = \gamma(F^{21} - \beta F^{20}) = \gamma(B_3 - \beta E_2) .$$

Aus (6.8) ist ersichtlich, dass die Aufspaltung des Feldes in einen elektrischen und magnetischen Anteil vom Bezugssystem abhängt. Invariant sind

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = 2(\vec{B}^2 - \vec{E}^2) , \quad \det(F_{\mu\nu}) = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2 .$$

Somit ist  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  invariant unter  $L_+^\uparrow$  (denn  $L_+^\uparrow$  ist zusammenhängend). Zusammen mit dem Verhalten unter  $P, T$  ergibt sich

$$\bar{\vec{E}} \cdot \bar{\vec{B}} = \vec{E} \cdot \vec{B} \det \Lambda ,$$

(Pseudoskalar). Die Aussagen  $\vec{E}^2 = \vec{B}^2$  und  $\vec{E} \perp \vec{B}$  (ebene Welle) sind invariant.

## 2. Relativistische Mechanik

(Einstein 1905) Die Bewegung eines Teilchens ist dargestellt im  $\mathbb{R}^4$  durch seine **Weltlinie**  $x(\lambda) = (x^0(\lambda), \vec{x}(\lambda))$ , wobei  $\lambda$  ein beliebiger Kurvenparameter ist, z.B. die Zeitkoordinate:

$$x(t) = (ct, \vec{x}(t)) . \quad (6.8)$$

Unabhängig vom Kurvenparameter und Lorentz-invariant ist die Bogenlänge

$$\int_{(1)}^{(2)} d\lambda \left( \frac{dx}{d\lambda}, \frac{dx}{d\lambda} \right)^{1/2} = \int_{(1)}^{(2)} ds ,$$

wobei  $(\cdot, \cdot)$  das Skalarprodukt zur Metrik (5.7) ist. Die Bogenlänge  $s$  ist charakterisiert durch

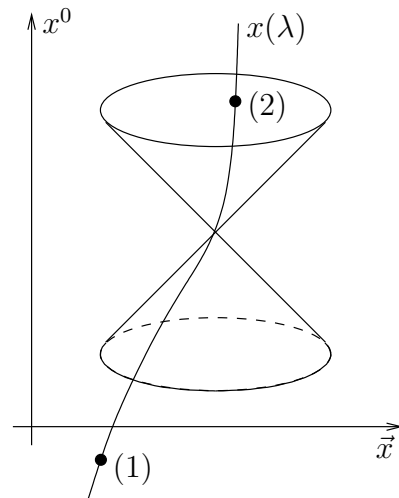
$$\left( \frac{dx}{ds}, \frac{dx}{ds} \right) = 1 , \quad (6.9)$$

d.h.

$$ds^2 = (dx, dx) = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu .$$

Sie ist somit bis auf Transformationen  $s' = \lambda s + a$  ( $\lambda = \pm 1, a \in \mathbb{R}$ ) eindeutig. Statt  $s$  benutzen wir die **Eigenzeit**  $\tau = s/c$ . Aus (6.8) folgt dann mit  $\vec{v} = d\vec{x}/dt$

$$\begin{aligned} ds^2 &= (c^2 - v^2) dt^2 , \\ d\tau &= dt \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} . \end{aligned} \quad (6.10)$$





– Der Name Eigenzeit rührt davon her, dass  $d\tau = dt$  im Ruhesystem des Teilchens (ein Inertialsystem, in dem das Teilchen momentan die Geschwindigkeit Null hat).

– Wir haben  $v < c$  vorausgesetzt. Geometrisch bedeutet dies, dass die Weltlinie innerhalb des Lichtkegels durch jeden ihrer Punkte verläuft. Diese Bedingung ist mit der Bewegungsgleichung verträglich (siehe später): gilt sie zu einer Zeit, so zu allen.

– Durch die Wahl der positiven Wurzel in (6.10) hat  $d\tau$  stets das Vorzeichen von  $dt$ . Deshalb ist  $d\tau$  ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen,

$$d\bar{\tau} = \text{sgn}(\Lambda^0_0)d\tau .$$

Wir bilden die Pseudovektoren (bzgl. Zeitumkehr)

$$\begin{aligned} u &= \frac{dx}{d\tau} && \text{(4-er Geschwindigkeit) ,} \\ p &= mu && \text{(4-er Impuls) .} \end{aligned}$$

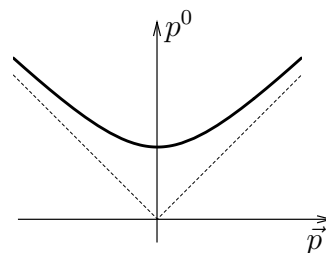
Hier ist  $m > 0$  die (Lorentz-invariante) **Masse** des Teilchens. Aus (6.9) folgt

$$(u, u) = c^2 , \quad (p, p) = m^2 c^2 . \quad (6.11)$$

In Komponenten ist

$$u^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \vec{v}) , \quad p^\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} (c, \vec{v}) ,$$

wobei stets  $p^0 > 0$  ist. Der 4-er Impuls liegt auf einem durch  $m$  bestimmten ‘Massenhyperboloid’ im  $\mathbb{R}^4$ :  $(p^0)^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^2$ .



Wir betrachten nun ein Teilchen (Masse  $m$ , Ladung  $e$ ) in einem äusseren elektromagnetischen Feld. Seine Bewegungsgleichung im Ruhesystem ( $\vec{v} = 0$ ) soll die nichtrelativistische sein:

$$m\ddot{\vec{x}} = e\vec{E}(\vec{x}, t) . \quad (6.12)$$

Um die Bewegungsgleichung in einem beliebigen Inertialsystem zu finden, genügt es eine Lorentz-invariante Gleichung anzugeben, die für  $v = 0$  mit (6.12) übereinstimmt. Diese ist

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{e}{mc} F^{\mu\nu}(x)p_\nu .$$

Sie schreibt sich nämlich als

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{d}{dt} \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \\ \frac{e}{mc} \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} c \\ -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix} , \end{aligned}$$

also als

$$\frac{d}{dt} cp^0 = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e \vec{E} \cdot \vec{v}, \quad (6.13)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = e \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B} \right). \quad (6.14)$$

Für  $v = 0$  reduziert sich (6.14) auf (6.12) und (6.13) ist trivial. Im allgemeinen folgt (6.13) aus (6.14): Nach (6.11) ist  $(p, dp/dt) = 0$  und somit

$$p^0 \frac{dp^0}{dt} = \vec{p} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} = e \vec{E} \cdot \vec{p} = p^0 e \vec{E} \cdot \frac{\vec{v}}{c}.$$

Rechts in der relativistischen Bewegungsgleichung (6.14) steht die Lorentz-Kraft (2.20), rechts in (6.13) deren Leistung. Also ist

$$cp^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

als relativistische **kinetische Energie** aufzufassen. Die Leistung (6.13) ist über ein endliches Zeitintervall beschränkt, falls  $\vec{E}$  es ist; dann ist es auch  $cp^0$ , womit das Teilchen  $v = c$  nicht erreichen kann. Für  $v \ll c$  ist

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \dots :$$

$\frac{1}{2}mv^2$  ist die nichtrelativistische kinetische Energie,  $mc^2$  heisst die **Ruheenergie** des Teilchens. Sie spielt eine Rolle bei Stossprozessen. Dort ist der Gesamtimpuls  $P^\mu$  erhalten, dafür die Gesamtmasse nicht mehr! Beispiel: symmetrischer Zerfall:

vorher:  $\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{M} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$   $P^\mu = (Mc, \vec{0})$

nacher:  $\begin{array}{c} \text{---} \textcircled{m} \text{---} \quad \textcircled{m} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array}$   $P^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (2mc, \vec{0})$

Somit ist

$$2m = M \sqrt{1-v^2/c^2} < M.$$

**Lagrange-Funktion.** Die Bewegungsgleichung (6.14) ist die Euler-Lagrange Gleichung zur Lagrange-Funktion

$$L(\vec{x}, \vec{v}, t) = \underbrace{-mc^2 \sqrt{1-v^2/c^2}}_{-mc^2 + \frac{mv^2}{2} + \dots} - e \left( \varphi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right), \quad (6.15)$$

die für  $v \ll c$  in die nichtrelativistische Lagrange-Funktion übergeht (bis auf die hier unwesentliche Konstante  $-mc^2$ ). In der Tat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_k} &= \frac{m v_k}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} A_k \quad (\text{kanonischer Impuls}), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_k} &= \frac{d}{dt} \frac{m v_k}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_k}{\partial t} + A_{k,l} v_l \right), \\ \frac{\partial L}{\partial x_k} &= -e \varphi_{,k} + \frac{e}{c} A_{l,k} v_l. \end{aligned}$$

Die Euler–Lagrange Gleichung  $(d/dt)(\partial L/\partial v_k) - (\partial L/\partial x_k) = 0$  lautet deshalb

$$\frac{d}{dt} \frac{m v_k}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = e \underbrace{\left( -\varphi_{,k} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_k}{\partial t} \right)}_{E_k} + \frac{e}{c} \underbrace{(A_{l,k} - A_{k,l}) v_l}_{(\vec{v} \wedge \vec{B})_k},$$

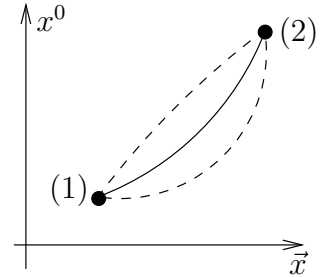
was mit (6.14) übereinstimmt. Die Lagrange–Funktion (6.15) ist selbst nicht Lorentz–invariant, wohl aber

$$L dt = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} d\tau = - \left( mc^2 + \frac{e}{c} (u, A) \right) d\tau.$$

Das Hamiltonsche Variationsprinzip für die Weltlinie des Teilchens hat somit die invariante Form

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} \left( mc^2 + \frac{e}{c} (u, A) \right) d\tau = 0$$

bei Variationen mit festen Endpunkten im  $\mathbb{R}^4$ .



$L$  ist auch nicht eichinvariant: unter einer Eichtransformation (6.5) ändert sich  $L$  um ein totales Differential

$$L \longrightarrow L + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial \chi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \chi \right) = L + \frac{e}{c} \frac{d\chi}{dt},$$

wodurch die Bewegungsgleichung unverändert bleibt.

# 7. Erhaltungssätze

## 1. Ladung

Die Stromdichte  $j^\mu(x)$  soll in raumartige Richtungen (d.h. ausserhalb des Lichtkegels) hinreichend rasch abfallen. Dann ist in jedem Inertialsystem die **Gesamtladung**

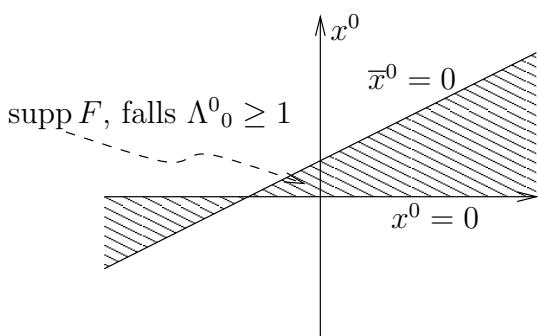
$$Q = \frac{1}{c} \int_{x^0=0} d^3x j^0(x) = \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu \theta(x^0)$$

endlich. Dabei ist  $\theta(s) = 1$  für  $s \geq 0$  und  $= 0$  für  $s < 0$ . Wir zeigen: unter inhomogenen Lorentz-Transformationen  $\bar{x} = \Lambda x + a$  ist

$$\bar{Q} = Q, \tag{7.1}$$

d.h.  $Q$  ist ein Skalar. Spezialfall: Ladungserhaltung, d.h. Invarianz von  $Q$  unter Zeitverschiebungen. Beweis: wegen  $|\det \Lambda| = 1$  ist

$$\bar{Q} = \frac{1}{c} \int d^4\bar{x} \bar{j}^\mu(\bar{x}) \bar{\partial}_\mu \theta(\bar{x}^0) = \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu \theta(\bar{x}^0).$$



$$F(x) := \theta(x^0) - \theta(\bar{x}^0).$$

Da  $j^\mu(x)F(x)$  in allen Richtungen verschwindet, folgt

$$\begin{aligned} Q - \bar{Q} &= \frac{1}{c} \int d^4x j^\mu(x) F_{,\mu}(x) \\ &= -\frac{1}{c} \int d^4x \underbrace{j^\mu_{,\mu}(x)}_{=0} F(x) = 0. \end{aligned}$$

Für die Zeitumkehr ist nach (6.7) ebenfalls  $\bar{Q} = Q$ .

## 2. Energie und Impuls

Der **Energie-Impulstensor** ist definiert durch

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\sigma F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\rho} g^{\mu\nu}.$$

Er ist homogen vom Grad 2 in den Feldstärken, symmetrisch und spurlos. Aus den Maxwell-Gleichungen (6.3, 6.4) folgt der **Energie-Impulssatz**:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = -\frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu =: -f^\mu. \tag{7.2}$$

Beweis:

$$(F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu})_{,\nu} = \underbrace{F_{\mu\sigma,\nu} F^{\sigma\nu}}_{G_\mu} + \underbrace{F_{\mu\sigma} F^{\sigma\nu}{}_{,\nu}}_{H_\mu}$$

$$(6.3) : \quad G_\mu = -(F_{\sigma\nu,\mu} + F_{\nu\mu,\sigma})F^{\sigma\nu} = F_{\nu\sigma,\mu}F^{\sigma\nu} - F_{\mu\nu,\sigma}F^{\nu\sigma} = \frac{1}{2}(F_{\nu\sigma}F^{\sigma\nu})_{,\mu} - G_\mu ,$$

$$G_\mu = \frac{1}{4}(F_{\nu\sigma}F^{\sigma\nu})_{,\mu} .$$

$$(6.4) : \quad H_\mu = -\frac{1}{c}F_{\mu\sigma}j^\sigma$$

Es folgt  $T_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = G_\mu + H_\mu - G_\mu = -f_\mu$ .

Durch  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{j}$  ausgedrückt lauten diese Tensoren

$$F_{\mu\sigma}F^{\sigma\nu} = \left( \begin{array}{c|c} \vec{E}^2 & \vec{E} \wedge \vec{B} \\ \hline -\vec{E} \wedge \vec{B} & E_i E_k + B_i B_k - \vec{B}^2 \delta_{ik} \end{array} \right) ,$$

$$T^{\mu\nu} = \left( \begin{array}{c|c} \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) & \vec{E} \wedge \vec{B} \\ \hline \vec{E} \wedge \vec{B} & \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)\delta_{ik} - E_i E_k - B_i B_k \end{array} \right) , \quad (7.3)$$

$$f^\mu = \left( \frac{1}{c}\vec{j} \cdot \vec{E}, \rho\vec{E} + \frac{\vec{j}}{c} \wedge \vec{B} \right) . \quad (7.4)$$

Einige Komponenten sind schon bekannt, vgl. (2.25, 2.20). Durch (7.3, 7.4) ist ihr Transformationsverhalten bestimmt. Integriert über  $V \subset \mathbb{R}^3$  lautet (7.2)

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \frac{1}{c} T^{\mu 0} = - \int_{\partial V} \sum_{k=1}^3 T^{\mu k} d\sigma_k - \int_V d^3x f^\mu . \quad (7.5)$$

Der letzte Term ist nach (6.13, 6.14), oder (2.20), der pro Zeiteinheit vom Feld auf die Ladungen in  $V$  übertragene 4-er Impuls. Deshalb nennt man:

$$\frac{1}{c} T^{\mu 0} \quad \text{Impulsdichte des Feldes } (\mu\text{-Komponente}),$$

$$\sum_{k=1}^3 T^{\mu k} d\sigma_k \quad \text{Impulsstrom durch } d\vec{\sigma} \text{ } (\mu\text{-Komponente}).$$

Dann drückt (7.5) die Erhaltung des gesamten 4-er Impulses von Feld und Materie aus. Für  $\mu = 0$  ist dies der Energiesatz (2.24). Die Raumkomponenten sind

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \frac{1}{c^2} S_i = - \int_{\partial V} T_{ik} d\sigma_k - \int d^3x f_i , \quad (7.6)$$

wobei wir in solchen 3-dimensionalen Formeln alle Indizes unten schreiben.  $\vec{S} = c(\vec{E} \wedge \vec{B})$  ist der Poynting-Vektor.

**Freies Feld.** Aus

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$$

folgt wie im Falle der Ladungserhaltung, dass sich der gesamte Feldimpuls

$$P^\mu = \frac{1}{c} \int_{x^0=0} d^3x T^{\mu 0}(x) \quad (7.7)$$

unter Lorentz-Transformationen gemäss

$$\bar{P}^\mu = \text{sgn}(\Lambda^0_0) \Lambda^\mu_\alpha P^\alpha$$

transformiert: für jeden festen 4-er Vektor  $a_\mu$  ist  $j^\nu = a_\mu T^{\mu\nu}$  ein divergenzfreies Vektorfeld, d.h.  $j^\nu_{,\nu} = 0$ , also  $a_\mu P^\mu = (1/c) \int_{x^0=0} d^3x j^0(x)$  ein Pseudoskalar nach (7.1) (“pseudo” bezüglich Zeitumkehr). Insbesondere ist  $P^\mu$  invariant unter Zeitverschiebung: Impulserhaltung.

Damit (7.7) endlich ist, muss  $F_{\mu\nu}(x)$  in raumartigen Richtungen genügend rasch abfallen. Für eine ebene Welle trifft dies nicht zu. Deren räumliche Impulsdichte ist

$$\frac{1}{c} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{2} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \vec{e},$$

wegen (3.2). Für eine annähernd ebene, aber endlich ausgedehnte Welle ist daher

$$(P, P) = (P^0)^2 - \vec{P}^2 \approx 0,$$

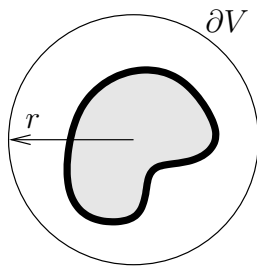
was nach (6.11) einem Teilchen der Masse Null entspricht.

**Statische Felder.** Dann lautet (7.6)

$$F_i \equiv \int_V f_i d^3x = \int_{\partial V} \underbrace{(-T_{ik})}_{=: \sigma_{ik}} do_k$$

( $\sigma_{ik}$ : Maxwell-Spannungstensor), d.h. man kann die Kraft  $\vec{F}$  auf eine Strom- und Ladungsverteilung berechnen aus der Kenntnis des Feldes auf einer umschliessenden Fläche  $\partial V$ . Anwendungen:

– Die resultierende Kraft einer statischen Strom- und Ladungsverteilung verschwindet: auf  $\partial V$  ist  $\vec{E}, \vec{B} = O(1/r^2)$ , also  $\sigma_{ik} = O(1/r^4)$  und daher

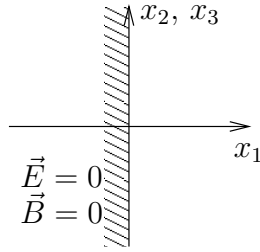


$$F_i = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} \sigma_{ik} do_k = 0. \quad (7.8)$$

– “Actio = reactio” zwischen statischen Verteilungen ‘1’ und ‘2’. Nach (7.8) ist

$$\vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} = \vec{F} = 0.$$

– Beispiel: Kraft pro Flächeneinheit auf einen Supraleiter (schraffiert) in einem statischen Feld



$\vec{E}_{\parallel}, \vec{B}_{\perp}$  stetig an der Grenzfläche, vgl. (1.17, 2.16).

Somit ist im Äusseren

$$\sigma_{ik} = (E_i E_k - \frac{1}{2} \vec{E}^2 \delta_{ik}) + (B_i B_k - \frac{1}{2} \vec{B}^2 \delta_{ik}) = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c} \vec{E}^2 - \vec{B}^2 & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right).$$

Auf das Flächenelement  $\vec{n} = (1, 0, 0)$  wirkt daher die Kraft  $F_i = \sigma_{ik} n_k$ , d.h.

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \begin{array}{cc} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2) & \vec{n} \\ \uparrow & \uparrow \\ \text{Zug} & \text{Druck} \end{array}.$$

### 3. Drehimpuls

Der Drehimpuls eines Teilchens ist gegeben durch

$$L^{\mu\nu} = x^{\mu} p^{\nu} - x^{\nu} p^{\mu},$$

einem antisymmetrischen Pseudotensor unter (homogenen) Lorentz-Transformationen. Für  $i = 1, 2, 3$  ist

$$L^{i0} = (p^0 \vec{x} - ct \vec{p})_i, \quad L^{i+1 i+2} = (\vec{x} \wedge \vec{p})_i. \quad (7.9)$$

Wegen  $dx/dt \parallel p$  folgt der Drehimpulssatz

$$\frac{dL^{\mu\nu}}{dt} = x^{\mu} \frac{dp^{\nu}}{dt} - x^{\nu} \frac{dp^{\mu}}{dt}$$

(Drehmoment). Für das elektromagnetische Feld definiert man den **Drehimpulstensor**

$$\theta^{\mu\nu\sigma} = x^{\mu} T^{\nu\sigma} - x^{\nu} T^{\mu\sigma}.$$

Aus (7.2) und  $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$  folgt der Drehimpulssatz

$$\theta^{\mu\nu\sigma}{}_{,\sigma} = -(x^{\mu} f^{\nu} - x^{\nu} f^{\mu}),$$

oder integriert über  $V \subset \mathbb{R}^3$

$$\frac{d}{dt} \int_V d^3x \frac{1}{c} \theta^{\mu\nu 0} = - \int_{\partial V} \sum_{k=1}^3 \theta^{\mu\nu k} d\sigma_k - \int_V d^3x (x^{\mu} f^{\nu} - x^{\nu} f^{\mu}) \quad (7.10)$$

Der letzte Term ist das Drehmoment des Feldes auf die Strom- und Ladungsverteilung in  $V$ . Deshalb ist zu definieren:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{c} \theta^{\mu\nu 0} & \text{Drehimpulsdichte des Feldes } (\mu\nu\text{-Komponente}), \\ \sum_{k=1}^3 \theta^{\mu\nu k} d\sigma_k & \text{Drehimpulsstrom durch } d\vec{\sigma} \text{ } (\mu\nu\text{-Komponente}). \end{array}$$

Ausgeschrieben ( $i = 1, 2, 3$ ), vgl. (7.9), ist

$$\frac{1}{c}\theta^{i00} = \frac{1}{c}(u\vec{x} - t\vec{S})_i, \quad \frac{1}{c}\theta^{i+1i+20} = \left(\vec{x} \wedge \frac{\vec{S}}{c^2}\right)_i. \quad (7.11)$$

**Freies Feld.** Aus

$$\theta^{\mu\nu\sigma}_{,\sigma} = 0$$

folgt wieder, dass sich der Gesamtdrehimpuls

$$L^{\mu\nu} = \frac{1}{c} \int_{x^0=0} d^3x \theta^{\mu\nu 0}(x)$$

unter Lorentz-Transformationen  $\bar{x} = \Lambda x$  gemäss

$$\bar{L}^{\mu\nu} = \text{sgn}(\Lambda^0_0) \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta L^{\alpha\beta}$$

transformiert. Aus (7.10) mit  $V = \mathbb{R}^3$  folgt  $dL^{\mu\nu}/dt = 0$ : Drehimpulserhaltung. Für  $\nu = 0$  ist dies die Aussage

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \left( \int d^3x u \vec{x} \right) - ct \vec{P} &= \text{const}, \\ \vec{X}_S &:= \frac{\int d^3x \vec{x} u}{\int d^3x u} = ct \frac{\vec{P}}{P^0} + \text{const}, \end{aligned}$$

d.h. der Energieschwerpunkt  $\vec{X}_S$  des freien Feldes bewegt sich auf einer Trägheitsbahn mit konstanter Geschwindigkeit  $\vec{v} = c\vec{P}/P^0$ . Aus  $|\vec{E}||\vec{B}| \leq \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$  folgt  $v \leq c$ .

