Elektrodynamik, Serie 7.

FS 08 *Abgabe:* Woche 8

1. Teilweise polarisiertes Licht

Eine fast monochromatische elektromagnetische Welle der Fortpflanzungsrichtung $\vec{e}_3$ ist in komplexer Notation von der Form

$$\vec{B} = \vec{e}_3 \wedge \vec{E}\,, \qquad \vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{E}(t - \vec{e}_3 \cdot \vec{x}/c)$$
$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}\,, \qquad \vec{E}_0 = (E_1, E_2, 0)\,,$$

wobei $\vec{E