**Statische Felder.** Die Raum-Raum-Komponenten von (7.10) lauten

$$\int_V d^3x (x_i f_j - x_j f_i) = \int_{\partial V} do_l (x_i \sigma_{jl} - x_j \sigma_{il})$$

oder

$$\int_V d^3x (\vec{x} \wedge \vec{f}) = \int_{\partial V} \vec{x} \wedge d\vec{\sigma},$$

wobei  $d\sigma_i = \sigma_{il} do_l$  die durch den Spannungstensor auf das Flächenelement  $d\vec{\sigma}$  ausgeübte Kraft ist. Auch zur Berechnung des Drehmoments auf eine Strom- und Ladungsverteilung genügt also die Kenntnis des Feldes auf einer umschliessenden Fläche  $\partial V$ . In der in (7.8) betrachteten Situation ist

$$\int d^3x (\vec{x} \wedge \vec{f}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\partial V} \underbrace{\vec{x}}_{O(r)} \wedge \underbrace{d\vec{\sigma}}_{O(r^{-4})} = 0.$$



# 8. Elektrodynamik materieller Medien

---

## 1. Die mittleren Felder in Materie

Manche elektromagnetische Erscheinung spielt sich auf Längenskalen ab, die gross sind gegenüber typischen atomaren Abmessungen ( $\sim 1 \text{ \AA}$ ) (Beispiel: Fortpflanzung des Lichts in Materie; gegenteiliges Beispiel: Röntgenstreuung an Kristallen). Für solche Fälle ist eine Beschreibung gesucht, die von der mikroskopischen Struktur der Materie absieht, bzw. sich nur mit räumlichen Mittelwerten (über  $\gg 100 \text{ \AA}$ ) befasst.

Das **Modell**: Die Stromdichte in Materie hat die Form

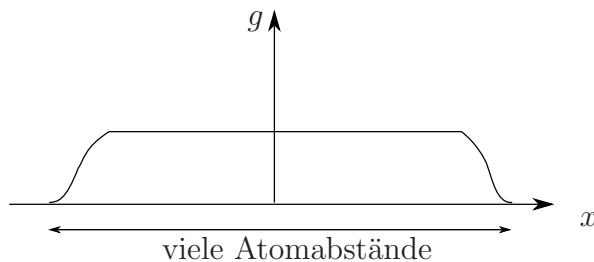
$$j^\mu(x) = \sum_{(a)} j_{(a)}^\mu(x) ; \quad j_{(a)}^\mu{}_{,\mu} = 0 .$$

Hier ist  $j_{(a)}$  die Stromdichte eines "Atoms"  $a$  (auch: Ion, Elektron, ...), die stets in einer Umgebung atomarer Grössenordnung um dessen Mittelpunkt  $\vec{r}_{(a)}(t)$  konzentriert ist.

**Mittlere Felder**: Für jede Feldkomponente  $f$  ist ein räumlicher Mittelwert über viele Atome durch

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int d^3y g(\vec{x} - \vec{y}) f(\vec{y}, t)$$

gegeben, wobei  $g$  eine Gewichtsfunktion der folgenden Art ist:



$$\int d^3x g(\vec{x}) = 1$$

Die gemittelten Grössen sind dann glatte Funktionen. Da die Mittelbildung linear ist, gelten die Maxwell-Gleichungen unverändert für die mittleren Felder  $\vec{E}, \vec{B}, \bar{\rho}, \vec{j}$ .

**Multipolentwicklung** der mittleren Stromdichte: Wir betrachten vorerst den Beitrag eines einzelnen, momentan ruhenden Atoms an der Stelle  $\vec{r}$  ( $\dot{\vec{r}}(t) = 0$ ). Dann erstreckt sich das Integral

$$\bar{j}^\mu(x) = \int d^3y g(\vec{x} - \vec{r} - \vec{y}) j^\mu(\vec{r} + \vec{y}, t)$$

nur über ein Gebiet  $|\vec{y}| \lesssim \text{Atomdurchmesser}$ , wo  $g(\vec{x} - \vec{r} - \vec{y})$  in guter Näherung nach  $\vec{y}$  linearisiert werden darf:

$$g(\vec{x} - \vec{r} - \vec{y}) = g(\vec{x} - \vec{r}) - g_{,k}(\vec{x} - \vec{r}) \cdot y_k$$

(Summe über  $k = 1, 2, 3$ ). Dies ergibt

$$\bar{j}^\mu(x) = g(\vec{x} - \vec{r}) a^\mu(t) - g_{,k}(\vec{x} - \vec{r}) a^{\mu k}(t) , \quad (8.1)$$

mit den atomaren Multipolmomenten bezüglich  $\vec{r}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c}a^0 &= \int d^3y \rho(\vec{r} + \vec{y}, t) \equiv e && \text{(Ladung)} \\
\frac{1}{c}a^{0k} &= \int d^3y y_k \rho(\vec{r} + \vec{y}, t) \equiv p_k(t) && \text{(elektrisches Dipolmoment)} \\
a^l &= \int d^3y i_l(\vec{r} + \vec{y}, t) = \dot{p}_l(t) \\
a^{lk} &= \int d^3y y_k i_l(\vec{r} + \vec{y}, t)
\end{aligned} \tag{8.2}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(a^{l+1} - a^{l+1l}) &= \frac{1}{2} \int d^3y (y_{l+1} i_l - y_l i_{l+1}) \\
&= -c m_{l+2} && \text{(magnetisches Dipolmoment)}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\frac{1}{2}(a^{lk} + a^{kl}) = \frac{1}{6} \dot{T}_{lk}, \tag{8.4}$$

$$T_{lk} = 3 \int d^3y y_l y_k \rho(\vec{r} + \vec{y}, t).$$

(Zu (8.2, 8.4) siehe die Umformungen auf den Seiten 31, 32). Man findet dann

$$\partial_\mu \bar{J}^\mu(x) = g \underbrace{\dot{a}^0}_{=0} / c - g_{ik} \underbrace{(\dot{a}^{0k} / c - a^k)}_{=0} - g_{kl} a^{lk} = -\frac{1}{2} g_{kl} (a^{lk} + a^{kl}), \tag{8.5}$$

d.h. in der Näherung (8.1) ist die Kontinuitätsgleichung verletzt, wegen (8.4) allerdings nur in der Ordnung  $O(y^2)$ , die wir vernachlässigt haben. In dieser Approximation können wir sie wiederherstellen, indem wir  $a^{lk}$  durch den antisymmetrischen Teil (8.3) ersetzen. Dann verschwindet (8.5), und (8.1) lautet:

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} &= g \cdot e - g_{,k} p_k, \\
\bar{i}_l &= g \cdot \dot{p}_l - g_{,l+1} \cdot (-c m_{l+2}) - g_{,l+2} \cdot c m_{l+1},
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\vec{x}, t) &= g(\vec{x} - \vec{r})e - \text{div}(g(\vec{x} - \vec{r})\vec{p}(t)), \\
\bar{i}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} g(\vec{x} - \vec{r})\vec{p}(t) + \text{crot}(g(\vec{x} - \vec{r})\vec{m}(t)).
\end{aligned}$$

Dies entspricht den mittleren Feldern unter Ersetzung des Atoms durch ein (ebenfalls ruhendes) Punktteilchen

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}, t) &= \delta(\vec{x} - \vec{r})e - \text{div}(\delta(\vec{x} - \vec{r})\vec{p}(t)), \\
\vec{i}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{r})\vec{p}(t) + \text{crot}(\delta(\vec{x} - \vec{r})\vec{m}(t)),
\end{aligned} \tag{8.6}$$

charakterisiert durch seine Ladung und Dipolmomente.

Für Materie aus ruhenden Atomen ergibt sich so insgesamt:

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(\vec{x}, t) &= \rho_L(\vec{x}) - \text{div} \vec{P}(\vec{x}, t), \\
\bar{i}(\vec{x}, t) &= \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(\vec{x}, t) + \text{crot} \vec{M}(\vec{x}, t)
\end{aligned} \tag{8.7}$$

mit den Feldern

$$\begin{aligned}
\rho_L(\vec{x}) &= \sum_{(a)} g(\vec{x} - \vec{r}_{(a)}) e_{(a)} && \text{(Leitungsladungsdichte)} \\
\vec{P}(\vec{x}, t) &= \sum_{(a)} g(\vec{x} - \vec{r}_{(a)}) \vec{p}_{(a)}(t) && \text{(elektrische Polarisation)} \\
\vec{M}(\vec{x}, t) &= \sum_{(a)} g(\vec{x} - \vec{r}_{(a)}) \vec{m}_{(a)}(t) && \text{(magnetische Polarisation)}.
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Die Verallgemeinerung von (8.6) für bewegte Atome erhalten wir durch Umschreibung auf eine manifest kovariante Form:

$$j^\mu(x) = c \int e u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(x - x(\tau)) d\tau + c^2 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \int p^{\mu\nu}(\tau) \delta^{(4)}(x - x(\tau)) d\tau, \tag{8.9}$$

wobei  $\tau$ : Eigenzeit,  $u^\mu$ : 4er-Geschwindigkeit,  $p^{\mu\nu}$ : Tensor, mit Komponenten ( $\vec{v} = d\vec{x}/dt$ )

$$p^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & m_3 & -m_2 \\ p_2 & -m_3 & 0 & m_1 \\ p_3 & m_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix},$$

die **im Ruhesystem** die bereits erklärte Bedeutung haben und in anderen durch  $p^{\mu\nu}$  definiert sind. Um dies mit (8.6) zu vergleichen, beachte, dass

$$c \int f(\tau) \delta^{(4)}(x - x(\tau)) d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot f(t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{r}(t)),$$

denn

$$c \int f(\tau) \delta^{(1)}(ct - x^0(\tau)) d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2} \cdot \underbrace{c \int f(\tau(t')) \delta(ct - ct') dt'}_{=f(\tau(t)) \equiv f(t)}.$$

Also:

$$\begin{aligned}
\rho(\vec{x}, t) &= e \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) + \text{div} \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \vec{p}(t), \\
\vec{i}(\vec{x}, t) &= e \vec{v} \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) + \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \vec{p}(t) + \text{crot}(\delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \vec{m}(t)),
\end{aligned} \tag{8.10}$$

was für  $\vec{v} = 0$  mit (8.6) übereinstimmt. Da  $p^{\mu\nu}$  ein Tensor ist, transformieren

$$\frac{\vec{p}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{-\vec{m}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{wie} \quad \vec{E}, \vec{B}.$$

Mit (6.8) (mit Parameter  $-\vec{v}$ ) findet man

$$\begin{aligned}
\vec{p}_{\parallel} &= \vec{p}_{\parallel}^{(0)} \sqrt{1 - v^2/c^2}, & \vec{p}_{\perp} &= \vec{p}_{\perp}^{(0)} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{m}^{(0)}, \\
\vec{m}_{\parallel} &= \vec{m}_{\parallel}^{(0)} \sqrt{1 - v^2/c^2}, & \vec{m}_{\perp} &= \vec{m}_{\perp}^{(0)} - \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{p}^{(0)},
\end{aligned} \tag{8.11}$$

wo  $\vec{p}^{(0)}$ ,  $\vec{m}^{(0)}$  die Dipolmomente im Ruhesystem sind und  $\parallel, \perp$  die Anteile parallel und senkrecht zu  $\vec{v}$  bezeichnen. Für  $v \ll c$  reduziert sich (8.11) auf

$$\vec{p} = \vec{p}^{(0)} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{m}^{(0)}, \quad \vec{m} = \vec{m}^{(0)} - \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{p}^{(0)}.$$

Für Materie aus bewegten Atomen ergänzt sich (8.7), wegen (8.10), zu

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\vec{x}, t) &= \rho_L(\vec{x}, t) - \operatorname{div} \vec{P}(\vec{x}, t), \\ \vec{i}(\vec{x}, t) &= \vec{i}_L(\vec{x}, t) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}(\vec{x}, t) + \operatorname{crot} \vec{M}(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Dabei sind  $\rho_L$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  wieder durch (8.8) gegeben, wobei die gemäss (8.11) berechneten Dipolmomente einzusetzen sind. Hierzu kommt die Leitungsstromdichte ( $\vec{v}^{(a)}$ : Geschwindigkeit des Atoms  $a$ )

$$\vec{i}_L(\vec{x}, t) = \sum_a g(\vec{x} - \vec{r}_{(a)}) e^{(a)} \vec{v}^{(a)}.$$

## 2. Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen

Mit  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\rho$ ,  $\vec{i}$  bezeichnen wir jetzt die mittleren Felder, welche immer noch die Maxwell-Gleichungen erfüllen. Mit dem Ausdruck (8.12) für  $\rho$ ,  $\vec{i}$  lauten sie

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (8.13)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_L, \quad \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\vec{i}_L}{c}, \quad (8.14)$$

wobei wir

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P}, \quad \vec{H} = \vec{B} - \vec{M} \quad (8.15)$$

definiert haben. Als Konsequenz gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{i}_L = 0. \quad (8.16)$$

Bezeichnung:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{elektrisches Feld}; & \vec{B} &= \text{magnetische Induktion.} \\ \vec{D} &= \text{elektrische Verschiebung}; & \vec{H} &= \text{magnetisches Feld.} \end{aligned}$$

Ein geschlossenes System von Feldgleichungen entsteht erst dann, wenn sich die Polarisationen  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  sowie  $\vec{i}_L$  durch die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ausdrücken lassen. Dazu dienen phänomenologische **Verknüpfungsgleichungen**, im einfachsten Fall:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} & (\varepsilon: \text{Dielektrizitätskonstante}) & \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} & (\mu: \text{magnetische Permeabilität}) & \\ \vec{i}_L &= \sigma \vec{E} & (\sigma: \text{elektrische Leitfähigkeit}) & \end{aligned} \quad (8.17)$$

Letzteres ist das Ohm'sche Gesetz. In dieser Form sind die Zusammenhänge linear, isotrop, lokal und instantan. Die Konstanten  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  sind Materialgrößen und hängen von

Zustandsparametern der Materie wie Druck und Temperatur ab. In anisotropen Medien, wie in gewissen Kristallen, tritt

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k \quad (8.18)$$

anstelle von (17) ( $\rightarrow$  Doppelbrechung) und analog für  $\mu_{ik}, \sigma_{ik}$ . Allenfalls können diese Gleichungen auch die Abweichungen der Felder um konstante Felder  $\vec{E}_0, \vec{B}_0$  herum beschreiben; letztere Felder bewirken eine Anisotropie:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ik} &= \varepsilon_{ik}(\vec{E}_0) && (\rightarrow \text{Kerr-Effekt}) \\ \varepsilon_{ik} &= \varepsilon_{ik}(\vec{B}_0) && (\rightarrow \text{Faraday-Effekt}) \\ \sigma_{ik} &= \sigma_{ik}(\vec{B}_0) && (\rightarrow \text{Hall-Effekt}). \end{aligned}$$

Die Zusammenhänge können auch nicht lokal sein ( $\rightarrow$  Drehung der Polarisation des Lichtes durch chirale Medien) oder nicht instantan ( $\rightarrow$  Dispersion; Brechung hängt von Lichtfrequenz ab). Sie können auch nicht linear sein (z.B. Ferromagnete).

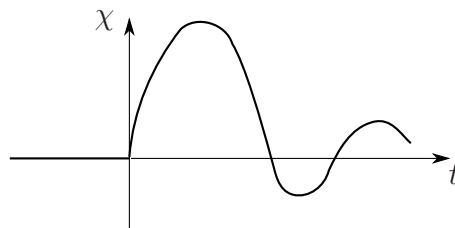
Eine Herleitung der Verknüpfungsgleichungen erfordert ein Modell der Materie; gute Resultate liefert die Quantenmechanik.

### 3. Dispersion

Für rasch veränderliche Felder sind die Verknüpfungen (8.17) nicht instantan. Wir formulieren dies am Beispiel der elektrischen Polarisation  $\vec{P}(t)$  an einer festen Stelle  $\vec{x}$  und lassen Vektorpfeile weg. Der Zusammenhang zwischen  $P(t)$  und  $E(t)$  ist

$$P(t) = \int \chi(t-s) E(s) ds. \quad (8.19)$$

Die Funktion  $\chi(t) = \varepsilon(t) - 1$  (elektrische Suszeptibilität, vgl. (8.15)) beschreibt die Polarisierbarkeit des Mediums. Man nennt sie auch „Stossantwort“, denn für die Anregung  $E(t) = \delta(t)$  (Stoss bei  $t = 0$ ) ist  $P(t) = \chi(t)$ . Die **Kausalität** verlangt, dass vor dem Stoss  $P(t) = 0$  ist, d.h.  $\chi(t) = 0$  für  $t < 0$ . Ein typischer Verlauf von  $\chi(t)$  fällt für grosse  $t$  rasch ab und ist etwa:



Wir nehmen an

$$\int_0^\infty |\chi(t)| dt < \infty. \quad (8.20)$$

Wir benützen nun die Fouriertransformation in der Form

$$\hat{f}(\omega) = \int dt f(t) e^{i\omega t}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t}. \quad (8.21)$$

Insbesondere ist im statischen Fall

$$P = \left( \int \chi(t) dt \right) \cdot E = \hat{\chi}(0)E$$

( $\hat{\chi}(0)$ : statische Suszeptibilität) und im allgemeinen

$$P(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{\chi}(\omega) \int ds e^{-i\omega(t-s)} E(s) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{\chi}(\omega) \hat{E}(\omega) e^{-i\omega t},$$

also

$$\hat{P}(\omega) = \hat{\chi}(\omega) \hat{E}(\omega) :$$

die Faltung (8.19) geht unter Fouriertransformation in ein Produkt über. Man kann  $\hat{\chi}(\omega)$  als Frequenzabhängige Suszeptibilität auffassen: Für die Anregung  $E(t) = Ee^{-i\omega t}$  ist  $P(t) = \hat{\chi}(\omega)Ee^{-i\omega t}$ . Im Unterschied zur statischen Suszeptibilität ist  $\hat{\chi}(\omega)$  nicht mehr reell. Sonst würde aus (8.21) nämlich folgen

$$\chi(-t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \hat{\chi}(\omega) e^{i\omega t} = \overline{\chi(t)} = \chi(t),$$

was im Widerspruch zur Kausalität steht, ausser im Fall  $\chi(t) = \chi \cdot \delta(t)$  eines instantanten Zusammenhangs.

**Eigenschaften** von  $\hat{\chi}(\omega)$ :

- i)  $\hat{\chi}(\omega)$  ist analytisch in  $\omega$  in der Halbebene  $\text{Im } \omega > 0$ .
- ii)  $\hat{\chi}(\omega)$  ist stetig und beschränkt in  $\text{Im } \omega \geq 0$ , und  $\chi(\omega) \rightarrow 0$  für  $|\omega| \rightarrow \infty$  (in  $\text{Im } \omega \geq 0$ ).
- iii)  $\overline{\hat{\chi}(\omega)} = \hat{\chi}(-\bar{\omega})$ .

**Beweis.** Analytizität und Beschränktheit von  $\hat{\chi}(\omega)$  folgen aus der Kausalität und aus (8.20) wegen

$$\hat{\chi}(\omega) = \int_0^\infty dt \chi(t) e^{i\omega t}, \quad |e^{i\omega t}| = e^{-\text{Im } \omega \cdot t}.$$

Die Stetigkeit in der abgeschlossenen Halbebene  $\text{Im } \omega \geq 0$  und das Verschwinden für  $|\omega| \rightarrow \infty$  folgen aus dem Riemann-Lebesgue Lemma. Eigenschaft (iii) bringt  $\overline{\chi(t)} = \chi(t)$  zum Ausdruck.  $\square$

Die Funktionen  $\text{Re } \chi(\omega)$  und  $\text{Im } \chi(\omega)$ , ( $\omega \geq 0$ ) bestimmen sich gegenseitig:

**Dispersionsrelationen** (Kramers-Kronig): Für  $\omega > 0$  ist

$$\begin{aligned} \text{Im } \hat{\chi}(\omega) &= \frac{-2\omega}{\pi} \text{P} \int_0^\infty \frac{\text{Re } \hat{\chi}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega', \\ \text{Re } \hat{\chi}(\omega) &= \frac{2}{\pi} \text{P} \int_0^\infty \frac{\omega' \text{Im } \hat{\chi}(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'. \end{aligned} \tag{8.22}$$

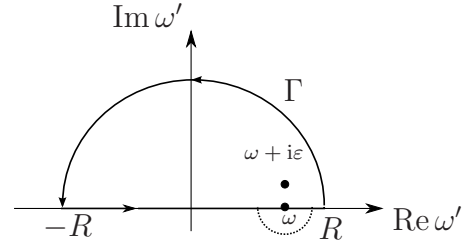
Dabei ist  $\text{P} \int \dots$  der Hauptwert des singulären Integrals:

$$\text{P} \int_0^\infty d\omega' \dots = \lim_{\delta \downarrow 0} \left( \int_0^{\omega-\delta} d\omega' \dots + \int_{\omega+\delta}^\infty d\omega' \dots \right).$$

**Beweis.** Wir stellen  $\hat{\chi}(\omega + i\varepsilon)$  dar durch die Cauchy-Integralformel

$$\hat{\chi}(\omega + i\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - (\omega + i\varepsilon)} d\omega'.$$

Im Limes  $\varepsilon \downarrow 0$  wird der Integrand singulär bei  $\omega' = \omega$ . Der Einfachheit halber habe  $\hat{\chi}(\omega')$  eine analytische Fortsetzung um  $\omega$  herum, so dass  $\Gamma$  über einen kleinen Halbkreis vom Radius  $\delta$  um  $\omega$  in die untere Halbebene umgeleitet und  $\varepsilon = 0$  gesetzt werden kann. Im Limes  $R \rightarrow \infty$  trägt der grosse Halbkreis wegen (ii) nicht zum Integral bei. Für  $\delta \downarrow 0$  nimmt das Integral über den kleinen Halbkreis den Wert  $i\pi\hat{\chi}(\omega)$  an. Somit ist



$$\hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{\pi i} \text{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{\chi}(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (8.23)$$

(Anstelle der vereinfachenden Annahme genügt es, dass  $\hat{\chi}(\omega)$  Hölder-stetig in  $\omega \in \mathbb{R}$  ist, d.h.  $|\hat{\chi}(\omega) - \hat{\chi}(\omega')| \leq c|\omega - \omega'|^\gamma$  für ein  $\gamma > 0$ . Dies gilt, falls  $\int_0^\infty dt(1+t)^\gamma |\chi(t)| < \infty$ .) Die Gleichungen (8.22) folgen nun daraus, indem man Real- und Imaginärteil von (8.23) bildet und (iii) benützt, d.h.  $\text{Re} \hat{\chi}(-\omega') = \text{Re} \hat{\chi}(\omega')$  und  $\text{Im} \hat{\chi}(-\omega') = -\text{Im} \hat{\chi}(\omega')$  für  $\omega' \in \mathbb{R}$ . Damit lässt sich das Integral auf das Intervall auf  $0 \leq \omega' < \infty$  umschreiben.  $\square$

Nebst der Kausalität spielt auch **Dissipativität** eine Rolle: Jede Polarisierung braucht Arbeit  $W > 0$ . Mit  $i(t) = \dot{P}(t)$  (vgl.(8.12)) ist diese

$$W = \int dt E(t)i(t) = \int dt E(t)\dot{P}(t) > 0 \quad (8.24)$$

(ausser für  $E \equiv \text{const}$ ). Die Konsequenzen sind

iv)  $\hat{\chi}(0) > 0$ .

v)  $\text{Im} \hat{\chi}(\omega) > 0$  für  $\omega > 0$ .

vi)  $\hat{\chi}(\omega)$  ist in  $\text{Im} \omega \geq 0$  nirgends reell ausser auf der imaginären Achse. Dort nimmt  $\hat{\chi}(\omega)$  monoton ab von  $\hat{\chi}(0) > 0$  zu  $\hat{\chi}(i\infty) = 0$ .

**Beweis.** iv) Für  $E(t) = \theta(t)$  ist nach (8.19)

$$P(t) = \int_0^\infty \chi(t-s) ds = \int_{-\infty}^t \chi(\tau) d\tau,$$

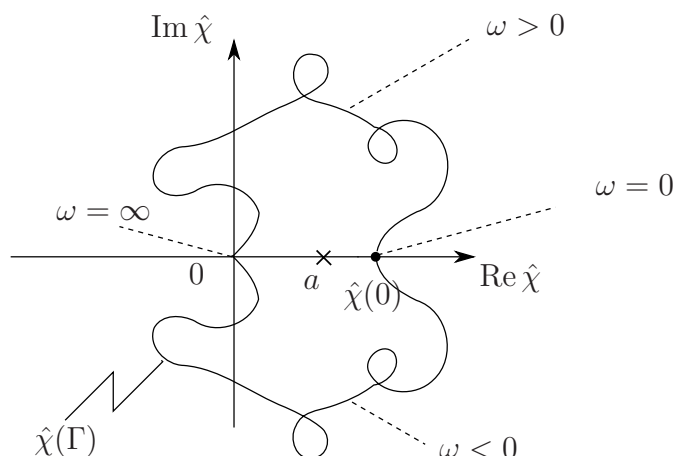
also  $\dot{P}(t) = \chi(t)$  und  $W = \int_0^\infty dt \chi(t) = \hat{\chi}(0)$ .

v) Mit  $\hat{i}(\omega) = -i\omega\hat{P}(\omega) = -i\omega\hat{\chi}(\omega)\hat{E}(\omega)$  und Parseval folgt

$$W = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \omega \hat{\chi}(\omega) |\hat{E}(\omega)|^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega \omega \text{Im} \hat{\chi}(\omega) \cdot |\hat{E}(\omega)|^2,$$

da  $\text{Re} \hat{\chi}(\omega)$  und  $|\hat{E}(\omega)|^2$  gerade sind. Da  $\hat{E}(\omega)$ , ( $\omega \neq 0$ ) beliebig ist, folgt aus (8.24)  $\text{Im} \hat{\chi}(\omega) > 0$  für  $\omega > 0$ .

vi) Das Bild der Contour  $\Gamma$  (s. Seite 59) unter  $\hat{\chi}$  ist im Limes  $R \rightarrow \infty$



wobei  $\hat{\chi}(\Gamma)$  die reelle Achse wegen (v) nur bei  $\hat{\chi}(0)$  und  $\hat{\chi}(\infty) = 0$  schneidet. Die Anzahl  $a$ -Stellen in  $\text{Im } \omega \geq 0$  ist nach dem Argumentprinzip

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} d\omega \frac{\hat{\chi}'(\omega)}{\hat{\chi}(\omega) - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\hat{\chi}(\Gamma)} \frac{d\hat{\chi}}{\hat{\chi} - a} = \begin{cases} 1 & \text{für } a \in (0, \hat{\chi}(0)] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei die letzte Gleichung für  $a$  reell gilt. Ein  $\omega$  mit  $\text{Re } \omega \neq 0$  kann keine  $a$ -Stelle sein, da sonst wegen (iii) auch  $-\bar{\omega} \neq \omega$  eine wäre. Auf der imaginären Achse kommt der Wert  $a \in (0, \hat{\chi}(0)]$  genau einmal vor: Monotonie.  $\square$

#### 4. Wellen im Dielektrikum

**Homogenes Dielektrikum.** Materielles Medium mit  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\omega) = 1 + \hat{\chi}(\omega)$ , unabhängig von  $\vec{x}$ ;  $\rho_L = 0$ ,  $\vec{i}_L = 0$ . Wir definieren den **Brechungsindex**  $n(\omega)$  durch

$$n(\omega) = \sqrt{\hat{\varepsilon}(\omega)}, \quad \text{Re } n(\omega) > 0 \quad (8.25)$$

(d.h.  $\sqrt{z}$  ist der für  $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  definierte Zweig der Wurzel). Wegen (vi) ist  $n(\omega)$  stetig in  $\text{Im } \omega \geq 0$  und analytisch in  $\text{Im } \omega > 0$ . Zudem gilt

$$\text{Im } n(\omega) \leq 0 \quad \text{für} \quad \text{Re } \omega \leq 0. \quad (8.26)$$

Beachte, dass  $n(\omega) - 1$  ebenfalls (i-iii) erfüllt, und somit auch die Kramers-Kronig-Formeln (8.22).

Die fouriertransformierten Felder  $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ ,  $\vec{B}(\vec{x}, \omega)$  erfüllen die Maxwell-Gleichungen (8.13, 8.14) in der Form

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0, & \text{rot } \vec{E} - \frac{i\omega}{c} \vec{B} &= 0, \\ \text{div } \vec{B} &= 0, & \text{rot } \vec{B} + \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \vec{E} &= 0. \end{aligned}$$



Man findet wieder die Wellengleichung

$$(\Delta + k^2)\vec{E} = (\Delta + k^2)\vec{B} = 0$$

mit

$$k^2 \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \quad (\text{komplex}).$$

Spezielle Lösungen sind **ebene Wellen**

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} n(\omega) \vec{e} \quad (8.27)$$

mit  $|\vec{e}| = 1$ , oder genauer

$$\vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} = \vec{E}_0 e^{i(\frac{\omega}{c} \operatorname{Re} n(\omega) \vec{e}\cdot\vec{x} - \omega t)} e^{-\frac{\omega}{c} \operatorname{Im} n(\omega) \vec{e}\cdot\vec{x}}.$$

Dies beschreibt eine in Richtung  $\vec{e}$  fortschreitende und exponentiell gedämpfte Welle: Die Wellenlänge ist bestimmt durch  $\operatorname{Re} n(\omega)$ , die Dämpfung (Absorption) durch  $\operatorname{Im} n(\omega)$ . Die Gleichungen (8.27) verlangen zusätzlich

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{e} = 0, \quad \vec{B} = n(\omega) \vec{e} \wedge \vec{E}. \quad (8.28)$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Analytizitätseigenschaften von  $n(\omega)$  bedingen, dass die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** des Feldes  $\leq c$  ist. Dies obschon es Frequenzbereiche geben kann, wo die Phasengeschwindigkeit  $\omega/\operatorname{Re} k = c/\operatorname{Re} n(\omega)$ , ja sogar die Gruppengeschwindigkeit  $d\omega/d(\operatorname{Re} k)$ , grösser als  $c$  sind. Wir diskutieren den Fall eines Wellenpakets mit Fortpflanzungsrichtung  $\vec{e} = (1, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{A}(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega, \\ \vec{A}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(0, t) e^{i\omega t} dt, \quad k = \frac{\omega}{c} n(\omega) \end{aligned}$$

**Behauptung:** Sei  $\vec{E}(0, t) = 0$  für  $t < 0$  (d.h.: Das Wellenpaket erreicht  $x = 0$  frühestens zur Zeit  $t = 0$ ). Dann gilt für  $x > 0$ , dass

$$\vec{E}(x, t) = 0 \quad \text{für} \quad t < \frac{x}{c}.$$

**Beweis.** Wir wollen annehmen, dass  $C = \int |\vec{E}(0, t)|^2 dt$  endlich sei. Wegen der Voraussetzung ist  $\vec{A}(\omega)$  analytisch in  $\operatorname{Im} \omega > 0$  (vgl. Eigenschaft (i) von  $\hat{\chi}$ ); mit Parseval ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{A}(\rho + i\sigma)|^2 d\rho = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(0, t) e^{-\sigma t}|^2 dt \leq 2\pi C \quad (8.29)$$

für alle  $\sigma > 0$ . Es genügt zu zeigen, dass für jede Testfunktion  $\varphi(t)$  mit  $\operatorname{supp} \varphi \subset [0, \infty)$  und für jedes  $\varepsilon > 0$  gilt

$$2\pi \int dt \bar{\varphi}\left(\frac{x}{c} - t - 2\varepsilon\right) \vec{E}(x, t) = 0. \quad (8.30)$$

Beachte, dass  $\hat{\varphi}(\omega)$  ebenfalls analytisch in  $\text{Im } \omega > 0$  ist mit

$$\sup_{\sigma \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\rho + i\sigma)|^2 d\rho < \infty. \quad (8.31)$$

Nach Parseval ist (8.30) gleich

$$\int d\omega e^{i\omega(\frac{x}{c} - 2\varepsilon)} \overline{\hat{\varphi}(-\omega)} \cdot \vec{A}(\omega) e^{ikx} = \int d\omega \vec{A}(\omega) \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega[(n-1)\frac{x}{c} + 2\varepsilon]}. \quad (8.32)$$

Dabei gilt in  $\text{Im } \omega \geq 0$

$$\begin{aligned} |e^{i\omega(n-1)\frac{x}{c}}| &\leq e^{-\text{Im } \omega(n-1)\frac{x}{c}}, \\ \text{Im} [\omega(n(\omega) - 1)] &= \text{Im } \omega \underbrace{(\text{Re } n(\omega) - 1)}_{\substack{\rightarrow 0 \\ |\omega| \rightarrow \infty}} + \underbrace{\text{Re } \omega \cdot \text{Im } n(\omega)}_{\geq 0 \text{ nach (25)}}. \end{aligned}$$

Wegen  $x > 0$  gilt für genügend grosses  $|\omega|$

$$|e^{i\omega[(n-1)\frac{x}{c} + 2\varepsilon]}| \leq e^{+\text{Im } \omega \cdot \varepsilon} e^{-\text{Im } \omega \cdot 2\varepsilon}.$$

Somit kann man in (8.32) den reellen Integrationsweg beliebig weit parallel nach  $\text{Im } \omega = \sigma > 0$  verschieben. Dort ist das Integral

$$\leq e^{-\sigma\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho |\vec{A}(\rho + i\sigma)| |\hat{\varphi}(\rho + i\sigma)|,$$

wobei letzteres Integral nach (8.29, 8.31) und der Schwarzschen Ungleichung beschränkt ist in  $\sigma$ . Die Behauptung folgt im Limes  $\sigma \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Erhaltungssätze.** Wie bemerkt, folgt die Kontinuitätsgleichung (8.16) aus den makroskopischen Maxwell-Gleichungen (8.13, 8.14). Die Erhaltungssätze für Energie, Impuls und Drehimpuls lassen sich grundsätzlich nicht durch die mittleren Felder ausdrücken, da diese Erhaltungsgrößen als das Produkt zweier Felder gegeben sind und der Mittelwert des Produkts nicht das Produkt der Mittelwerte ist. Dennoch gibt es ein Analogon zum Energiesatz (2.24). Definieren wir nämlich den Poynting Vektor neu als

$$\vec{S} = c \vec{E} \wedge \vec{H}, \quad (8.33)$$

so folgt aus den Maxwell-Gleichungen

$$\left( \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) + \text{div } \vec{S} + \vec{i}_L \cdot \vec{E} = 0.$$

Der erste Term lässt sich aber nur unter sehr speziellen Bedingungen als zeitliche Ableitung einer Energiedichte schreiben. Falls  $\vec{D}$  und  $\vec{E}$ , bzw.  $\vec{B}$  und  $\vec{H}$  durch (8.18) instantan verknüpft sind und

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki}$$

gilt, so ist

$$\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u = \frac{1}{2} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}).$$

Die entsprechende Energie  $\int u d^3x$  ist dann in nicht leitenden Medien ( $\sigma_{ik} = 0$ ) erhalten.

**Randbedingungen.** An Grenzflächen zwischen zwei Medien sind die Felder  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$  im allgemeinen unstetig. Mit  $\parallel$  und  $\perp$  bezeichnen wir die Komponenten parallel und senkrecht zur Grenzfläche  $F$ . Stetig sind nach (8.13)

$$\vec{B}_\perp \quad \text{und} \quad \vec{E}_\parallel \tag{8.34}$$

immer, sowie nach (8.14) auch

$$\vec{D}_\perp \quad \text{und} \quad \vec{H}_\parallel, \tag{8.35}$$

falls  $F$  keine flächenhaften Leitungsladungen bzw. -ströme trägt. Der Beweis ist analog zu denen von (1.16, 1.17, 2.16). Stetig ist dann auch die Normalkomponente des Poynting-Vektors

$$\vec{S}_\perp = c(\vec{E}_\parallel \wedge \vec{H}_\parallel). \tag{8.36}$$

In diesem Sinn ist (8.33) eine vernünftige Fortsetzung der Energiestromdichte vom Vakuum ins Innere eines materiellen Mediums.

# 9. Anwendungen der makroskopischen Maxwell-Gleichungen

## 1. Reflexion und Brechung

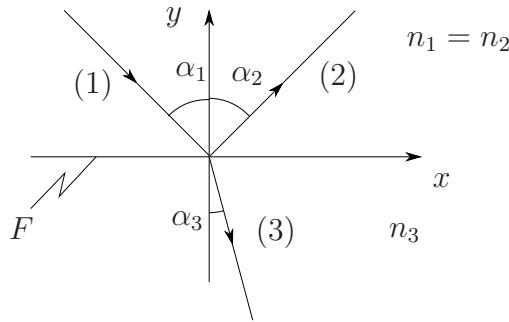
Homogenes Dielektrikum:  $\varepsilon$  reell (oder  $\text{Im } \varepsilon(\omega)$  vernachlässigbar),  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Lösungen der Feldgleichungen (8.27) sind die monochromatischen ebenen Wellen (8.27, 8.28) der Fortpflanzungsrichtung  $\vec{e}$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, & \vec{E}_0 \cdot \vec{e} &= 0 \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= n \vec{e} \wedge \vec{E}(\vec{x}, t), & \vec{k} &= n \frac{\omega}{c} \vec{e},\end{aligned}\tag{9.1}$$

mit Brechungsindex  $n = \sqrt{\varepsilon}$ . Die Intensität der Welle ist das Zeitmittel von  $|\vec{S}|$  und lässt sich wie auf Seite 25 durch die komplexen Felder darstellen:

$$I = \frac{c}{2} n (\vec{E}, \vec{E}) = \frac{c}{2} \frac{1}{n} (\vec{B}, \vec{B}).$$

Wir betrachten nun die Reflexion und Brechung einer ebenen Welle an der ebenen Grenzfläche  $F$  zwischen zwei homogenen Dielektrika:



Die Indizes 1, 2, 3 bezeichnen wir die drei Wellen;  $x, y, z$  die Koordinatenachsen. Die Randbedingung für jede stetige Komponente  $A$  ist

$$A_1 e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + A_2 e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} = A_3 e^{i\vec{k}_3 \cdot \vec{x}}, \quad (\vec{x} \in F).$$

Daraus folgt:

$$\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3 \text{ haben gleiche Projektionen auf } F; \tag{9.2}$$

$$A_1 + A_2 = A_3. \tag{9.3}$$

Die Einfallsebene  $N$  ist die durch  $\vec{k}_1$  und der Normale zu  $F$  festgelegte Ebene ( $xy$ -Ebene in der Figur). Bedingung (9.2) impliziert, dass die drei Wellenvektoren in  $N$  liegen, und dass gilt

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 = n_3 \sin \alpha_3, \tag{9.4}$$

wegen  $n_1 = n_2$  insbesondere  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Dies ist das Gesetz der Reflexion und Brechung (Snellius 1621, Ibn Sahl 984) der geometrischen Optik. Darüber hinaus liefert (9.3) auch die Intensitätsverhältnisse. Wir betrachten zwei Polarisationsfälle, aus denen der allgemeine Fall durch Superposition entsteht.

**TE-Fall** (Transversales elektrisches Feld:  $\vec{E} \perp N$ )

Die nicht identisch verschwindenden, stetigen Feldkomponenten sind nach (8.34, 8.35):

$$\begin{array}{c|c|c} E_z & H_x = B_x = n e_y E_z & B_y = -n e_x E_z \\ \hline E_1 & -n_1 E_1 \cos \alpha_1 & -n_1 E_1 \sin \alpha_1 \\ E_2 & n_1 E_2 \cos \alpha_1 & -n_1 E_2 \sin \alpha_1 \\ E_3 & -n_3 E_3 \cos \alpha_3 & -n_3 E_3 \sin \alpha_3 \end{array}$$

Die Stetigkeitsbedingungen lauten somit:

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 &= E_3, \\ E_1 - E_2 &= E_3 \frac{n_3 \cos \alpha_3}{n_1 \cos \alpha_1}, \end{aligned}$$

denn die letzte Spalte ist ein Vielfaches der ersten. Mit (4) folgt daraus

$$\left. \begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \end{array} \right\} = \frac{E_3}{2} \left( 1 \pm \frac{n_3 \cos \alpha_3}{n_1 \cos \alpha_1} \right) = \frac{E_3}{2} \left( 1 \pm \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_1} \right). \quad (9.5)$$

Eine Komponente (z.B.  $E_3$ ) bleibt wegen der Homogenität des Problems unbestimmt. Für die Intensitäten folgt aus (9.5)

$$(I_1 - I_2) \cos \alpha_1 = \frac{c}{2} n_1 (\bar{E}_1 + \bar{E}_2) (E_1 - E_2) \cos \alpha_1 = \frac{c}{2} n_3 |E_3|^2 \cos \alpha_3 = I_3 \cos \alpha_3,$$

d.h.

$$I_1 \cos \alpha_1 = I_2 \cos \alpha_1 + I_3 \cos \alpha_3,$$

entsprechend der Stetigkeit (8.36) des Energieflusses in  $y$ -Richtung. Für das Reflexionsvermögen erhält man:

$$\begin{aligned} I_2/I_1 &= (E_2/E_1)^2, \\ \frac{E_2}{E_1} &= \frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_1 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_3 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3} = \frac{\sin(\alpha_3 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_3 + \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

**TM-Fall** (Transversales magnetisches Feld:  $\vec{B} \perp N$ )

Die nicht identisch verschwindenden, stetigen Feldkomponenten sind hier  $H_z = B_z$ ,  $E_x = -n^{-1} e_x B_z$ ,  $D_y$ , wobei letztere wieder redundant ist. Wegen  $\vec{E} = -n^{-1} (\vec{e} \wedge \vec{B})$  erhalten wir diesen Fall aus (9.5) durch die Vertauschungen  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ ,  $n \rightarrow 1/n$ :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} B_1 \\ B_2 \end{array} \right\} &= \frac{B_3}{2} \left( 1 \pm \frac{n_1 \cos \alpha_3}{n_3 \cos \alpha_1} \right) = \frac{B_3}{2} \left( 1 \pm \frac{\sin \alpha_3 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1} \right), \\ \frac{B_2}{B_1} &= \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 - \sin \alpha_3 \cos \alpha_3}{\sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_3 \cos \alpha_3} = \frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_3)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_3)}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

sowie  $I_2/I_1 = (B_2/B_1)^2$ . Gleichungen (9.6, 9.7) sind die Fresnelschen Formeln — von Fresnel mit einer mechanischen Lichttheorie hergeleitet.

Diskussion:

### Senkrechte Inzidenz (TE = TM)

Für  $\alpha_1 = 0$  folgt aus jedem der beiden Fälle

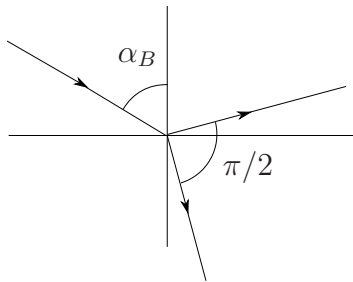
$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{-B_2}{B_1} = \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3},$$

also

$$\frac{I_2}{I_1} = \left( \frac{n_1 - n_3}{n_1 + n_3} \right)^2. \quad (9.8)$$

Dieses Ergebnis ist invariant unter Vertauschung der beiden Medien.

### Brewster-Winkel:



$\alpha_1 = \alpha_B$  ist der Einfallswinkel, für den der reflektierte Strahl senkrecht auf dem gebrochenen steht:  $\alpha_1 + \alpha_3 = \pi/2$ . Dann ist im TM-Fall  $B_2 = 0$ : kein reflektierter Strahl. Für eine beliebige einfallende Welle ist also der reflektierte Strahl linear (TE) polarisiert.

### Totalreflexion

Es sei  $n_3 < n_1$ . Der Grenzwinkel  $\alpha_1 = \alpha_T$  der Totalreflexion ist der Einfallswinkel, für den  $\alpha_3 = \pi/2$ :

$$\sin \alpha_T = \frac{n_3}{n_1}.$$

Im Bereich  $\alpha_1 > \alpha_T$  hat die Gleichung

$$\sin \alpha_3 = \frac{n_1}{n_3} \sin \alpha_1 \quad (> 1)$$

die komplexen Lösungen:

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{2} + i\gamma,$$

$$\sin \alpha_3 = \operatorname{ch} \gamma = \frac{n_1}{n_3} \sin \alpha_1,$$

wobei das Vorzeichen von  $\gamma$  unbestimmt ist. Der Wellenvektor  $\vec{k}_3$  wird komplex:

$$\vec{k}_3 = k_3(\sin \alpha_3, -\cos \alpha_3, 0) = k_3(\operatorname{ch} \gamma, i \operatorname{sh} \gamma, 0)$$

( $k_3 = n_3\omega/c$ ) und damit die Phase der gebrochenen Welle

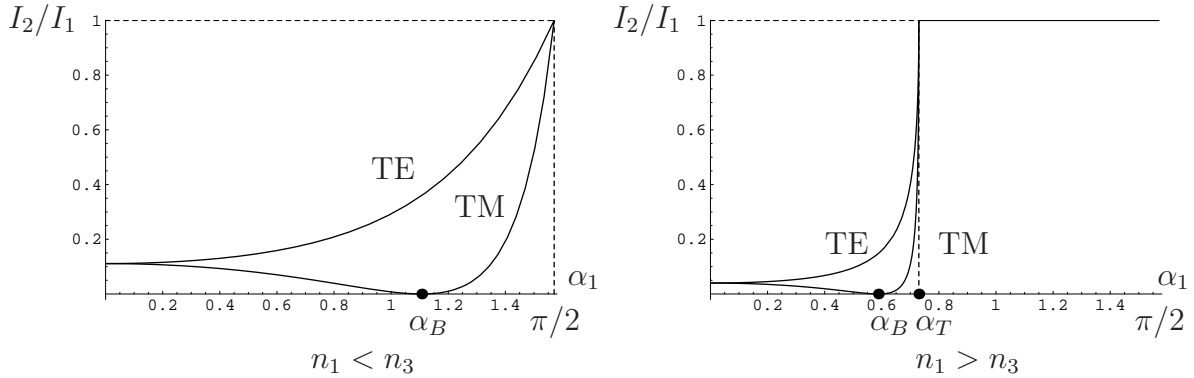
$$e^{i(\vec{k}_3 \cdot \vec{x} - \omega t)} = e^{i(k_3 x \operatorname{ch} \gamma - \omega t)} \cdot e^{-k_3 y \operatorname{sh} \gamma}.$$

Diese Welle ist exponentiell gedämpft für  $y \rightarrow -\infty$ , falls wir die Lösung  $\gamma < 0$  wählen (die andere Lösung entspricht einer unphysikalischen Randbedingung bei  $y = -\infty$ ). Z.B. lautet im TE-Fall (9.6)

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\cos \alpha_1 \operatorname{ch} \gamma + i \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \gamma}{\cos \alpha_1 \operatorname{ch} \gamma - i \sin \alpha_1 \operatorname{sh} \gamma}.$$

Dies ist vom Betrag 1, also  $I_1 = I_2$ : Totalreflexion.

## Intensitätsverlauf



Für  $\alpha_1 = 0$  gilt in beiden Fällen (9.8).

## 2. Das Feld in einem Leiter

$\mu = 1$ ,  $\varepsilon \approx 1$ ,  $\sigma$  reell und frequenzunabhängig (diese Annahmen treffen bei tiefen Frequenzen bis in den Mikrowellenbereich zu). Die letzte Maxwell-Gleichung (8.27) ist zu modifizieren gemäss

$$\operatorname{rot} \vec{B} + i \frac{\omega}{c} \varepsilon \vec{E} = \frac{\sigma}{c} \vec{E},$$

was einer frequenzabhängigen Dielektrizitätskonstanten

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon + i \frac{\sigma}{\omega}$$

gleichkommt. Für  $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$  resultiert daraus

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{Re} n(\omega) \\ \operatorname{Im} n(\omega) \end{array} \right\} = \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2}{\omega^2}} \pm \varepsilon \right) \right]^{1/2}.$$

Nach (8.28),

$$\vec{B} = n \vec{e} \wedge \vec{E}, \quad n = |n| e^{i\varphi}, \quad (9.9)$$

ist  $|n|$  das Amplitudenverhältnis der Felder und  $\varphi$  deren Phasenverschiebung. Im Spezialfall eines **guten Leiters**,

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \varepsilon,$$

ist

$$n = (1 + i) \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega}}, \quad |n| = \sqrt{\frac{\sigma}{\omega}}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad (9.10)$$

Insbesondere ist das  $\vec{B}$ -Feld wesentlich stärker als das  $\vec{E}$ -Feld. Beim Eintritt des Felds von aussen ( $\vec{E}_0, \vec{B}_0, n_0 = 1$ ) in den Leiter ist nach (9.5, 9.7)

$$\frac{E}{E_0} = \frac{2}{2+n} = O(\sqrt{\omega/\sigma}), \quad \frac{B}{B_0} = \frac{2n}{2+n} = O(1)$$

an der Grenzfläche. Nach innen fällt das Feld exponentiell ab, und zwar nach (8.27) auf den  $1/e$ -ten Teil innerhalb der **Eindringtiefe**

$$\delta = \frac{c}{\omega \operatorname{Im} n(\omega)} = \sqrt{\frac{2c^2}{\sigma\omega}}.$$

Sie ist für grosse  $\omega$  (mit  $\omega \ll \sigma$ ) klein (**Skineffekt**). Für  $\omega \rightarrow 0$  (statischer Grenzfall) divergiert  $\delta$ , aber nur das  $\vec{B}$ -Feld dringt ein.

### 3. Das Feld in einem Supraleiter

In einem idealen Leiter ( $\sigma = \infty$ ) folgen freie Ladungsträger (Masse  $m$ , Ladung  $e$ ) der Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{B}).$$

Bezogen auf das Geschwindigkeitsfeld  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  ist

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}(\vec{x}(t), t)$$

und damit die Beschleunigung

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \vec{v}^2}{2} - \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v}.$$

Mit  $\operatorname{rot} \vec{E} = -c^{-1} \partial \vec{B} / \partial t$  folgt daraus

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\vec{v} \wedge \vec{\omega}), \quad (9.11)$$

wobei

$$\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{v} + \frac{e}{mc} \vec{B}. \quad (9.12)$$

( $\vec{\omega}$  ist die Wirbeldichte  $\operatorname{rot} \vec{v}'$  in einem mit der Larmorfrequenz  $-(e/2mc)\vec{B}$  rotierenden Bezugssystem:  $\vec{v}' = \vec{v} + (e/2mc)\vec{B} \wedge \vec{x}$ ). In einem **Supraleiter** (vom Typ I) ist darüber hinaus

$$\vec{\omega} = 0,$$

was mit (9.11) konsistent ist, und die Dichte  $n$  der Ladungsträger ist konstant (Inkompressibilität). Für die Stromdichte  $\vec{i} = ne\vec{v}$  gilt somit

$$\operatorname{rot} \vec{i} + \frac{ne^2}{mc} \vec{B} = 0 \quad (9.13)$$

(London-Gleichung). Zusammen mit  $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{i}/c$  folgt im stationären Fall ( $\partial \vec{E} / \partial t = 0$ )

$$\Delta \vec{B} = \Lambda^{-2} \vec{B}, \quad \Delta \vec{i} = \Lambda^{-2} \vec{i},$$

wobei

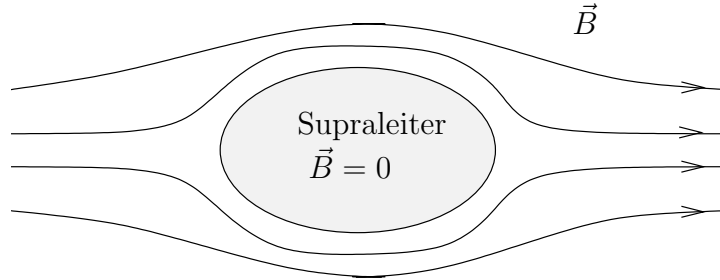
$$\Lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{ne^2}}$$



die **London-Eindringtiefe** ist. Als Beispiel betrachten wir ebene Lösungen der Form

$$\vec{B}(\vec{x}) = \vec{B}_0 e^{-\vec{e} \cdot \vec{x} / \Lambda}, \quad \vec{j}(\vec{x}) = \vec{j}_0 e^{-\vec{e} \cdot \vec{x} / \Lambda}$$

( $|\vec{e}| = 1$ ), wobei  $\vec{j}_0 = -c\Lambda^{-1}\vec{e} \wedge \vec{B}_0$ . Die Felder fallen exponentiell ab und dringen nur über eine Länge  $\Lambda$  in den Supraleiter ein (**Meissner-Ochsenfeld-Effekt**).



Die Stromdichte  $\vec{j}$  in der Nähe des Randes schirmt im Innern das äussere  $\vec{B}$ -Feld ab. Dieses übt nach Seite 51 einen Druck  $\vec{B}^2/2$  auf den Supraleiter aus ( $\rightarrow$  magnetische Levitation).

Erst die Quantenmechanik kann die London Gleichung (9.13) begründen. Die Stromdichte eines Zustandes  $\psi(\vec{x}, t) = a(\vec{x}, t)e^{iS(\vec{x}, t)}$  ist

$$\vec{j} = \frac{e}{2m} \left( \overline{\psi} \cdot \left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi + \overline{\left( \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi} \cdot \psi \right).$$

Die Wellenfunktion  $\psi$  ist die gemeinsame Wellenfunktion aller Ladungsträger. Deren Dichte  $n = \sum_i |\psi|^2$  wollen wir wieder konstant annehmen (also  $a(\vec{x}, t) = a$ ). Dann ist die totale Stromdichte

$$\vec{j} = \frac{e}{m} \left( \hbar \vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \sum_i |\psi|^2 = \frac{e}{m} \left( \hbar \vec{\nabla} S - \frac{e}{c} \vec{A} \right) n.$$

Es folgt

$$\text{rot } \vec{j} = -\frac{ne^2}{mc} \vec{B},$$

d.h. (9.13). Mikroskopisch gesehen sind die Ladungsträger Elektronenpaare (Cooper-Paare). Mit  $m = 2m_e$ ,  $e = 2e_e$ ,  $n = n_e/2$  ist aber

$$\frac{ne^2}{m} = \frac{n_e e_e^2}{m_e}.$$

#### 4. Streuung von Licht in Materie

Strahlung in homogener Materie verläuft geradlinig (siehe (8.27)). Inhomogenitäten stellen wir dar durch räumlich begrenzte Abweichungen  $\varepsilon_1(\vec{x}) = \varepsilon_1(\vec{x}, \omega)$  der Dielektrizitätskonstanten um einen festen Wert  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\vec{\omega})$  herum:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \quad \mu = 1.$$

Im Sinne einer formalen Störungsrechnung entwickeln wir die Felder nach Potenzen von  $\varepsilon_1$ , z.B.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \dots, \quad \vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{D}_0 + \vec{D}_1 + \dots$$

mit  $\vec{D}_0 = \varepsilon_0 \vec{E}_0$ ,  $\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \vec{E}_1 + \varepsilon_1 \vec{E}_0$ . Typischerweise ist  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  eine einfallende ebene Welle:

$$\vec{E}_0 = \vec{\varepsilon}_0 e^{i(k\vec{\varepsilon}_0 \vec{x} - \omega t)}, \quad k = \frac{\omega}{c} n$$

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{\varepsilon}_0 = 0, \quad n = \sqrt{\varepsilon}$$

( $\vec{\varepsilon}_0$ : Polarisierung). Die makroskopischen Maxwell-Gleichungen (8.13, 8.14) lauten in erster Ordnung (mit  $\rho_L = \vec{v}_L = 0$ ; bei Frequenz  $\omega$ )

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B}_1 &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E}_1 - \frac{i\omega}{c} \vec{B}_1 &= 0 \\ \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}_1 &= \operatorname{div} \varepsilon_1 \vec{E}_0, & \operatorname{rot} \vec{B}_1 + \frac{i\omega}{c} \varepsilon_0 \vec{E}_1 &= -\frac{i\omega}{c} \varepsilon_1 \vec{E}_0. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Dies ist formal identisch mit den Maxwell-Gleichungen auf Seite 19 für Felder  $\varepsilon_0 \vec{E}_1$ ,  $n \vec{B}$ , Lichtgeschwindigkeit  $c/n$  und Quellen

$$\rho = -\operatorname{div}(\varepsilon_1 \vec{E}_0), \quad \vec{v} = -i\omega \varepsilon_1 \vec{E}_0,$$

die der Kontinuitätsgleichung genügen. Die retardierte Lösung (4.3) ist

$$\varepsilon_0 \vec{E}_1 = -\frac{i\omega n}{c} \vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \vec{A}),$$

$$\vec{A} = -\frac{i\omega n}{4\pi r c} \int d^3 y \varepsilon_1(\vec{y}) \vec{\varepsilon}_0 e^{ik\vec{\varepsilon}_0 \cdot \vec{y}} \cdot e^{-i\omega(t - \frac{n}{c}|\vec{x} - \vec{y}|)},$$

d.h., mit  $|\vec{x} - \vec{y}| \cong r - \vec{e} \cdot \vec{y}$ ,

$$\vec{E}_1 = -\vec{e} \wedge (\vec{e} \wedge \vec{\varepsilon}_0) \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \int d^3 y \varepsilon_1(\vec{y}) e^{-ik(\vec{e} - \vec{\varepsilon}_0) \cdot \vec{y}}$$

(**Bornsche Näherung**). Der Polarisationsanteil  $\vec{\varepsilon} \perp \vec{e}$  ist

$$\vec{\varepsilon} \cdot \vec{E}_1 = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}_0 \cdot \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \int d^3 y \varepsilon_1(\vec{y}) e^{-ik(\vec{e} - \vec{\varepsilon}_0) \cdot \vec{y}}.$$

Der **differentielle Streuquerschnitt**  $d\sigma/d\Omega$  für die Streuung aus der Richtung  $\vec{e}_0$  und aus der Polarisierung  $\vec{\varepsilon}_0$  nach  $\vec{e}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  erhält man durch Vergleich zwischen Flächen-  $d\sigma$  und Raumwinkelement  $d\Omega$ , durch die ein- bzw. ausfallende Strahlung gleichen Energiestroms tritt:

$$\frac{c}{2} |\vec{\varepsilon}_0|^2 d\sigma = \frac{c}{2} |\vec{\varepsilon} \cdot \vec{E}_1|^2 r^2 d\Omega.$$

Daraus ergibt sich (Rayleigh)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vec{e}, \vec{\varepsilon}; \vec{e}_0, \vec{\varepsilon}_0) = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 |\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}_0|^2 \mathcal{F}(\vec{q}),$$

wobei  $\mathcal{F}$  der Strukturfaktor ist,

$$\mathcal{F}(\vec{q}) = \left| \int d^3 y \varepsilon_1(\vec{y}) e^{-i\vec{q} \cdot \vec{y}} \right|^2, \quad (\vec{q} = k(\vec{e} - \vec{e}_0)). \quad (9.15)$$

Für Objekte  $\varepsilon_1(\vec{y})$ , deren Abmessungen klein gegenüber der Lichtwellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$  sind, kann man das Exponential in (9.15) gleich 1 setzen. Dann ist  $\mathcal{F}(\vec{q}) = \mathcal{F}$  und der gesamte Streuquerschnitt beträgt

$$\sigma = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \mathcal{F} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \mathcal{F}, \quad (9.16)$$

$$\mathcal{F} = \left| \int d^3y \varepsilon_1(\vec{y}) \right|^2,$$

(Dipolnäherung).

In Gasen treten Dichteschwankungen auf über Längen, die gross sind gegenüber atomaren Abmessungen aber klein gegenüber  $\lambda$ . Dort ist  $\varepsilon - 1$  annähernd proportional zur Dichte  $\rho$ , also

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0 - 1} = \frac{\delta\rho}{\rho_0},$$

wobei  $\delta\rho(\vec{x})$  die Fluktuation bezeichnet. Damit ist der Strukturfaktor eines Volumens  $V$  im Mittel

$$\mathcal{F}(\vec{q}) = \left(\frac{\varepsilon_0 - 1}{\rho_0}\right)^2 \int_V d^3y d^3y' \langle \delta\rho(\vec{y}) \delta\rho(\vec{y}') \rangle e^{i\vec{q}\cdot(\vec{y}-\vec{y}')},$$

wobei  $\langle \dots \rangle$  noch den Mittelwert bzgl. einem statistischen Ensemble (z.B. grosskanonische Gesamtheit) bezeichnet. Typischerweise erstrecken sich die Korrelationen  $\langle \delta\rho(\vec{y}) \delta\rho(\vec{y}') \rangle$  nur über Abstände  $|\vec{y} - \vec{y}'| \ll \lambda$ . Damit kann das Exponential wieder gleich 1 gesetzt werden und

$$\mathcal{F}(\vec{q}) = \left(\frac{\varepsilon_0 - 1}{\rho_0}\right)^2 \left\langle \left( \int_V d^3y \delta\rho(\vec{y}) \right)^2 \right\rangle \equiv \mathcal{F}$$

ist wieder unabhängig von  $\vec{q}$ . Solche Schwankungsquadrate sind annähernd proportional zu  $|V|$  (nicht zu  $|V|^2!$ ), und zwar ist (siehe Statistical Physics)

$$|V|^{-1} \left\langle \left( \int_V d^3y \delta\rho(\vec{y}) \right)^2 \right\rangle \xrightarrow{V \rightarrow \infty} kT \rho_0^2 \beta_T,$$

wobei  $T$ : Temperatur,  $p$ : Druck

$$\beta_T = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_T : \quad \text{isotherme Kompressibilität}$$

$$v = 1/\rho_0 : \quad \text{Volumen pro Teilchen.}$$

Damit ist der **Extinktionskoeffizient**  $\alpha = \sigma/|V|$  (Streuquerschnitt pro Volumeneinheit) gegeben durch

$$\alpha = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 (\varepsilon_0 - 1)^2 kT \cdot \beta_T \quad (9.17)$$

(Einstein-Smolukowski). Im Fall eines idealen Gases,  $pv = kT$ , ist  $kT\beta_T = \rho_0^{-1}$ ; ferner ist  $\varepsilon_0 - 1 = n^2 - 1$  klein, also  $\cong 2(n - 1)$ , so dass (Rayleigh)

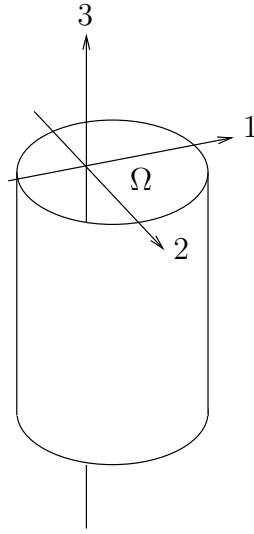
$$\alpha = \frac{2}{3\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 (n - 1)^2 \cdot \rho_0^{-1}.$$

Hohe Frequenzen  $\omega$  werden viel stärker gestreut als tiefe, im sichtbaren Bereich also blau mehr als rot. Dies erklärt das **Himmelsblau** und, komplementär dazu, das **Abendrot**. Falls  $\rho_0^{-1}$  das Volumen pro Mol statt pro Teilchen bezeichnen soll, so ist es durch  $(\rho_0 N_A)^{-1}$  zu ersetzen, wobei  $N_A$  die Avogadrozahl ist: Besäße die Materie keine atomare Struktur ( $N_A \rightarrow \infty$ ), so fände auch keine Absorption statt.

Für ein Gas-Flüssigkeitsgemisch in der Nähe des kritischen Punktes divergiert die Korrelationslänge:  $\beta_T \rightarrow \infty$ . Das Gemisch wird undurchsichtig (**kritische Opaleszenz**).

# 10. Wellenleiter

## 1. Das Randwertproblem



Unendlich langer Hohlzylinder mit Querschnitt  $\Omega$ ; ideal leitende Wand (kein Feld im Innern der Wand); im Zylinder Vakuum; Feld monochromatisch  $\sim e^{-i\omega t}$ .

### Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} - ik\vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{B} + ik\vec{E} &= 0 \end{aligned} \quad (10.1)$$

mit  $k = \omega/c > 0$ . Die Nebenbedingungen  $\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{B} = 0$  sind dann auch erfüllt. Ferner folgt

$$(\Delta_3 + k^2)\vec{E} = (\Delta_3 + k^2)\vec{B} = 0. \quad (10.2)$$

Dazu kommen die Randbedingungen

$$\vec{E}_{\parallel} = 0, \quad \vec{B}_{\perp} = 0. \quad (10.3)$$

Wir suchen Lösungen der Form

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2)e^{i(\kappa x_3 - \omega t)}$$

für jede Feldkomponente  $f$ . Dann ist  $\operatorname{rot} \vec{E} = ((i\kappa \underline{E} - \nabla E_3)^\perp, \operatorname{rot} \underline{E})$  mit  $\underline{E} = (E_1, E_2)$  und  $\underline{E}^\perp := (-E_2, E_1)$ . Die 1, 2 Komponenten von (10.1) lauten

$$i\kappa \underline{E} + ik\underline{B}^\perp = \nabla E_3, \quad (10.4)$$

$$ik\underline{E} + i\kappa \underline{B}^\perp = (\nabla B_3)^\perp, \quad (10.5)$$

wobei die zweite Gleichung aus der ersten durch  $(\vec{E}, \vec{B}) \rightsquigarrow (\vec{B}, -\vec{E})$  hervorgeht:  $i\kappa \underline{B} - ik\underline{E}^\perp = \nabla B_3$ . Ferner gilt nach (10.2)

$$\begin{aligned} (\Delta + \lambda)E_3 &= 0, & (\Delta + \lambda)B_3 &= 0, \\ \lambda &= k^2 - \kappa^2, \end{aligned} \quad (10.6)$$

wobei  $\Delta = \Delta_2$  der Laplace-Operator in 2 Dimensionen ist, und zwar mit Randbedingungen

$$E_3 = 0, \quad \frac{\partial B_3}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Sie folgen aus (10.3), bzw. zusammen mit (10.5). Wir nehmen vorläufig an

$$\lambda \neq 0 \quad (10.7)$$

Dann haben die beiden Gleichungen (10.4, 10.5) für  $(E_1, B_2)$  bzw.  $(E_2, B_1)$  je nichtverschwindende Determinante, d.h. das Feld ist vollständig bestimmt durch  $E_3, B_3$ :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= i\lambda^{-1}(\kappa \nabla E_3 - k(\nabla B_3)^\perp), \\ \underline{B} &= i\lambda^{-1}(\kappa \nabla B_3 + k(\nabla E_3)^\perp). \end{aligned} \quad (10.8)$$

Zudem sind die 3-Komponenten von (10.1) erfüllt, sobald (10.6) gelten. Der allgemeine Fall ergibt sich durch Superposition der Spezialfälle:

**TM-Fall:**  $B_3 = 0$  (transversal bzgl.  $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ ). Das Feld ist bestimmt durch  $\chi = E_3$  mit

$$(\Delta + \lambda)\chi = 0; \quad \chi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (10.9)$$

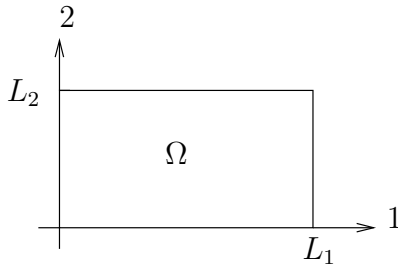
(Dirichlet-Eigenwertproblem).

**TE-Fall:**  $E_3 = 0$ . Dann ist das Feld bestimmt durch  $\chi = B_3$  mit

$$(\Delta + \lambda)\chi = 0; \quad \frac{\partial\chi}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (10.10)$$

(Neumann-Eigenwertproblem).

**Beispiel:**  $\Omega$  ein rechteckiger Querschnitt



$$\text{TM: } \chi = \sin k_1 x_1 \sin k_2 x_2; \\ k_i = \frac{\pi}{L_i} n_i, \quad n_i > 0, \text{ ganz}$$

$$\text{TE: } \chi = \cos k_1 x_1 \cos k_2 x_2; \\ k_i = \frac{\pi}{L_i} n_i, \quad n_i \geq 0, \text{ ganz}$$

Die Eigenwerte sind nummeriert durch den Index  $\alpha = (n_1, n_2)$  und sind in beiden Fällen

$$\lambda_\alpha = k_1^2 + k_2^2.$$

Damit (10.7) gilt, ist im TE-Fall  $n_1 = n_2 = 0$  auszuschliessen.

Allgemein bilden die Eigenfunktionen von (10.9), bzw. (10.10), je ein orthonormiertes Funktionensystem  $\{\chi_\alpha\}$ :

$$(\chi_\alpha, \chi_\beta) \equiv \int_\Omega d^2x \bar{\chi}_\alpha \chi_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (10.11)$$

(bei passender Normierung). Denn: Für zwei Lösungen  $(\chi_1, \lambda_1)$ ,  $(\chi_2, \lambda_2)$  desselben Eigenwertproblems (10.9) oder (10.10) ist

$$0 = \int_{\partial\Omega} ds \left( \bar{\chi}_1 \frac{\partial\chi_2}{\partial n} - \chi_2 \frac{\partial\bar{\chi}_1}{\partial n} \right) = \int_\Omega d^2x (\bar{\chi}_1 \Delta\chi_2 - \chi_2 \Delta\bar{\chi}_1) = (\bar{\lambda}_1 - \lambda_2) (\chi_2, \chi_1).$$

Somit sind die Eigenwerte reell (setze  $\chi_1 = \chi_2$ ) und  $(\chi_1, \chi_2) = 0$  falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Ferner ist für jede Eigenfunktion  $\chi$

$$0 \leq \int_\Omega d^2x \vec{\nabla}\bar{\chi} \cdot \vec{\nabla}\chi = - \int_\Omega d^2x \bar{\chi} \Delta\chi = \lambda(\chi, \chi),$$

also  $\lambda \geq 0$  und  $\lambda = 0$  nur für  $\chi = \text{const}$ , was nur im TE-Fall möglich ist. Die Eigenfunktionen  $\chi_\alpha$  zu Eigenwerte  $\lambda \neq 0$  bilden im TM-Fall eine Basis im Hilbertraum  $L^2(\Omega)$ , im TE-Fall bloss eine für den Unterraum aller  $\chi \in L^2(\Omega)$  mit

$$\int_\Omega d^2x \chi = 0.$$

**Der Fall  $\lambda = 0$ :** Dann ist  $E_3 = 0, B_3 = \text{const}$ . Daraus folgt aber  $B_3 = 0$ , denn wegen (10.1, 10.3) ist

$$0 = \int_{\partial\Omega} \vec{E} \cdot d\vec{s} = ikB_3 \int_{\Omega} d^2x.$$

Somit sind  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  transversal: TEM-Fall. Die Gleichungen (10.4, 10.5) besagen

$$\vec{B} = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}.$$

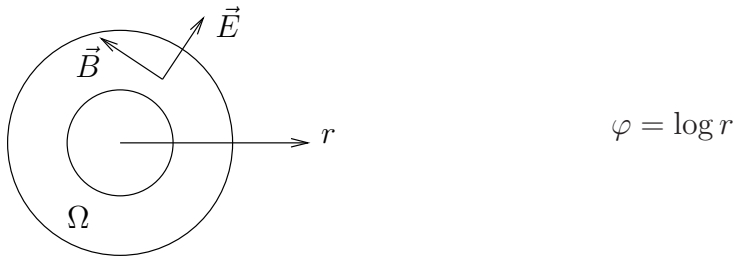
Für das 2-dimensionale  $\vec{E}$ -Feld gilt nach der 3-Komponente von (10.1)  $\text{rot } \vec{E} = E_{2,1} - E_{1,2} = 0$ , ja sogar

$$\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

für jeden geschlossenen Weg  $\Gamma$  in  $\Omega$ , da man wegen  $\text{rot } \vec{E} = 0$  den Weg  $\Gamma$  auf den Rand  $\partial\Omega$  verlegen kann, wo (10.3) gilt. Somit ist

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{\nabla}\varphi, & \Delta\varphi &= 0 \\ \varphi &= c_k \text{ auf jeder Zusammenhangskomponente } (\partial\Omega)_k \text{ von } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Ist  $\Omega$  einfach zusammenhängend, so folgt  $\varphi = \text{const}$ ,  $\vec{E} = \vec{B} = 0$ . Eine TEM-Welle kann also nur für mehrfach zusammenhängende Gebiete auftreten, z.B.:



Bei  $n$  Komponenten von  $\partial\Omega$  gibt es  $n - 1$  linear unabhängige TEM-Wellen. Wir verfolgen den Fall  $\lambda = 0$  nicht weiter.

## 2. Ausbreitung der Wellen

Jeder Eigenfunktion (Mode)  $\chi_\alpha$  zum Eigenwert  $\lambda_\alpha$  entsprechen bei gegebener Frequenz  $\omega$  zwei Wellen mit den Phasen

$$e^{i(\kappa_\alpha x_3 - \omega t)}, \quad \kappa_\alpha = \pm \sqrt{k^2 - \lambda_\alpha^2}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (10.12)$$

Da die Eigenwerte  $\lambda_\alpha$  unbegrenzt wachsen, ist  $\kappa_\alpha$  reell nur für endlich viele Moden  $\alpha$ : nur diese pflanzen sich ungedämpft fort. Für  $\lambda_\alpha > (\omega/c)^2$  ist  $\kappa_\alpha$  imaginär: die Welle (10.12) ist für  $x_3 \rightarrow +\infty$  oder  $x_3 \rightarrow -\infty$  exponentiell abfallend.

Im Halbzylinder  $x_3 \geq 0$  kann man bei bekannter Anregung

$$E_3 = E(x_1, x_2)e^{-i\omega t}, \quad B_3 = B(x_1, x_2)e^{-i\omega t}$$

im Querschnitt  $x_3 = 0$  das Feld durch Entwicklung nach Eigenfunktionen konstruieren. Im TM-Fall ( $B = 0$ ):

$$E_3(\vec{x}, t) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \chi_{\alpha}(x_1, x_2) e^{i(\kappa_{\alpha} x_3 - \omega t)} \quad (10.13)$$

$$c_{\alpha} = \int_{\Omega} d^3x \bar{\chi}(x_1, x_2) E(x_1, x_2),$$

wobei  $\kappa_{\alpha} > 0$  zu wählen ist für  $\lambda_{\alpha} < (\omega/c)^2$  und  $\text{Im } \kappa_{\alpha} > 0$  für  $\lambda_{\alpha} > (\omega/c)^2$ . Für grosse  $x_3$  sind in der Entwicklung (10.13) nur die fortpflanzungsfähigen Moden von Bedeutung. Entsprechendes gilt im TE-Fall: Wegen (10.1, 10.3) gilt

$$\int_{\Omega} d^2x B(x_1, x_2) = 0,$$

sodass  $B(x_1, x_2)$  nach TE-Moden ( $\lambda_{\alpha} \neq 0$ ) entwickelt werden kann.

Für eine feste Mode  $\alpha$  lautet das Dispersionsgesetz

$$\omega_{\alpha}(\kappa) = c\sqrt{\lambda_{\alpha} + \kappa^2}.$$

Man kann damit ein Wellenpaket der Form

$$\chi(\vec{x}, t) = \chi_{\alpha}(x_1, x_2) \int d\kappa f(\kappa) e^{i(\kappa x_3 - \omega_{\alpha}(\kappa)t)}$$

bilden. Falls sich der Träger von  $f$  in einer kleinen Umgebung von  $\kappa_0$  befindet, so bewegt sich diese Welle mit der Gruppengeschwindigkeit

$$\left. \frac{d\omega_{\alpha}}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} = c \frac{\kappa_0}{\sqrt{\lambda_{\alpha} + \kappa_0^2}} \leq c.$$

Im Unterschied dazu ist die Phasengeschwindigkeit

$$\frac{\omega_{\alpha}}{\kappa} = c \frac{\sqrt{\lambda_{\alpha} + \kappa^2}}{\kappa} \geq c.$$

### 3. Ohmsche Verluste in der Wand

In einem guten ( $\sigma \gg \omega$ ) aber nicht idealen Leiter dringen die Felder in die Wand ein, was zu einer dissipativen Dämpfung der Felder führt. Nach (9.9, 9.10) gilt für eine Welle der Fortpflanzung  $\vec{e}$  im Leiter

$$\vec{E} = -\gamma(\vec{e} \wedge \vec{B}) \quad (10.14)$$

mit

$$\gamma = n^{-1} = (1 - i)\sqrt{\frac{\omega}{2\sigma}}.$$

Wegen der Kleinheit der Eindringtiefe  $\delta$  ändern sich eindringende Felder viel rascher normal als parallel zur Wand, sodass allgemein (10.14) näherungsweise gilt mit  $\vec{e}$ : Ausennormale des Hohlraums. Da  $\vec{E}_{\parallel}$  und  $\vec{H}_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$  an der Grenzfläche stetig sind, ist die Randbedingung  $\vec{E}_{\parallel} = 0$  zu ersetzen durch

$$\vec{E}_{\parallel} = -\gamma(\vec{e} \wedge \vec{B}). \quad (10.15)$$



Hier spielt  $\gamma \rightarrow 0$  die Rolle eines kleinen Störparameters ( $\gamma \rightarrow 0$  für  $\sigma \rightarrow \infty$ ).

Störungsrechnung: Man hält  $k = \omega/c$  fest und entwickelt alle weiteren Größen nach Potenzen von  $\gamma$ , z.B.

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}^0 + \gamma \vec{E}^1 + \gamma^2 \vec{E}^2 + \dots, \\ \lambda &= \lambda^0 + \gamma \lambda^1 + \dots.\end{aligned}$$

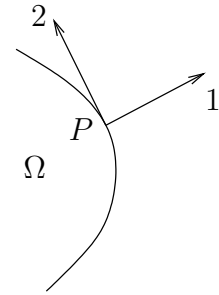
Dann setzt man diese Reihen in die Feldgleichungen und Randbedingungen ein und macht den Koeffizientenvergleich. Die Glieder Nullter Ordnung beschreiben dann eine Lösung des ungestörten Problems (ideal leitende Wand).

Randbedingungen 1. Ordnung: Sie sind bestimmt durch die Lösung in 0. Ordnung gemäss

$$E_3^1 = -\vec{B}_0 \cdot \vec{t}, \quad (10.16)$$

$$\frac{\partial B_3^1}{\partial n} = \frac{i\lambda^0}{k} B_3^0 - \frac{\kappa^0}{k} \frac{\partial}{\partial s} \vec{B}_0 \cdot \vec{t} + \frac{\kappa^1}{k} \frac{\partial E_3^0}{\partial s}, \quad (10.17)$$

wobei  $\vec{t}$  der Tangentialvektor zum orientierten Rand  $\partial\Omega$  ist, und  $\partial/\partial s = \vec{t} \cdot \vec{\nabla}$  die Ableitung nach dessen Bogenlänge. Die Komponenten beziehen sich auf Koordinaten wie in der Figur, sodass bei  $P$  gilt  $\partial/\partial n = 1$ ;  $\partial/\partial s = 2$ . Dann besagt (10.15)



$$E_2^1 = B_3^0, \quad E_3^1 = -B_2^0,$$

wobei die zweite Gleichung mit (10.16) identisch ist. Durch Elimination von  $B_1$  aus den 1-Komponenten von (10.4, 10.5) folgt

$$B_{3,1} = \frac{i\lambda}{k} E_2 + \frac{\kappa}{k} E_{3,2},$$

also in 1. Ordnung

$$\begin{aligned}B_{3,1}^1 &= \frac{i\lambda^0}{k} E_2^1 + \frac{i\lambda^1}{k} \underbrace{E_2^0}_{=0} + \frac{\kappa^0}{k} E_{3,2}^1 + \frac{\kappa^1}{k} E_{3,2}^0 \\ &= \frac{i\lambda^0}{k} B_3^0 - \frac{\kappa^0}{k} B_{2,2}^0 + \frac{\kappa^1}{k} E_{3,2}^0.\end{aligned}$$

**TM-Fall** ( $B_3^0 = 0$ ). Aus (10.8) in 0. Ordnung folgt

$$B_2^0 = \frac{ik}{\lambda^0} E_{3,1}^0,$$

d.h.  $\vec{B}_0 \cdot \vec{t} = (ik/\lambda^0) \cdot \partial E_3^0 / \partial n$ . Damit lautet die Randbedingung (10.16) für  $\chi = E_3 = \chi^0 + \gamma \chi^1 + \dots$

$$\chi^1 = \frac{-ik}{\lambda^0} \frac{\partial \chi^0}{\partial n}. \quad (10.18)$$

**TE-Fall** ( $E_3^0 = 0$ ). Aus (10.8) folgt diesmal

$$B_2^0 = \frac{i\kappa^0}{\lambda^0} B_{3,2}^0$$

d.h.  $\vec{B}_0 \cdot \vec{t} = (i\kappa^0/\lambda^0)\partial B_3^0/\partial s$ . Die Randbedingung (10.17) für  $\chi = B_3$  ist

$$\frac{\partial \chi^1}{\partial n} - \frac{i\lambda^0}{k}\chi^0 = \frac{i(\kappa^0)^2}{k\lambda^0} \frac{\partial^2 \chi^0}{\partial s^2}. \quad (10.19)$$

Eigenwertstörung in 1. Ordnung: Wir führen die Rechnung durch für einen nicht entarteten Eigenwert  $\lambda^0$ . Aus

$$(\Delta + \lambda^0 + \gamma\lambda^1 + \dots)(\chi^0 + \gamma\chi^1 + \dots) = 0$$

folgt in 1. Ordnung

$$(\Delta + \lambda^0)\chi^1 = -\lambda^1\chi^0. \quad (10.20)$$

Zusammen mit der Randbedingung (10.18) oder (10.19) kann man daraus die Eigenwertstörung  $\lambda^1$  bestimmen. Wir normieren

$$\int_{\Omega} d^2x \bar{\chi}^0 \chi^0 = 1. \quad (10.21)$$

Dann folgt aus (10.20) durch Multiplikation mit  $\bar{\chi}^0$

$$\begin{aligned} -\lambda^1 &= \int_{\Omega} d^2x \bar{\chi}^0 (\Delta + \lambda^0) \chi^1 \\ &= \int_{\Omega} d^2x \chi^1 \underbrace{(\Delta + \lambda^0) \bar{\chi}^0}_{=0} + \int_{\partial\Omega} (\bar{\chi}^0 \frac{\partial \chi^1}{\partial n} - \chi^1 \frac{\partial \bar{\chi}^0}{\partial n}) ds. \end{aligned}$$

**TM-Fall.** Dann ist  $\chi^0 = 0$  auf  $\partial\Omega$  und aus (10.18) folgt

$$\lambda^1 = \frac{-ik}{\lambda^0} \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \chi^0}{\partial n} \right|^2 ds}_{=:a}.$$

**TE-Fall.** Aus  $\partial\chi^0/\partial n = 0$  (auf  $\partial\Omega$ ) und aus (10.19) folgt

$$\lambda^1 = \frac{-i\lambda^0}{k} \underbrace{\int_{\partial\Omega} |\chi^0|^2 ds}_{=:b} - \frac{i(\kappa^0)^2}{k\lambda^0} \underbrace{\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial \chi^0}{\partial s} \right|^2 ds}_{=:d},$$

wobei wir im letzten Term eine partielle Integration ausgeführt haben.

Die Zahlen  $a, b$  sind  $> 0$  ( $d \geq 0$ ) und hängen nur vom Querschnitt  $\Omega$  und von der betrachteten ungestörten Mode ab, nicht aber von  $\omega$ .

Dämpfung: für die Wellenzahl gilt in 1. Ordnung:

$$\kappa = \underbrace{(k^2 - \lambda - \gamma\lambda^1)}_{(\kappa^0)^2}^{1/2} = \kappa^0 - \frac{\gamma}{2\kappa^0}\lambda^1.$$

Wir betrachten den Fall  $\omega > 0$ ,  $\kappa^0 > 0$  einer im idealen Hohlleiter ungedämpften Welle. Wegen

$$|e^{i\kappa x_3}| = e^{-(\text{Im } \kappa)x_3}$$

beschreibt

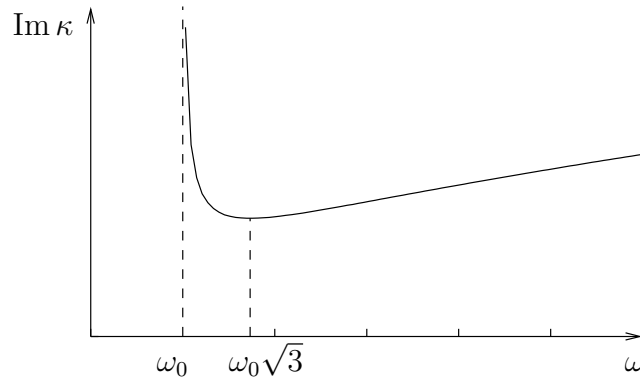
$$\operatorname{Im} \kappa = -\operatorname{Im} \frac{\gamma \lambda^1}{2\kappa^0} = -\frac{1}{2\kappa^0} (\operatorname{Re} \gamma) (\operatorname{Im} \lambda^1)$$

die Dämpfung in 1. Ordnung als Folge der Ohmschen Verluste in der Wand.

**TM-Fall.**

$$\operatorname{Im} \kappa = \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \cdot \frac{ac^2}{2\omega_0^2 \sqrt{2\sigma}}$$

wobei  $\omega_0^2 = c^2 \lambda^0$  die tiefste Frequenz ist, für die die betrachtete Mode fortpflanzungsfähig ist. Die Dämpfung ist minimal für  $\omega = \omega_0 \sqrt{3}$ , für jeden Querschnitt und jede Mode.



**TE-Fall.**

$$\operatorname{Im} \kappa = \frac{\omega^{3/2}}{\sqrt{\omega^2 - \omega_0^2}} \frac{c^2}{2\omega_0^2 \sqrt{2\sigma}} \left[ d \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + b \frac{\omega_0^4}{c^2 \omega^2} \right].$$

Der Verlauf ist qualitativ ähnlich wie im TM-Fall, die Lage  $\omega/\omega_0$  des Minimums hängt aber vom Querschnitt und von der Mode ab. Eine Ausnahme bilden rotationssymmetrische Moden eines kreisförmigen Querschnitts: dort ist  $\chi^0 = \text{const}$  auf  $\partial\Omega$ , also  $d = 0$ . Damit ist  $\operatorname{Im} \kappa = O(\omega^{-3/2})$ , statt  $O(\omega^{+1/2})$ , für grosse  $\omega$ .

**Beispiel.** Im Beispiel des rechteckigen Querschnitts liefern die Eigenfunktionen (bei Berücksichtigung der von (10.21) abweichenden Normierung):

TM-Fall:

$$a = \frac{4\pi^2}{L_1 L_2} \left( \frac{L_2}{L_1^2} n_1^2 + \frac{L_1}{L_2^2} n_2^2 \right), \quad (n_i > 0)$$

TE-Fall:

$$b = \frac{4}{L_1 L_2} (L_1 + L_2), \quad d = \frac{4\pi^2}{L_1 L_2} \left( \frac{n_1^2}{L_1} + \frac{n_2^2}{L_2} \right), \quad (n_1, n_2 > 0),$$

bzw.

$$b = \frac{2}{L_1 L_2} (L_1 + L_2), \quad d = \frac{2\pi^2}{L_1 L_2} \cdot \frac{n_1^2}{L_1^2}, \quad (n_1 > 0, n_2 = 0).$$

# 11. Das Feld einer Punktladung

## 1. Das retardierte Potential

Die Bewegung einer Punktladung  $e$  sei gegeben durch ihre (zeitartige) Weltlinie  $y(\tau)$  ( $\tau$ : Eigenzeit,  $u = dy/d\tau$ : 4er-Geschwindigkeit). Die zugehörige Stromdichte ist (8.9)

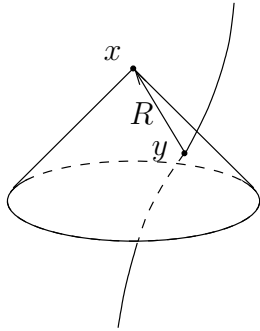
$$j^\mu(y) = ec \int d\tau u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(y - y(\tau)).$$

Das retardierte Potential (siehe Seite 42) ist mit  $R = x - y$

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &= \frac{e}{2\pi} \int d^4y \int d\tau \delta^{(1)}((R, R)) \theta(R^0) u^\mu(\tau) \delta^{(4)}(y - y(\tau)) \\ &= \frac{e}{2\pi} \int d\tau \delta^{(1)}((R, R)) \theta(R^0) u^\mu(\tau), \end{aligned} \quad (11.1)$$

denn wegen der  $\delta^{(4)}$ -Funktion kann  $R$  ersetzt werden durch

$$R = R(\tau) = x - y(\tau).$$



Es ist stets  $v < c$ , d.h.  $|\vec{u}| < u^0$ . Für jedes  $x \in \mathbb{R}^4$  hat  $\tau \mapsto (R, R)$  genau eine Nullstelle  $\tau = \tau(x)$  mit  $R^0 > 0$ . Dies ist aus der Figur ersichtlich, aber auch dadurch, dass bei jeder solcher Nullstelle gilt

$$\frac{d}{d\tau}(R, R) = 2(R, \frac{dR}{d\tau}) = -2(R, u) = 2(\vec{u} \cdot \vec{R} - u^0 R^0) < 0,$$

da  $\vec{u} \cdot \vec{R} \leq |\vec{u}| |\vec{R}| < u^0 R^0$ . Wegen

$$\delta^{(1)}(f(\tau)) = \sum_{i: f(\tau_i)=0} |f'(\tau_i)|^{-1} \delta^{(1)}(\tau - \tau_i)$$

ist

$$\delta^{(1)}((R, R)) = \frac{1}{2(R, u)} \delta^{(1)}(\tau - \tau(x))$$

mit  $R = R(\tau(x))$ ,  $u = u(\tau(x))$ . Damit lautet (11.1)

$$A^\mu(x) = \frac{e}{4\pi} \frac{u^\mu}{(R, u)} \quad (11.2)$$

(**Liénard-Wiechert Potential**).

**Retardierte Feld.** Zur Berechnung des Feldes  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  benötigen wir die ersten Ableitungen von  $\tau(x)$ : aus

$$(R, R) = 0 \quad \text{für} \quad R(x) = x - y(\tau(x))$$

folgt

$$0 = \partial_\mu (R, R) = 2R_\alpha \partial_\mu R^\alpha = 2R_\alpha (\delta_\mu^\alpha - u^\alpha \tau_{,\mu}),$$

also

$$\tau_{,\mu} = \frac{R_{\mu}}{(R, u)}. \quad (11.3)$$

Aus (11.2) folgt nun

$$4\pi\partial_{\mu}A_{\nu} = \frac{R_{\mu}}{(R, u)} \frac{d}{d\tau} \frac{eu_{\nu}}{(R, u)} - \frac{e}{(R, u)^2} u_{\mu}u_{\nu},$$

da  $\partial_{\mu}(x^{\alpha} - y^{\alpha})u_{\alpha} = u_{\mu}$ . Der letzte Term ist symmetrisch und trägt deshalb nicht zum Feld bei. Es ist

$$\frac{d}{d\tau}(R, u) = -(u, u) + (R, w) = -c^2 + (R, w),$$

wobei  $w = du/d\tau$  die 4er-Beschleunigung ist, also

$$\frac{d}{d\tau} \frac{u_{\nu}}{(R, u)} = \frac{1}{(R, u)^2} [w_{\nu}(R, u) + u_{\nu}(c^2 - (R, w))].$$

Damit erhält man für das retardierte Feld

$$4\pi F^{\mu\nu} = \frac{e}{(R, u)^3} (R^{\mu}b^{\nu} - R^{\nu}b^{\mu})$$

mit

$$b^{\nu} = c^2u^{\nu} + (R, u)w^{\nu} - (R, w)u^{\nu}. \quad (11.4)$$

Wir bemerken, dass eine Komponente  $\propto u$  von  $w$  zu  $b^{\nu}$  und somit zum Feld nichts beiträgt.

**Dreidimensionale Formeln.** Wir benutzen die Notationen

$$R^{\mu} = r(1, \vec{n}), \quad r = |\vec{R}| = R^0, \quad \vec{n} = \frac{\vec{R}}{r}, \quad \vec{\beta} = \vec{v}/c, \quad \dot{\vec{\beta}} = d\vec{\beta}/dt.$$

Aus  $E_i = F^{i0}$ ,  $B_i = -F^{i+1i+2}$  folgt

$$\begin{aligned} 4\pi\vec{E} &= \frac{er}{(R, u)^3} (b^0\vec{n} - \vec{b}), \\ 4\pi\vec{B} &= -\frac{er}{(R, u)^3} \vec{n} \wedge \vec{b} = \vec{n} \wedge 4\pi\vec{E}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Zur Berechnung von  $b^{\nu}$  brauchen wir

$$\begin{aligned} u^{\mu} &= \frac{c}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1, \vec{\beta}), \\ w^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{du^{\mu}}{dt} = \frac{c}{1 - \beta^2} (0, \dot{\vec{\beta}}) + \frac{c\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{(1 - \beta^2)^2} (1, \vec{\beta}). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Der letzte Term ist  $\propto u^{\mu}$  und kann somit nach obiger Bemerkung ignoriert werden. Dann ist

$$\begin{aligned} (R, u) &= \frac{rc}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}), & (R, w) &= -\frac{rc}{1 - \beta^2} \vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}, \\ (R, u)w^{\nu} - (R, w)u^{\nu} &= \frac{rc^2}{(1 - \beta^2)^{3/4}} (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}} (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) \dot{\vec{\beta}} + (\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\pi\vec{E} &= \frac{erc^3}{(R,u)^3(1-\beta^2)^{1/2}}(\vec{n}-\vec{\beta}) + \frac{e(rc)^2}{(R,u)^3(1-\beta^2)^{3/2}}[(\vec{n}\cdot\dot{\vec{\beta}})(\vec{n}-\vec{\beta}) - (1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})\cdot\dot{\vec{\beta}}] \\
&= \frac{e(1-\beta^2)}{r^2(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}(\vec{n}-\vec{\beta}) + \frac{e}{rc(1-\vec{n}\cdot\vec{\beta})^3}\vec{n}\wedge[(\vec{n}-\vec{\beta})\wedge\dot{\vec{\beta}}].
\end{aligned} \tag{11.7}$$

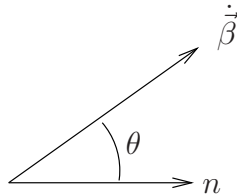
Für  $\dot{\vec{\beta}} = 0$  bleiben nur die Terme der Ordnung  $r^{-2}$  übrig: Eine gleichförmig bewegte Punktladung strahlt nicht. Der Term der Ordnung  $r^{-1}$  ist linear in der Beschleunigung  $\dot{\vec{\beta}}$ . In dieser Ordnung ist auch  $\vec{E}$  transversal zu  $\vec{n}$ , d.h.  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  verhalten sich wie in einer ebenen Welle. Zu beachten ist stets, dass sich die Grössen  $r$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\dot{\vec{\beta}}$  auf die retardierte Position der Punktladung beziehen.

## 2. Ausgestrahlte Energie

Wir definieren die ausgestrahlte Leistung als

$W(t)$  = Energiestrom zur Zeit  $t + r/c$  durch die Kugel vom Radius  $r$  um  $\vec{y}(t)$ , im Limes  $r \rightarrow \infty$ .

Für  $\dot{\vec{\beta}} = 0$  folgt aus (11.5, 11.7):



$$\begin{aligned}
\vec{S} &= c\vec{E}^2 \cdot \vec{n} + O(r^{-3}) \\
&= \frac{c}{16\pi^2} \left(\frac{e}{rc}\right)^2 \dot{\vec{\beta}}^2 \sin^2\theta \cdot \vec{n} + O(r^{-3}), \\
W &= \frac{e^2}{6\pi c} \dot{\vec{\beta}}^2,
\end{aligned} \tag{11.8}$$

(Larmor). Dies entspricht der elektrischen Dipolstrahlung (vgl. Seite 31):  $\vec{p} = e\vec{v} = ce\vec{\beta}$ .

Für  $\dot{\vec{\beta}} \neq 0$  benützen wir ein Kovarianzargument: Der abgestrahlte 4er-Impuls zwischen zwei Ereignissen auf der Weltlinie des Teilchens,

$$P^\mu = c^{-1} \int_{(1)}^{(2)} W^\mu(t) dt, \tag{11.9}$$

bzw.

$$dP^\mu = c^{-1}W^\mu dt,$$

ist ein **4er Vektor**. (Ein Beweis folgt weiter unten.) Speziell ist  $W^0 = W$ . Im Ruhesystem ( $\dot{\vec{\beta}} = 0$ ) ist  $W^\mu = (W, \vec{0})$ . Für  $i = 1, 2, 3$  ist nämlich wegen  $\vec{E} \cdot \vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{n} = 0$  und  $\vec{E}^2 = \vec{B}^2$ , also (siehe (7.3))

$$\sum_{k=1}^3 T_{ik}n_k = \vec{E}^2 n_i.$$

Damit ist

$$c^{-1}W^i = r^2 \int d^2n \sum_{k=1}^3 T_{ik}n_k = r^2 \int d^2n \vec{E}^2 n_i = 0, \tag{11.10}$$

da für  $\vec{\beta} = 0$   $\vec{E}^2$  eine gerade Funktion von  $\vec{n}$  ist. Die Gleichung

$$W^\mu dt = -\frac{e^2}{6\pi c^4} (w, w) u^\mu d\tau \quad (11.11)$$

ist manifest lorentzinvariant und gilt (wie wir gleich sehen werden) im Ruhesystem, also in jedem Inertialsystem. Aus (11.6) folgt

$$\begin{aligned} \frac{(w, w)}{c^2} &= (1 - \beta^2)^{-3} \left( -(1 - \beta^2) \dot{\vec{\beta}}^2 + \frac{(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2}{1 - \beta^2} (1 - \beta^2) - 2(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right) \\ &= -(1 - \beta^2)^{-3} \left[ \dot{\vec{\beta}}^2 - \underbrace{(\vec{\beta}^2 \dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2)}_{(\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})^2} \right]. \end{aligned}$$

Wegen  $u^0 d\tau = c dt$  gilt speziell:

$$W = \frac{e^2}{6\pi c} (1 - \beta^2)^{-3} (\dot{\vec{\beta}}^2 - (\vec{\beta} \wedge \dot{\vec{\beta}})^2) \quad (11.12)$$

(Liénard). Für  $\beta = 0$  stimmt somit (11.11) mit (11.8, 11.10) überein.

Wir holen noch den formalen Beweis nach, dass (11.9) ein 4er-Vektor ist. Nach Definition ist

$$W^\mu(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x^0 = \frac{r}{c} + t} \sum_{k=1}^3 T^{\mu k}(x) d\sigma_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{x^0 = \frac{r}{c} + t} \theta(r - |\vec{R}|)_{,\nu} T^{\mu\nu} d^3x$$

mit  $\vec{R} = \vec{x} - \vec{y}(\tau(t))$ , da

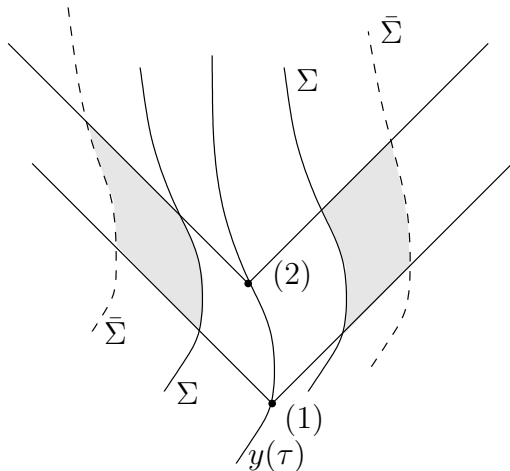
$$\theta(r - |\vec{R}|)_{,k} = \delta(r - |\vec{R}|) \frac{R^k}{|\vec{R}|}, \quad \theta(r - |\vec{R}|)_{,0} = 0.$$

Nun ist

$$\int_{x^0 = \frac{r}{c} + t} d^3x \dots = \int d^4x \left( \frac{\partial}{\partial t} \theta\left(\frac{r}{c} + t - x^0\right) \right) \dots,$$

so dass

$$cP^\mu = \lim_{r \rightarrow \infty} \int \theta\left(\frac{r}{c} + t - x^0\right) \Big|_{(1)}^{(2)} \theta(r - |\vec{R}|)_{,\nu} T^{\mu\nu} d^4x$$



Der Träger des Integranden ist der Teil von  $\Sigma = \{|\vec{R}| = r\}$  zwischen den Zeiten  $t_1 + r/c$  und  $t_2 + r/c$  oder, was dasselbe ist, zwischen den beiden Vorwärtslichtkegeln. Damit ist

$$cP^\mu = - \lim_{r \rightarrow \infty} \int \theta(r - |\vec{R}|)_{,\nu} \theta(R^0) \theta((x - y(\tau))^2) \Big|_{(1)}^{(2)} T^{\mu\nu} d^4x.$$

Der Träger der letzten  $\theta$ -Funktion ist das Gebiet zwischen den beiden Lichtkegel. Damit können die ersten beiden  $\theta$ -Funktionen ersetzt werden durch

$$(\theta(r - |\vec{R}|)\theta(R^0))_{,\nu}.$$

Um nun den 4er-Vektorcharakter nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass

$$U^{\mu\nu}(x) = \theta((x - y(\tau))^2) T^{\mu\nu}(x)$$

( $\tau = \tau_1$  oder  $\tau_2$ ) asymptotisch

$$U^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$$

erfüllt (vgl. dazu Seiten 48, 50: durch partielle Integration zeigt man  $a_\mu P^\mu - \bar{a}_\mu \bar{P}^\mu = 0$  für die Differenz der Werte in zwei Bezugssystemen; keine Randterme im Unendlichen, da diese im schraffierten Bereich getragen sind.) Es ist

$$\begin{aligned} U^{\mu\nu}_{,\nu} &= \theta T^{\mu\nu}_{,\nu} + \theta_{,\nu} T^{\mu\nu} \\ &= 2\delta((R, R)) T^{\mu\nu} R_\nu, \quad (R = x - y(\tau)), \end{aligned}$$

da  $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$  weg von der Weltlinie. Bei  $F^{\mu\nu}$  kann man den Term  $c^2 u^\nu$  in (11.4) weglassen, da er asymptotisch nichts beiträgt. Der Rest liefert ein Feld mit  $\vec{E}^2 = \vec{B}^2$ , also (vgl. Seite 44) mit  $T^{\mu\nu} = F^\mu_\sigma F^{\sigma\nu}$ . Schliesslich ist

$$F^{\sigma\nu} R_\nu = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{(R, u)^3} (R^\sigma b^\nu R_\nu - b^\sigma R^\nu R_\nu) = 0,$$

da  $R^\nu R_\nu = 0$  und  $b^\nu R_\nu = (R, u)(R, w) - (R, w)(R, u) = 0$ . ( $T^{\mu\nu}\theta_{,\nu} = 0$  bedeutet, dass kein 4er-Impulsstrom durch die Lichtkegel fliesst: Die Strahlung verläuft eben parallel dazu.)

### 3. Strahlungsdämpfung

Wir begnügen uns mit einer heuristischen Diskussion. Ein Teilchen bewege sich in einem äusseren statischen elektromagnetischen Feld. Sei  $E$  die Energie des Teilchens und des Felds, inklusive seines eigenen, in einem grossen Gebiet. Energieerhaltung (2.24) erfordert, dass sie gemäss der abgestrahlten Leistung abnimmt: Im nicht-relativistischen Limes ist nach (11.8)

$$\Delta E = -\frac{e^2}{6\pi c^3} \int_{(1)}^{(2)} \dot{v}^2 dt = -\frac{e^2}{6\pi c^3} \left( \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} \Big|_{(1)}^{(2)} - \int_{(1)}^{(2)} \vec{v} \cdot \ddot{\vec{v}} dt \right).$$

Wir wollen annehmen, dass  $\dot{\vec{v}}(t_i) = 0$ , ( $i = 1, 2$ ), oder dass die Bahn periodisch ist, so dass die Randterme verschwinden. Dann kann  $\Delta E$  als die Arbeit  $\int_{(1)}^{(2)} \vec{K} \cdot \vec{v} dt$  der Kraft

$$\vec{K} = \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{\vec{v}} \tag{11.13}$$



angesehen werden: sie stellt die Rückwirkung des Feldes auf die Ladung dar. Zusammen mit der Lorentz-Kraft (2.20) des äusseren Felds oder einer anderen äusseren Kraft  $\vec{F}$  lautet die Newtonsche Bewegungsgleichung

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} + \frac{e^2}{6\pi c^3} \ddot{\vec{v}}, \quad (11.14)$$

(Lorentz). Unüblich daran ist, dass es sich um eine Differentialgleichung handelt, die  $\ddot{\vec{v}}$  enthält. Als Anfangswertproblem betrachtet, hängen somit die Lösungen auch von der anfänglichen Beschleunigung ab.

### Beispiele:

1)  $\vec{F} = 0$ : Teilchen in seinem Eigenfeld. Die Lösungen sind

$$\dot{\vec{v}} = \dot{v}_0 e^{\frac{6\pi c^3 m}{e^2} t}. \quad (11.15)$$

Ausser für  $\dot{v}_0 = 0$  (also  $\vec{v} = \text{const}$ ) sind diese exponentiell anwachsenden Lösungen unphysikalisch (die Voraussetzungen von (11.13) sind auch nicht erfüllt).

2)  $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{x}$ : Oszillator der Frequenz  $\omega_0$ :

$$\ddot{\vec{x}} - \frac{e^2}{6\pi c^3 m} \dddot{\vec{x}} + \omega_0^2 \vec{x} = 0$$

hat Lösungen

$$\vec{x}(t) = \text{Re}(\vec{x}_0 e^{\Omega t})$$

mit

$$p(\Omega) \equiv \Omega^2 - \frac{e^2}{6\pi c^3 m} \Omega^3 + \omega_0^2 = 0$$

Es gibt eine positive Lösung, die aber unphysikalisch ist, und zwei komplex-konjugierte Lösungen, die wir für

$$\omega_0 \cdot \frac{e^2}{6\pi c^3 m} \ll 1$$

diskutieren. In erster Ordnung in diesem Störparameter ist  $\Omega = i\omega_0 - \delta$  mit

$$-2i\omega_0 \cdot \delta + \frac{e^2}{6\pi m c^3} \cdot i\omega_0^3 = 0,$$

d.h. die Dämpfung der Oszillation ist

$$\delta = \frac{e^2}{12\pi m c^3} \omega_0^2.$$

Die relativistisch kovariante Verallgemeinerung von (11.14) ist (von Laue)

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu + \frac{e^2}{6\pi c^3} (\delta^\mu_\nu - u^\mu u_\nu) \frac{d^2 u^\nu}{d\tau^2}, \quad (11.16)$$

denn: Die rechte Seite ist konsistent mit  $u_\mu u^\mu = c^2$ ,  $u_\mu F^\mu = 0$  und die räumlichen Komponenten der Gleichung stimmen im Ruhesystem mit (11.14) überein.

Fasst man  $e^2$  als kleinen Störparameter auf, so lautet die Gleichung in derselben Ordnung in  $e^2$  auch

$$m \frac{du^\mu}{d\tau} = F^\mu + \frac{e^2}{6\pi m c^3} (\delta^\mu_\nu - u^\mu u_\nu) \frac{dF^\mu}{d\tau} \quad (11.17)$$

(Landau-Lifschitz). Beachte, dass sie keine Ableitungen der Beschleunigung mehr enthält, auch dann nicht, wenn  $F^\mu$  von einem äusseren elektromagnetischen Feld stammt:  $F^\mu = (e/m)F^{\mu\nu}u_\nu$ . Damit ist  $du^\mu/d\tau = 0$  für  $F^\mu \equiv 0$  und es treten keine unphysikalische Lösungen (11.15) mehr auf. Es stellt sich heraus, dass (11.17) eine bessere Begründung als (11.16) zulässt: Man fasse das Teilchen (Masse  $m_0$ ) als ein ausgedehntes auf mit sphärisch symmetrischer Ladungsverteilung  $\rho_R(\vec{x}) = R^3 \rho(\vec{x}/R)$  im Ruhesystem und berücksichtige die Lorentz-Kraft seines eigenen Felds. Dann reduziert die Newtonsche Bewegungsgleichung im Limes  $R \rightarrow 0$  auf (11.17) mit

$$m c^2 = \lim_{R \rightarrow 0} \left( m_0 c^2 + \frac{1}{8\pi R} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x})\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right).$$

Also: i) die elektrostatische Energie (1.19) der Verteilung  $\rho_R$  trägt zur Trägheit bei; ii) die "nackte" Masse  $m_0$  muss divergent gewählt werden,  $m_0(R) \rightarrow -\infty$ , ( $R \rightarrow 0$ ), damit die physikalische Masse  $m$  endlich ist. Eine ähnliche **Renormierung** ist in der Quantenelektrodynamik erforderlich, wenn auch die Divergenz dort milder ist.

#### 4. Strahlungsverluste in Beschleunigern

**Linearbeschleuniger** (Bewegung längs der 1-Achse). Wegen  $(p, p) = m^2 c^2$  ist  $p^0 dp^0/d\tau = p^1 dp^1/d\tau$ , d.h.

$$\frac{dp^0}{d\tau} = \beta \frac{dp^1}{d\tau} \quad (11.18)$$

und

$$-(w, w) \cdot m^2 = -\left(\frac{dp}{d\tau}, \frac{dp}{d\tau}\right) = (1 - \beta^2) \left(\frac{dp^1}{d\tau}\right)^2 = \left(\frac{dp^1}{dt}\right)^2.$$

Aus (11.11) folgt somit

$$W = -\frac{e^2}{6\pi c^3} (w, w) = \frac{e^2}{6\pi m^2 c^3} \left(\frac{dp^1}{dt}\right)^2.$$

Nach (11.18) ist auch

$$\frac{dp^1}{dt} = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dx},$$

wobei  $dE/dx$  die Zunahme der kinetischen Energie pro Längeneinheit ist. Damit findet man

$$\frac{W}{dE/dt} = \frac{e^2}{6\pi (mc^2)^2} \cdot \frac{c}{v} \frac{dE}{dx} \xrightarrow{v \rightarrow c} \frac{e^2}{6\pi (mc^2)^2} \frac{dE}{dx}.$$

Für ein Elektron ist  $mc^2 \simeq 0.5 \text{ MeV}$ ,  $e^2/mc^2 \simeq 10^{-15} \text{ m}$ . Bei einer Energiezunahme von 10 MeV/m ist  $W = 10^{-14} dE/dt$ . Die Strahlungsverluste in Linearbeschleunigern sind völlig unbedeutend.

**Kreisbeschleuniger.** Im relativistischen Bereich ist die Tangentialbeschleunigung  $\dot{\beta}_{\parallel} = c^{-1}dv/dt$  gegen die Zentrifugalbeschleunigung vernachlässigbar. Dann ist  $|\dot{\vec{\beta}}| = \beta\omega$ ,  $\omega = c\beta/r$ ,  $r$ : Radius der Kreisbahn, und (11.12) lautet

$$W = \frac{e^2}{6\pi c}(1 - \beta^2)^{-2}\beta^2\omega^2.$$

Der Energieverlust durch Strahlung während einer Umlaufzeit  $2\pi/\omega$  ist also:

$$\Delta E = \frac{e^2}{3r}(1 - \beta^2)^{-2}\beta^3 \cong \frac{e^2}{3r}(1 - \beta^2)^{-2}$$

im Limes  $\beta \rightarrow 1$ , oder mit  $E = mc^2(1 - \beta^2)^{-1/2}$ :

$$\Delta E = \frac{e^2}{3r} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^4.$$

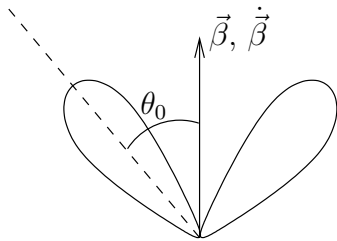
Typische Größenordnungen für ein Elektron-Synchrotron sind  $E = 10$  GeV,  $r = 10$  m. Dann ist  $\Delta E \approx 10$  MeV. Dies ist vergleichbar mit der pro Umlauf zugeführten Energie. In Kreisbeschleuniger sind also die Strahlungsverluste der wichtigste Begrenzungsfaktor der erreichbaren Teilchenenergie.

Diese Rechnungen gelten allerdings nur für ein einziges Teilchen. In einem Strahl kommt es wesentlich auf die Korrelationen zwischen den Teilchen an. Wenn sich die Beiträge zum Feld kohärent überlagern, so sind nicht die Intensitäten, sondern die Amplituden additiv. Im Extremfall eines kreisförmigen Gleichstroms gibt es ja überhaupt keine Ausstrahlung.

**Strahlungscharakteristik schneller Teilchen.** Der dominante Einfluss auf die Winkelverteilung der Strahlung,  $\vec{S}(\vec{n}) = c\vec{E}^2 \cdot \vec{n}$ , kommt über (11.7) vom Faktor

$$(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^{-6} = (1 - \beta \cos \theta)^{-6},$$

mit  $\theta = \angle(\vec{n}, \vec{\beta})$ , der für  $\beta$  nahe bei 1 (schnelles Teilchen) ein scharfes Maximum bei  $\theta = 0$  hat. Im Fall  $\dot{\vec{\beta}} \parallel \vec{\beta}$  ist z.B.

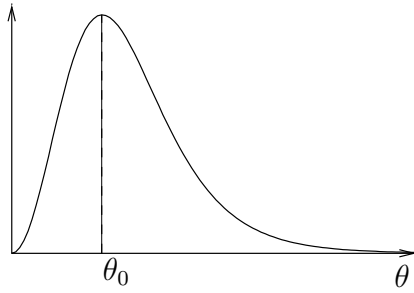


$$S = \frac{1}{16\pi^2 r^2} \frac{e^2}{c} \dot{\vec{\beta}}^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6}.$$

Da nur kleine  $\theta$  wichtig sind, entwickeln wir

$$\begin{aligned} \gamma^{-2} &= 1 - \beta^2 = (1 + \beta)(1 - \beta) \cong 2(1 - \beta), \\ 1 - \beta \cos \theta &= 1 - \beta \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \cong \frac{1}{2\gamma^2} (1 + (\gamma\theta)^2). \end{aligned}$$

Die Winkelverteilung ist also gegeben durch die Funktion

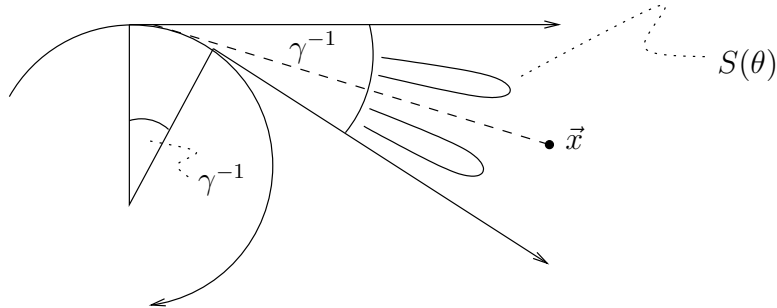


$$\frac{(\gamma\theta)^2}{(1 + (\gamma\theta)^2)^6}$$

d.h. der charakteristische Öffnungswinkel des Strahlungskegels ist

$$\theta_0 \approx \gamma^{-1}. \quad (11.19)$$

Ähnliches gilt auch im Fall  $\vec{\beta} \nparallel \vec{\beta}$ , obschon dann die Winkelverteilung auch vom Winkel zwischen  $\vec{n} - \vec{\beta}$  und  $\vec{\beta}$  abhängt. Mit der Abschätzung (11.19) kann man die **Synchrotron-Strahlung** qualitativ verstehen:



Es sei  $\omega_0$  die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons im Synchrotron. Der Strahlungspuls, der bei  $\vec{x}$  empfangen wird, rührt nach (11.19) von einem Bahnelement des Winkels  $\gamma^{-1}$  her, wird also während der Sendezeit

$$\frac{dy^0}{c} = \frac{1}{\omega_0\gamma}$$

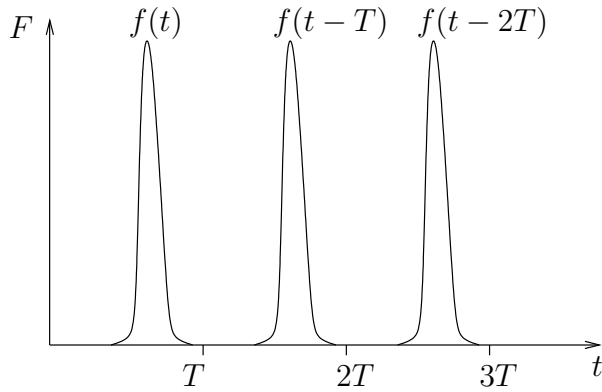
emittiert. Da sich das Elektron dabei fast mit Lichtgeschwindigkeit in der Ausstrahlungsrichtung bewegt, ist die Empfangszeit  $dx^0/c$  des Pulses bei  $\vec{x}$  viel kürzer. Nach (11.3) ist nämlich

$$\frac{\partial y^0}{\partial x^0} = \frac{dy^0}{d\tau} \cdot \tau_{,0} = \frac{u^0 R^0}{(u, R)} = (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^{-1} \cong 2\gamma^2,$$

also die Pulsdauer bei  $\vec{x}$ :

$$\frac{dx^0}{c} \cong \frac{dy^0}{2c\gamma^2} = \frac{1}{2\omega_0\gamma^3}.$$

Diese Pulse folgen sich mit der Periode  $T = 2\pi/\omega_0$ . Der zeitliche Verlauf einer Feldkomponente  $F(t)$  im Punkt  $\vec{x}$  hat daher die Form:



$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t - nT),$$

wobei  $f(t)$  den einzelnen Puls beschreibt.  $f(t)$  hat die Breite  $\Delta t = (\omega_0 \gamma^3)^{-1}$ , deshalb hat die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega t}$$

die Breite  $\Delta\omega = (\Delta t)^{-1} = \omega_0 \gamma^3$ . Die spektrale Zusammensetzung der Synchrotronstrahlung wird ersichtlich aus der Fourier-Reihe

$$F(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\omega_0 n t},$$

$$c_n = \int_0^T dt F(t) e^{i\omega_0 n t} = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{i\omega_0 n t} = \hat{f}(n\omega_0).$$

Dabei ist  $c_n$  wesentlich  $\neq 0$  für  $n\omega_0 \leq \gamma^3 \omega_0$ , d.h. die Strahlung setzt sich zusammen aus diskreten Frequenzen  $n\omega_0$  mit  $n = 1, 2, \dots \sim \gamma^3$ . Wegen  $v \approx c$  entspricht der Gesamtfrequenz  $\omega_0 = v/r$  die Lichtwellenlänge  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \cong 2\pi r =$  Umfang des Synchrotrons. Für 1 GeV-Elektronen ist  $\gamma \approx 10^3$ , so dass das Spektrum quasikontinuierlich bis hinunter zur Wellenlänge  $\lambda = \lambda_0 \gamma^{-3} \approx r \cdot 10^{-9}$  reicht.

# A. Anhang: Distributionen

---

Sei  $\mathcal{D} = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  der Raum der beliebig oft differenzierbaren (komplexwertigen) Funktionen auf  $\mathbb{R}^d$  mit kompaktem Träger.  $\varphi \in \mathcal{D}$  heisst **Testfunktion**.

**Definition** (Konvergenz in  $\mathcal{D}$ ). Seien  $\varphi_n, (n = 1, 2, \dots), \varphi \in \mathcal{D}$ .  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  bedeutet: es gibt eine kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}^d$  mit  $\text{supp } \varphi_n, \text{supp } \varphi \subset K$ , sodass

$$\sup_x |\partial_1^{m_1} \partial_2^{m_2} \dots \partial_d^{m_d} (\varphi_n(x) - \varphi(x))| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

für jede Wahl von  $m_1, \dots, m_d$ .

**Bemerkung.**  $\mathcal{D}$  ist vollständig, d.h. jede Cauchy-Folge in  $\mathcal{D}$  hat einen Grenzwert in  $\mathcal{D}$ .

**Definition.** Eine **Distribution** (oder verallgemeinerte Funktion)  $F$  ist ein stetiges lineares Funktional über  $\mathcal{D}$

$$\begin{aligned} F : \mathcal{D} &\longrightarrow \mathbb{C}, & \varphi &\longmapsto F(\varphi), \\ F(\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2) &= \lambda_1 F(\varphi_1) + \lambda_2 F(\varphi_2), & (\lambda_i \in \mathbb{C}, \varphi_i \in \mathcal{D}), \\ F(\varphi_n) &\longrightarrow F(\varphi), & \text{falls } \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi. \end{aligned}$$

$\mathcal{D}' := \{F \mid F \text{ ist eine Distribution}\}$  ist der topologische Dualraum von  $\mathcal{D}$ .

**Definition** (Konvergenz in  $\mathcal{D}'$ ).

$$F_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} F,$$

falls  $F_n(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$  für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

**Bemerkung.**  $\mathcal{D}'$  ist vollständig.

Beispiele:

- 1) Sei  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  lokal integrierbar. Zugehörige Distribution:

$$F_f(\varphi) = \int dx f(x) \varphi(x).$$

$F_f \in \mathcal{D}'$ , denn

$$|F_f(\varphi)| \leq \left( \int_K dx |f(x)| \right) \sup_x |\varphi(x)|,$$

falls  $\text{supp } \varphi \in K$ .

- 2) (Delta-Distribution)

$$\delta(\varphi) := \varphi(0).$$

$\delta \in \mathcal{D}'$ , denn  $|\delta(\varphi)| \leq \sup_x |\varphi(x)|$ . Es gibt aber keine (lokal integrierbare) Funktion  $f$ , so dass  $\delta = F_f$ . Ansonsten, wähle  $r > 0$  beliebig klein und  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  mit  $|\psi| \leq 1$ ,  $\psi(0) = 1$  und  $\text{supp } \psi \subset B_r = \{x \mid |x| \leq r\}$ . Setze dann

$$\varphi(x) = \underbrace{\psi(x)\varphi(x)}_{=: \varphi_1(x)} + \underbrace{(1 - \psi(x))\varphi(x)}_{=: \varphi_2(x)},$$

sodass  $\text{supp } \varphi_1 \subset B_r$  und  $\varphi_2(0) = 0$ . Dann wäre  $\delta(\varphi) = \delta(\varphi_1) + \delta(\varphi_2)$  mit  $\delta(\varphi_2) = 0$  und

$$|\delta(\varphi_1)| = |F_f(\varphi_1)| \leq \underbrace{\left( \int_{B_r} dx |f(x)| \right)}_{\xrightarrow{r \downarrow 0} 0} \sup_x |\varphi(x)| ,$$

also  $\delta = 0$ , was aber nicht zutrifft. Trotzdem schreibt man

$$\delta(\varphi) = \int \delta(x) \varphi(x) dx ,$$

im Wissen, dass es  $\delta(x)$  als Funktion gar nicht gibt.

3) Sei  $f_n$  lokal integrierbar mit  $\int f_n(x) dx = 1$ ,  $\int |f_n(x)| dx \leq C$ ,  $\text{supp } f_n \subset B_{1/n}$ . Dann ist

$$F_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta .$$

Für jedes  $\varphi \in \mathcal{D}$  ist nämlich

$$\begin{aligned} F_{f_n}(\varphi) - \delta(\varphi) &= \int dx f_n(x) \varphi(x) - \varphi(0) = \int dx f_n(x) (\varphi(x) - \varphi(0)) , \\ |F_{f_n}(\varphi) - \delta(\varphi)| &\leq \underbrace{\left( \int dx |f_n(x)| \right)}_{\leq C} \underbrace{\sup_{x \in B_{1/n}} |\varphi(x) - \varphi(0)|}_{\rightarrow 0} . \end{aligned}$$

4) Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar. Zu  $\partial_i f$  gehört die Distribution

$$F_{\partial_i f}(\varphi) = \int dx (\partial_i f(x)) \varphi(x) = - \int dx f(x) \partial_i \varphi(x) = -F_f(\partial_i \varphi)$$

nach partieller Integration in  $x_i$ . Dies veranlasst uns zur

**Definition** (Ableitung einer Distribution). Für  $F \in \mathcal{D}'$  ist  $\partial_i F$  erklärt durch

$$(\partial_i F)(\varphi) := -F(\partial_i \varphi) .$$

**Bemerkung.**  $\partial_i F \in \mathcal{D}'$ , denn trivialerweise

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \implies \partial_i \varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial_i \varphi .$$

$F$  hat Ableitungen aller Ordnungen.

4) (nochmals):  $\partial_i F_f = F_{\partial_i f}$ . Deshalb werden  $f$  und  $F_f$  identifiziert.

5)  $(\partial_i \delta)(\varphi) = -\delta(\partial_i \varphi) = -(\partial_i \varphi)(0)$ .

6) ( $d = 3$ )

$$\Delta \frac{1}{4\pi|\vec{x}|} = -\delta(\vec{x})$$

(s. (1.11)) und als Übung das  $\vec{E}$ -Feld eines Dipols:

$$\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \left( \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \right) = \underbrace{\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{x})\vec{x} - \vec{x}^2 \vec{p}}{4\pi|\vec{x}|^5}}_{\vec{f}(\vec{x})} - \frac{1}{3} \delta(\vec{x}) \vec{p},$$

wobei  $\vec{f}$  als die Distribution

$$\vec{F}(\varphi) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{|\vec{x}| \geq \epsilon} \vec{f}(\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d^3x$$

aufzufassen ist.

Für weitergehende Fragen (Fouriertransformation, Faltung, usw.) sind z.T. andere Testfunktionenräume, bzw. Distributionenräume besser geeignet (z.B. die Schwartzschen Räume  $\mathcal{S}$ , bzw.  $\mathcal{S}'$ ). Wir verweisen auf die

## Literatur

- L. Schwartz, Théorie des distributions I, II
- M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics I, II
- R.O. Richtmyer, Principles of advanced mathematical physics I



## B. Anhang: Kugelfunktionen

---

Gesucht wird, grob gesprochen, ein “natürliches” vollständiges Funktionensystem auf der Einheitskugel  $S^2 = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{e}| = 1\}$ .

**Motivation:** Die analoge Frage für den Einheitskreis  $S^1 = \{\vec{e} \in \mathbb{R}^2 \mid |\vec{e}| = 1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + ix_2 = e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi\}$  hat eine wohlbekannte Antwort (vgl. Fourierreihen):

$$f_n(\vec{e}) = e^{in\theta} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Drehungen  $R \in \text{SO}(2)$  (mit Winkel  $\varphi$ ) wirken auf Funktionen  $f$  auf  $S^1$  mittels  $f(\vec{e}) \mapsto f(R^{-1}\vec{e})$ , bzw.  $f(\theta) \mapsto f(\theta - \varphi)$ . Diesbezüglich sind die Funktionen  $f_n$  die Eigenfunktionen, und zwar mit Eigenwerten  $e^{-in\varphi}$ . Zudem sind sie die Einschränkung auf  $S^1$  folgender Polynome auf  $\mathbb{R}^2$

$$u_n(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1 + ix_2)^n, & (n > 0), \\ 1, & (n = 0), \\ (x_1 - ix_2)^{-n}, & (n < 0). \end{cases}$$

Beachte, dass  $u_n$  ein homogenes, harmonisches Polynom vom Grad  $|n|$  ist, und dass

$$u_n(r\vec{e}) = r^{|n|} f_n(\vec{e}).$$

Im Falle der Einheitskugel  $\Omega \equiv S^2$  setzen wir deshalb:

**Definition.**  $Y_l : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ist eine Kugelfunktion zum Index  $l = 0, 1, 2, \dots$ , falls  $Y_l$  die Einschränkung auf  $\Omega$  eines homogenen, harmonischen ( $\Delta u_l = 0$ ) Polynoms  $u_l : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  ist:

$$u_l(r\vec{e}) = r^l Y_l(\vec{e}).$$

**Beweis** des Satzes auf Seite 12. a)  $u_l$  genügt der Homogenitätsrelation

$$\vec{x} \cdot \vec{\nabla} u_l = l u_l.$$

Für  $V = \{|\vec{x}| \leq 1\}$  ist  $\partial V = \Omega$  mit  $d\vec{e} = \vec{x} de$ . Aus (1.12) folgt für  $u = \bar{u}_l, v = u_{l'}$

$$0 = \int_{\Omega} (\bar{u}_l \vec{\nabla} u_{l'} - u_{l'} \vec{\nabla} \bar{u}_l) \cdot d\vec{e} = (l' - l) \int_{\Omega} \bar{u}_l u_{l'} de = (l' - l)(Y_l, Y_{l'}).$$

b) Sei  $H_l$  der Raum aller homogenen Polynome

$$P_l(\vec{x}) = \sum_{\substack{m_i \in \mathbb{N} \\ m_1 + m_2 + m_3 = l}} c_{m_1 m_2 m_3} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}$$

vom Grad  $l$ . Die Anzahl der Koeffizienten ist

$$\dim H_l = (l + 1) + l + (l - 1) + \dots + 1.$$

Offenbar  $\Delta : H_l \rightarrow H_{l-2}$ . Der Raum  $K_l$  der homogenen, harmonischen Polynome von Grad  $l$ , d.h.  $K_l = \text{Ker } \Delta$ , hat also die Dimension

$$\dim K_l \geq \dim H_l - \dim H_{l-2} = (l + 1) + l = 2l + 1 \quad (\text{B.1})$$

Andererseits ist nach (a)

$$H_l \supset r^l(\mathcal{Y}_l \oplus \mathcal{Y}_{l-2} \oplus \dots) \quad (\text{B.2})$$

mit Dimensionen

$$\begin{aligned} \dim H_l &\geq \dim K_l + \dim K_{l-2} + \dots \\ &\geq (l+1) + l + (l-1) + \dots + 1 = \dim H_l . \end{aligned}$$

Es folgt, dass in (B.1, B.2) Gleichheit gilt.

c) Nach (B.2) (mit =) sind die endlichen Linearkombinationen von Kugelfunktion identisch mit den Einschränkungen von Polynomen auf  $\Omega$ . Nach dem Weierstrassschen Approximationssatz approximieren diese die stetigen Funktionen auf  $\Omega$  gleichmässig. Letztere sind dicht in  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

Es soll eine Basis für  $\mathcal{Y}_l$  eingeführt werden. Dazu zeichnen wir eine Richtung, z.B. die  $\vec{e}_3$ -Richtung, aus und schreiben für  $u_l \in H_l$

$$u_l(\vec{x}) = q_l + q_{l-1} \cdot x_3 + q_{l-2} \cdot x_3^2 + \dots + q_1 \cdot x_3^{l-1} + q_0 \cdot x_3^l , \quad (\text{B.3})$$

wobei  $q_r = q_r(x_1, x_2)$  ein homogenes Polynom in  $x_1, x_2$  vom Grad  $r$  ist. Somit ist

$$\begin{aligned} \Delta u_l &= \\ (\Delta q_l + 2q_{l-2}) + (\Delta q_{l-1} + 3 \cdot 2q_{l-3})x_3 + (\Delta q_{l-2} + 4 \cdot 3q_{l-4})x_3^2 + \dots + (\Delta q_2 + l(l-1)q_0)x_3^{l-2} . \end{aligned}$$

Die Bedingung  $\Delta u_l = 0$  erlaubt es, aus beliebigen  $q_l, q_{l-1}$  alle restlichen  $q_r$ 's zu bestimmen. Spezielle Wahlen (insgesamt  $2l+1$ ) sind

$$\text{i)}_k \quad \begin{aligned} q_l(x_1, x_2) &= (x_1 + ix_2)^{l-k} (x_1 - ix_2)^k , \\ q_{l-1}(x_1, x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

für  $k = 0, 1, \dots, l$ ;

$$\text{ii)}_k \quad \begin{aligned} q_l(x_1, x_2) &= 0 , \\ q_{l-1}(x_1, x_2) &= (x_1 + ix_2)^{l-1-k} (x_1 - ix_2)^k \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

für  $k = 0, 1, \dots, l-1$ .

Betrachte die Abbildung

$$u(\vec{x}) \mapsto u(R^{-1}\vec{x}) \quad (\text{B.6})$$

für ein  $R \in \text{SO}(3)$ , und speziell den Fall  $R = R_\varphi$  einer Drehung mit Winkel  $\varphi$  um  $\vec{e}_3$ . Da  $x_1 \pm ix_2$  unter  $R_\varphi^{-1}$  übergeht in  $e^{\mp i\varphi}(x_1 \pm ix_2)$ , werden (B.4, B.5) abgebildet gemäss

$$\begin{aligned} \text{i)}_k & \quad q_r(x_1, x_2) \mapsto e^{-i(l-2k)\varphi} q_r(x_1, x_2) , \\ \text{ii)}_k & \quad q_r(x_1, x_2) \mapsto e^{-i(l-1-2k)\varphi} q_r(x_1, x_2) , \end{aligned}$$

denn dies gilt für  $r = l, l-1$  und somit auch für die restlichen  $r$ 's. Für die entsprechenden  $u_l \in K_l$ , (s. (B.3)), ist

$$u_{lm}(\vec{x}) \equiv u_l(\vec{x}) \mapsto e^{-im\varphi} u_l(\vec{x})$$

mit i)<sub>k</sub>  $m = l - 2k$  und ii)<sub>k</sub>  $m = l - 1 - 2k$ . Insgesamt läuft  $m$  über die  $2l + 1$  Werte  $-l, \dots, l$ .

$Y_{lm}(\vec{e})$  sei die Einschränkung von  $u_{lm}(\vec{x})$  auf  $\Omega$ , und zwar so unnormiert, dass  $(Y_{lm}, Y_{lm}) = 1$  (dies ist eindeutig bis auf Phase; siehe auch unten). Auf der Kugel ist die Abbildung (B.6) (Bezeichnung:  $U(R) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ) unitär und

$$U(R_\varphi)Y_{lm} = e^{-im\varphi}Y_{lm} \quad (\text{B.7})$$

für  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind folgt

$$(Y_{lm}, Y_{lm'}) = \delta_{mm'}.$$

Insbesondere ist  $\{Y_{lm}\}_{m=-l}^l$  eine orthonormierte Basis für  $\mathcal{Y}_l$ . Sei  $\Pi_l : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  der orthogonale Projektor auf  $\mathcal{Y}_l$ :

$$\Pi_l \Phi = \sum_{m=-l}^l (Y_{lm}, \Phi) Y_{lm}, \quad (\text{B.8})$$

bzw.

$$(\Pi_l \Phi)(\vec{e}) = \int_{\Omega} d\vec{e}' \Pi_l(\vec{e}, \vec{e}') \Phi(\vec{e}')$$

mit Integralkern

$$\Pi_l(\vec{e}, \vec{e}') = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vec{e}) \overline{Y_{lm}(\vec{e}')}. \quad (\text{B.9})$$

Mit  $\{Y_{lm}\}_{m=-l}^l$  ist  $\{U(R)^{-1}Y_{lm}\}_{m=-l}^l$  ebenso eine o.n. Basis für  $Y_l$ , also

$$\Pi_l(\vec{e}, \vec{e}') = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(R\vec{e}) \overline{Y_{lm}(R\vec{e}')} \quad (\text{B.10})$$

$$= \Pi_l(R\vec{e}, R\vec{e}') \quad (\text{B.11})$$

für alle  $R \in \text{SO}(3)$ . Die Gleichheit von (B.9, B.10) ist das Additionstheorem für Kugelfunktionen (s. auch unten). Es sei noch bemerkt, dass

$$Y_{lm}(\vec{e}_3) = \begin{cases} = 0 & m \neq 0 \\ \neq 0 & m = 0 \end{cases} \quad (\text{B.12})$$

(dies erlaubt die Wahl  $Y_{l0}(\vec{e}_3) > 0$  der Phase). Wegen  $\vec{e}_3 = R_\varphi^{-1}\vec{e}_3$  folgt ersteres aus (B.7) über  $Y_{lm}(\vec{e}_3) = e^{-im\varphi}Y_{lm}(\vec{e}_3)$ . Wäre auch noch  $Y_{l0}(\vec{e}_3) = 0$ , so folgte aus (B.9)  $\Pi_l(\vec{e}, \vec{e}_3) = 0$  für alle  $\vec{e} \in \Omega$ ; wegen (B.11) sogar  $\Pi_l(\vec{e}, \vec{e}') = 0$  ( $\vec{e}, \vec{e}' \in \Omega$ ), d.h.  $\Pi_l = 0$ : Widerspruch.

Wir können nun das Lemma auf Seite 12 beweisen. (Es besagt übrigens, dass die Darstellung  $U(R)$  der  $\text{SO}(3)$  auf  $\mathcal{Y}_l$  irreduzibel ist).

**Beweis:** Da beide Seiten von (1.40) invariant sind unter  $(\vec{e}, \vec{e}') \mapsto (R\vec{e}, R\vec{e}')$ , genügt es, den Fall  $\vec{e}' = \vec{e}_3$  zu betrachten. Dann ist  $\Pi_l(\vec{e}, \vec{e}_3) = Y_{l0}(\vec{e})Y_{l0}(\vec{e}_3)$  wegen (B.9, B.12).

Andererseits gilt für  $\Phi(\vec{e}) := \psi(\vec{e}, \vec{e}_3)$ , dass  $U(R_\varphi)\Phi = \Phi$  und somit  $(Y_{lm}, \Phi) = 0$  für  $m \neq 0$ . Nach (B.8) ist nun

$$\Phi(\vec{e}) = \sum_{l=0}^{\infty} (\Pi_l \Phi)(\vec{e}) = \sum_{l=0}^{\infty} (Y_{l0}, \Phi) Y_{l0}(\vec{e}) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l \Pi_l(\vec{e}, \vec{e}_3),$$

wobei  $c_l \overline{Y_{l0}(\vec{e}_3)} = (Y_{l0}, \Phi)$ . □

Zusammenhang mit Legendre–Polynomen:

**Definition.** Die Legendre–Polynome

$$P_l(z), \quad (z \in [-1, 1]),$$

( $l = 0, 1, 2, \dots$ ) sind definiert durch

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(z), \quad (\text{B.13})$$

(d.h.  $P_l(z) = \frac{1}{l!} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^l \frac{1}{\sqrt{1-2tz+t^2}} \Big|_{t=0}$  : da Radikand = 1 bei  $t = 0$ , ist  $P_l(z)$  ein Polynom). Für  $\vec{x}, \vec{x}'$  mit  $r > r'$  und Zwischenwinkel  $\theta$  ist

$$|\vec{x} - \vec{x}'| = \sqrt{\vec{x}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{x}' + \vec{x}'^2} = \sqrt{r^2 - 2rr' \cos \theta + r'^2} = r \sqrt{1 - 2tz + t^2}$$

mit  $t = r'/r$ ,  $z = \cos \theta$ . Vergleich von (1.41) mit (B.13) liefert (Koeffizientenvergleich bzgl.  $t^l$ )

$$\frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l \overline{Y_{lm}(\vec{e}')} Y_{lm}(\vec{e}) = P_l(\cos \theta)$$

mit  $\theta = \angle(\vec{e}, \vec{e}')$ . Dies ist die übliche Form des **Additionstheorems**. Für  $\vec{e}' = \vec{e}_3$  vereinfacht es sich zu

$$\frac{4\pi}{2l+1} \overline{Y_{l0}(\vec{e}_3)} Y_{l0}(\vec{e}) = P_l(\cos \theta), \quad (\text{B.14})$$

und, falls auch  $\vec{e} = \vec{e}_3$  (und somit  $\cos \theta = 1$ ),

$$\frac{4\pi}{2l+1} |Y_{l0}(\vec{e}_3)|^2 = P_l(1) = 1,$$

letzteres weil (B.13) für  $z = 1$  die geometrische Reihe ist. Es folgt

$$Y_{l0}(\vec{e}_3) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$$

und (B.14) lautet

$$Y_{l0}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta),$$

wobei wir  $\vec{e}$  durch seine Polarkoordinaten  $\theta, \varphi$  bzgl.  $\vec{e}_3$  ausgedrückt haben.

## C. Anhang: Tensorkalkül

---

### Vektoren

$V$  reeller Vektorraum mit  $\dim V = n$ . In einer Basis  $e_1, \dots, e_n$  für  $V$  hat jeder Vektor  $a \in V$  die Entwicklung

$$a = a^\mu e_\mu, \quad (\text{C.1})$$

(Summenkonvention: über jeden oben und unten stehenden gleichen Index wird von 1 bis  $n$  summiert). Bei einer Basistransformation

$$\bar{e}_\mu = \Lambda_\mu^\nu e_\nu \quad (\text{C.2})$$

transformieren Vektorkomponenten linear:

$$\bar{a}^\mu = \Lambda^\mu_\nu a^\nu,$$

wobei wegen

$$\bar{a}^\mu \bar{e}_\mu = \Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\sigma a^\nu e_\sigma = a^\nu e_\nu$$

gelten muss

$$\Lambda^\mu_\nu \Lambda_\mu^\sigma = \delta_\nu^\sigma, \quad (\text{C.3})$$

d.h. die Matrix  $(\Lambda_\mu^\nu)$  ist die transponierte Inverse der Matrix  $(\Lambda^\mu_\nu)$ , was wir allein durch die verschiedene Stellung der Indizes zum Ausdruck bringen.

### Linearformen

$V^*$  = Dualraum von  $V$ : seine Elemente sind reelle lineare Funktionen  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \mapsto f(a)$  (Linearformen). Wir schreiben

$$f(a) =: \langle f, a \rangle \quad (\text{C.4})$$

und bemerken, dass diese Klammer bilinear in  $f \in V^*$  und  $a \in V$  ist. Aus (C.1) folgt

$$\langle f, a \rangle = \underbrace{\langle f, e_\mu \rangle}_{=: f_\mu} a^\mu. \quad (\text{C.5})$$

Die zu  $e_1, \dots, e_n$  duale Basis  $e^1, \dots, e^n$  für  $V^*$  ist erklärt durch

$$\langle e^\mu, a \rangle = a^\mu. \quad (\text{C.6})$$

Dann ist

$$f = f_\mu e^\mu,$$

denn es ist

$$\langle f_\mu e^\mu, a \rangle = f_\mu a^\mu = \langle f, a \rangle.$$

Speziell gilt

$$\langle e^\mu, e_\nu \rangle = \delta^\mu_\nu.$$

Bei einer Basistransformation (C.2) gilt nach (C.5, C.6)

$$\bar{f}_\mu = \Lambda_\mu^\nu f_\nu, \quad \bar{e}^\mu = \Lambda^\mu_\nu e^\nu. \quad (\text{C.7})$$

Die Elemente von  $V$ , bzw.  $V^*$  nennt man auch **kontravariante**, bzw. **kovariante** Vektoren (im Vergleich zum Transformationsgesetz (C.2)). Wegen (C.4) ist  $V \cong V^{**}$  mittels  $a \mapsto \langle \cdot, a \rangle$ .

## Tensoren

Ein Tensor  $T$  vom Typ  $\binom{q}{p}$ ,  $T \in \otimes_p^q V$ , ist eine Multilinearform in  $q$  Variablen aus  $V^*$  und  $p$  Variablen aus  $V$ . Zum Beispiel ist  $T \in \otimes_1^1 V$  eine Bilinearform  $T(f, a)$  der Variablen  $f \in V^*$  und  $a \in V$ .

In einer Basis ist

$$T(f, a) = T(f_\mu e^\mu, a^\nu e_\nu) = \underbrace{T(e^\mu, e_\nu)}_{=: T^\mu{}_\nu} f_\mu a^\nu \quad (\text{C.8})$$

und daraus folgt mit (C.2, C.7) das für Tensorkomponenten charakteristische Transformationsgesetz

$$\bar{T}^\mu{}_\nu = T^\alpha{}_\beta \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \quad (\text{C.9})$$

kontravariant im ersten Index und kovariant im zweiten. Speziell hat der Tensor (C.4) in jeder Basis die Komponenten  $\delta^\mu{}_\nu$ : (C.9) reduziert sich in diesem Fall auf (C.3). Wir bemerken:  $\otimes_0^0 V = \mathbb{R}$ ,  $\otimes_1^0 V = V^*$ ,  $\otimes_0^1 V = V^{**} = V$ .

Operationen auf Tensoren:

i) **Produkt:** Für  $T \in \otimes_{p_1}^{q_1} V$ ,  $S \in \otimes_{p_2}^{q_2} V$  ist das Tensorprodukt  $T \otimes S \in \otimes_{p_1+p_2}^{q_1+q_2} V$  definiert durch

$$\begin{aligned} (T \otimes S)(f_{(1)}, \dots, f_{(q_1+q_2)}; a_{(1)}, \dots, a_{(p_1+p_2)}) \\ = T(f_{(1)}, \dots, f_{(q_1)}; a_{(1)}, \dots, a_{(p_1)}) S(f_{(q_1+1)}, \dots, f_{(q_1+q_2)}; a_{(p_1+1)}, \dots, a_{(p_1+p_2)}) . \end{aligned}$$

- Beispiel: Für  $T \in \otimes_1^1 V$ ,  $S \in \otimes_1^0 V = V^*$ ,  $R = T \otimes S$  ist

$$R(f, a, b) = T(f, a)S(b) = \underbrace{T^\mu{}_\nu S_\sigma}_{R^\mu{}_\nu{}^\sigma} f_\mu a^\nu b^\sigma . \quad (\text{C.10})$$

- Beispiel: In  $\otimes_1^1 V$  ist eine Basis gegeben durch  $e_\mu \otimes e^\nu$ . Aus (C.8) und  $(e_\mu \otimes e^\nu)(f, a) = f_\mu a^\nu$  folgt nämlich

$$T = T^\mu{}_\nu e_\mu \otimes e^\nu .$$

Damit ist  $\otimes_1^1 V = V \otimes V^* := \{\text{Linearkombinationen von Tensorprodukten aus } V \text{ und } V^*\}$ .

Allgemein:

$$\otimes_p^q V = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q\text{-mal}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{p\text{-mal}} . \quad (\text{C.11})$$

ii) **Spur:** Für Tensoren vom Typ  $\binom{1}{1}$  ist die Spur von  $T$

$$\text{tr } T := T(e^\mu, e_\mu) = T^\mu{}_\mu ,$$

wobei  $e_\mu, e^\mu$  ein beliebiges duales Basispaar ist. Beliebiger ist es, weil

$$\bar{T}^\mu{}_\mu = T^\alpha{}_\beta \underbrace{\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\mu{}^\beta}_{\delta_\alpha{}^\beta} = T^\alpha{}_\alpha .$$

Allgemein definiert man

$$\text{tr} : \otimes_p^q V \longrightarrow \otimes_{p-1}^{q-1} V ,$$

indem  $\text{tr}$  wie oben auf den je letzten Faktor  $V$ , bzw.  $V^*$  in (C.11) wirkt.

- Beispiel:  $S = \text{tr} T$ ,  $T \in \otimes_1^2 V$  hat die Komponenten

$$S^\mu = T^{\mu\nu}{}_\nu .$$

- Beispiel: Jeder Tensor  $T^\mu{}_\nu$  definiert durch

$$b^\mu = T^\mu{}_\nu a^\nu$$

(Spur eines Tensorprodukts) eine lineare Abbildung  $T : V \rightarrow V, a \mapsto b$ , und umgekehrt: Jede solche Abbildung  $T$  definiert einen Tensor

$$T(f, a) = \langle f, Ta \rangle = T^\mu{}_\nu f_\mu a^\nu$$

mit den Komponenten  $T^\mu{}_\nu = \langle e^\mu, Te_\nu \rangle$ . Analog kann man z.B. einen Tensor  $T_{\mu\nu}$  auffassen als lineare Abbildung

$$b_\mu = T_{\mu\nu} a^\nu$$

von  $V$  nach  $V^*$ .

## Antisymmetrische Tensoren

Eine spezielle Rolle spielen die antisymmetrischen Tensoren aus  $\otimes_p^0 V = \underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{p\text{-mal}}$ :

$$T(a_{(\pi(1))}, \dots, a_{(\pi(p))}) = \text{sgn } \pi \cdot T(a_{(1)}, \dots, a_{(p)})$$

für jede Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, p\} : \pi \in S_p$ . Dabei ist  $\text{sgn } \pi$  ihre Parität. Man schreibt  $\bigwedge^p V^*$  für den Unterraum solcher Tensoren.

Jeder Tensor vom Typ  $\binom{0}{p}$  kann antisymmetrisiert werden durch die Operation  $\mathcal{A}$ :

$$(\mathcal{A}T)(a_{(1)}, \dots, a_{(p)}) := \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn } \pi T(a_{(\pi(1))}, \dots, a_{(\pi(p))}) .$$

Es gilt  $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$ .

iii) **Äusseres Produkt:** für  $T \in \bigwedge^{p_1} V^*$ ,  $S \in \bigwedge^{p_2} V^*$  ist  $T \wedge S \in \bigwedge^{p_1+p_2} V^*$  definiert durch

$$T \wedge S = \frac{(p_1 + p_2)!}{p_1! p_2!} \mathcal{A}(T \otimes S) .$$

Eigenschaften:

$$T \wedge S = (-1)^{p_1 p_2} S \wedge T ,$$

$$T \wedge (S \wedge R) = (T \wedge S) \wedge R = \frac{(p_1 + p_2 + p_3)!}{p_1! p_2! p_3!} \mathcal{A}(T \otimes S \otimes R)$$

Komponenten: Für  $T \in \bigwedge^p V^*$  ist bezüglich einer Basis  $e^\mu$  von  $V^*$

$$\begin{aligned} T &= T_{\mu_1 \dots \mu_p} e^{\mu_1} \otimes \dots \otimes e^{\mu_p} = \mathcal{A}T \\ &= T_{\mu_1 \dots \mu_p} \mathcal{A}(e^{\mu_1} \otimes \dots \otimes e^{\mu_p}) \\ &= T_{\mu_1 \dots \mu_p} \frac{1}{p!} e^{\mu_1} \wedge \dots \wedge e^{\mu_p} \\ &= T_{\mu_1 \dots \mu_p} e^{\mu_1} \wedge \dots \wedge e^{\mu_p} \quad \left( \begin{array}{l} \text{bei Beschränkung der Summe} \\ \text{auf } \mu_1 < \dots < \mu_p \end{array} \right) . \end{aligned}$$

Damit ist

$$\dim \bigwedge^p V^* = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

und insbesondere = 0 für  $p > n$ .

### Metrik

Wir rüsten  $V$  mit einem Skalarprodukt aus

$(a, b)$  : symmetrische, nicht ausgeartete Bilinearform auf  $V$ .

Nicht ausgeartet heisst, dass nur der Nullvektor auf allen Vektoren orthogonal steht:

$$(a, b) = 0 , \quad \forall b \in V \quad \implies \quad a = 0 .$$

In Komponenten schreiben wir für diesen metrischen Tensor

$$\begin{aligned} (a, b) &= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu , \\ g_{\mu\nu} &= g_{\nu\mu} , \quad \det(g_{\mu\nu}) \neq 0 . \end{aligned}$$

iv) **Rauf- und Runterziehen der Indizes:** Durch das Skalarprodukt definiert jeder Vektor  $a \in V$  eine Linearform  $ga \in V^*$ :

$$\langle ga, b \rangle := (a, b) , \quad \forall b \in V$$

Die Abbildung  $g : V \rightarrow V^*$ ,  $a \mapsto ga$  ist ein Isomorphismus, denn aus  $ga = 0$  folgt  $(a, b) = 0$  für alle  $b \in V$ , also  $a = 0$ . In Komponenten ist

$$(ga)_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu$$

also

$$(ga)_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu \tag{C.12}$$



(Runterziehen des Index). Für  $g^{-1} : V^* \rightarrow V$  gilt umgekehrt

$$\begin{aligned}(g^{-1}f, b) &= \langle f, b \rangle, \\ (g^{-1}f)^\mu &= g^{\mu\nu} f_\nu\end{aligned}$$

(Raufziehen des Index), wenn wir mit  $(g^{\mu\nu})$  die (ebenfalls symmetrische) Inverse der Matrix  $(g_{\mu\nu})$  bezeichnen. Diese Isomorphismen lassen sich auf Tensoren übertragen, so das Runterziehen:

$$\begin{aligned}g : \otimes_p^q V &\longrightarrow \otimes_{p+1}^{q-1} V, & T &\longmapsto gT, \\ (gT)(f_{(1)}, \dots, f_{(q-1)}; a_{(1)}, \dots, a_{(p+1)}) &= T(f_{(1)}, \dots, f_{(q-1)}, ga_{(1)}; a_{(2)}, \dots, a_{(p+1)}), \\ (gT)^{\mu_1 \dots \mu_{q-1}}_{\nu_1 \dots \nu_{p+1}} &= g_{\nu_1 \alpha} T^{\mu_1 \dots \mu_{q-1} \alpha}_{\nu_2 \dots \nu_{p+1}}.\end{aligned}\tag{C.13}$$

Wir identifizieren nun  $V^*$  mit  $V$ , indem wir  $ga \equiv a$  setzen und einfach von ‘Vektoren’ sprechen. So lautet (C.12)

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

und wir nennen  $a^\mu$  bzw.  $a_\mu$  die kontravarianten bzw. kovarianten Komponenten von  $a$ . Es ist dann

$$a = a^\mu e_\mu = a_\mu e^\mu,$$

wobei die duale Basis  $\{e^\mu\}$  zu  $\{e_\mu\}$  bestimmt ist durch

$$(e^\mu, e_\nu) = \delta^\mu_\nu.$$

Analog identifiziert man alle  $\otimes_p^q V$  mit dem selben  $p + q$ . Beispiel:  $p + q = 3$ .

$$T(a, b, c) = T_{\mu\nu\sigma} a^\mu b^\nu c^\sigma = T^\mu_{\nu\sigma} a_\mu b^\nu c^\sigma = T^{\mu\nu\sigma} a_\mu b_\nu c_\sigma.$$

Insbesondere folgt aus (C.13), dass

$$g_\mu{}^\nu = g^\nu{}_\mu = \delta_\mu{}^\nu$$

in jeder Basis. Hingegen kann man die Basis kartesisch wählen, d.h.

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu},$$

nur im Fall einer positiv-definiten Metrik. Dann entfällt der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Komponenten und man kann alle Indizes unten schreiben.

## Volumenelement

Die Metrik auf  $V = V^*$  überträgt sich auf  $\otimes_p^0 V$  mittels

$$(a_{(1)} \otimes \dots \otimes a_{(p)}, b_{(1)} \otimes \dots \otimes b_{(p)})_p := \frac{1}{p!} \prod_{i=1}^p (a_{(i)}, b_{(i)})\tag{C.14}$$

und Bilinearität. Sie bleibt dabei nicht ausgeartet. Insbesondere ist sie auf  $\bigwedge^p V^*$  definiert. Wegen  $\dim \bigwedge^n V^* = 1$  gibt es bis auf das Vorzeichen genau ein  $\Omega \in \bigwedge^n V^*$  mit

$$(\Omega, \Omega)_n = \text{Signatur von } (\cdot, \cdot)_n \text{ auf } \bigwedge^n V^* = \pm 1.$$

$\Omega$  heisst das Volumenelement zur Metrik  $g$ . Bezüglich einer Basis  $e^\mu$  für  $V^*$  ist

$$\Omega = \pm |g|^{1/2} e^1 \wedge \cdots \wedge e^n ,$$

wobei

$$g = \det (g_{\mu\nu}) , \quad g_{\mu\nu} = (e_\mu, e_\nu) .$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} (\Omega, \Omega)_n &= |g| (e^1 \wedge \cdots \wedge e^n, e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)_n \\ &= |g| \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi \prod_{i=1}^n (e^i, e^{\pi(i)}) = |g| \underbrace{\det (g^{\mu\nu})}_{g^{-1}} = \operatorname{sgn} g . \end{aligned}$$

In Komponenten:

$$\Omega_{\mu_1 \dots \mu_n} = \pm |g|^{1/2} \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} ,$$

wobei

$$\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \operatorname{sgn} \begin{pmatrix} 1 \dots n \\ \mu_1 \dots \mu_n \end{pmatrix} .$$

v) **Hodge'sche \*-Operation:** Eine Abbildung

$$* : \bigwedge^p V^* \longrightarrow \bigwedge^{n-p} V^* , \quad T \longmapsto *T$$

ist definiert durch

$$(*T, S)_{n-p} = (T \wedge S, \Omega)_n$$

für alle  $S \in \bigwedge^{n-p} V^*$ .

Eigenschaften: (ohne Beweis)

$$\begin{aligned} (*T, S)_{n-p} &= (-1)^{p(n-p)} (T, *S)_p , \\ **T &= \operatorname{sgn} g \cdot (-1)^{p(n-p)} T , \\ (*T_1, *T_2)_{n-p} &= \operatorname{sgn} g \cdot (T_1, T_2)_p . \end{aligned}$$

Einen expliziten Ausdruck für  $*T$  bekommen wir aus

$$(*T, S)_{n-p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} (T \otimes S, \Omega)_n = \frac{1}{p!} \left( \operatorname{tr}^{(p)} ((g^{-1})^{(p)} T) \otimes \Omega, S \right)_{n-p} ,$$

wobei  $(p)$  für ' $p$ -fach' steht. Dies folgt aus der Normierung (C.14) und aus  $(a, b) = \langle g^{-1}a, b \rangle = \operatorname{tr}(g^{-1}a \otimes b)$ . Also ist

$$*T = \frac{1}{p!} \operatorname{tr}^{(p)} ((g^{-1})^{(p)} T) \otimes \Omega$$

und in Komponenten

$$(*T)_{\mu_{p+1} \dots \mu_n} = \frac{1}{p!} T^{\mu_1 \dots \mu_p} \Omega_{\mu_1 \dots \mu_n} .$$

## Tensorfelder im $\mathbb{R}^n$

In  $\mathbb{R}^n$  benützen wir affine Koordinaten  $x = (x^1, \dots, x^n)$  bestimmt bis auf linear inhomogene Transformationen

$$\bar{x} = \Lambda x + a, \quad \bar{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (\text{C.15})$$

Ein Tensorfeld ist gegeben durch seine Komponenten, z.B.  $T^\mu{}_\nu(x^1, \dots, x^n)$  falls vom Typ  $\binom{1}{1}$ , mit dem Transformationsgesetz

$$\bar{T}^\mu{}_\nu(\bar{x}) = T^\alpha{}_\beta(x) \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta = T^\alpha{}_\beta(\Lambda^{-1}(\bar{x} - a)) \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta. \quad (\text{C.16})$$

Algebraische Operationen (i-v) sind punktweise auf Tensorfeldern ausführbar.

vi) **Differentiation:** Aus  $T^\mu{}_\nu(x)$  entsteht durch

$$T^{\mu}{}_{\nu,\sigma}(x) := \frac{\partial}{\partial x^\sigma} T^\mu{}_\nu(x) \quad (\text{C.17})$$

ein neues Tensorfeld. Zum Beweis bemerken wir, dass nach (C.15)

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} = \Lambda^\mu{}_\nu, \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} = \Lambda_{\sigma}{}^\nu,$$

wobei die zweite Beziehung durch Vergleich von

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} = \delta^\mu{}_\sigma \quad \text{mit} \quad \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_{\sigma}{}^\nu = \delta^\mu{}_\sigma$$

folgt. Somit transformieren die Differentialoperatoren

$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

wie kovariante Vektorkomponenten

$$\bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_{\mu}{}^\nu \partial_\nu.$$

Daraus folgt das Transformationsverhalten von (C.17)

$$\bar{T}^{\mu}{}_{\nu,\sigma}(\bar{x}) = \Lambda_{\sigma}{}^\gamma \partial_\gamma (T^\alpha{}_\beta(x) \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta) = T^{\alpha}{}_{\beta,\gamma}(x) \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda_\nu{}^\beta \Lambda_{\sigma}{}^\gamma.$$

(Ersichtlich ist auch, dass  $T^{\mu}{}_{\nu,\sigma}$  bezüglich nicht affinen Koordinatentransformationen *kein* Tensor ist.)

- Beispiel:  $f_{,\mu} = \text{Gradient eines Skalarfeldes}$  (kovariantes Vektorfeld) und  $j^{\mu}{}_{,\mu} = \text{Divergenz eines kontravarianten Vektorfeldes}$  (Spur des Tensorfeldes  $j^{\mu}{}_{,\nu}$ ).

Eine ortsunabhängige Metrik im  $\mathbb{R}^n$  ist gegeben durch den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  (unabhängig von  $x$ ). Dann kommutiert  $\partial_\mu$  mit dem Rauf- und Runterziehen der Indizes. Wir setzen noch

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} = g^{\mu\nu} \partial_\nu.$$

Invariant ist der Laplace–Operator (bzgl. der Metrik  $g_{\mu\nu}$ ):

$$\Delta = \partial^\mu \partial_\mu = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu .$$

**Bemerkung.** Ein koordinaterfreier Zugang zu Tensorfeldern ist über den Begriff eines **affinen Raumes**  $\mathbb{E}$  (über  $V$ ) möglich. Dies ist eine Menge versehen mit einer Abbildung  $\mathbb{E} \times \mathbb{E} \rightarrow V$ ,  $(r, r') \mapsto r' - r$ , welche folgende Eigenschaften genießt: (i)  $(r'' - r') + (r' - r) = r'' - r$ ; (ii) zu gegebenen  $r \in \mathbb{E}$ ,  $v \in V$  gibt es genau ein  $r' \in \mathbb{E}$  mit  $r' - r = v$  (notiert als  $r' = r + v$ ).

Ein Koordinatensystem  $K$  in  $\mathbb{E}$  ist gegeben durch Auszeichnung eines Punkts  $o \in \mathbb{E}$  (Ursprung) und einer Basis  $\{e_\mu\}$  für  $V$ . Über  $r = o + x^\mu e_\mu$  ist eine Koordinatenabbildung  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $r \mapsto x = (x^1, \dots, x^n)$  erklärt. Bei Wechsel des Koordinatensystem, bestimmt durch (C.2) und  $o - \bar{o} = a^\mu \bar{e}_\mu$ , transformieren die Koordinaten gemäss (C.15).

Ein Tensorfeld auf  $\mathbb{E}$  ist eine Abbildung  $T : \mathbb{E} \rightarrow \otimes_p^q V$ ,  $r \mapsto T_r$ . Bzgl.  $K$  sind ihm (z.B. für  $p = q = 1$ ) die Komponenten  $T^\mu{}_\nu(x) := T_r(e^\mu, e_\nu)$  zugeordnet. Deren Transformationsverhalten ist (C.16). Die Ableitung  $\partial T$  ist ein Tensorfeld vom Typ  $\binom{q}{p+1}$  koordinatenfrei definiert (im Bsp.) durch

$$(\partial T)_r(f, a, b) = \left. \frac{d}{d\lambda} T_{r+\lambda b}(f, a) \right|_{\lambda=0} ,$$

d.h. (C.17) in Komponenten. Die Überprüfung ihres Transformationsverhaltens erübrigt sich nun aber.

## Repetitorium der Vektoranalysis im $\mathbb{R}^3$

( $\vec{v}$ : Vektorfeld;  $v$ : Skalarfeld)

- Vektoridentitäten:

$$\operatorname{rot} \vec{\nabla} v = 0$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \nabla(\vec{v}^2/2) - \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{v}$$

- Produktregeln:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\operatorname{rot}(\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{v} + \rho \operatorname{rot} \vec{v}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{w} + \vec{w} \wedge \operatorname{rot} \vec{v}$$

$$\operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{w} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{w}$$

$$\operatorname{rot}(\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\operatorname{div} \vec{w}) \vec{v} - (\operatorname{div} \vec{v}) \vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{w}$$

- Sätze:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{v} d^3x = \int_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} \quad (\text{Gauss})$$

$$\int_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{\partial S} \vec{v} \cdot d\vec{s} \quad (\text{Stokes})$$

- Korollare:

$$\int_V \vec{\nabla} v d^3x = \int_{\partial V} v d\vec{\sigma}$$

$$\int_V \operatorname{rot} \vec{v} d^3x = \int_{\partial V} d\vec{\sigma} \wedge \vec{v}$$

$$\int_V (u \Delta v + \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v) d^3x = \int_{\partial V} u \vec{\nabla} v \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\int_V (u \Delta v - v \Delta u) d^3x = \int_{\partial V} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\sigma}$$

$$\int_S d\vec{\sigma} \wedge \vec{\nabla} u = \int_{\partial S} u d\vec{s}$$

- Kettenregeln:

$$(\vec{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad \tau : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$$

$$\operatorname{div} \vec{P}(\tau(\vec{x})) = \dot{\vec{P}}(\tau(\vec{x})) \cdot \vec{\nabla} \tau(\vec{x})$$

$$\operatorname{rot} \vec{P}(\tau(\vec{x})) = \vec{\nabla} \tau(\vec{x}) \wedge \dot{\vec{P}}(\tau(\vec{x}))$$

$$(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{P}(\tau(\vec{x})) = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \tau(\vec{x})) \cdot \dot{\vec{P}}(\tau(\vec{x}))$$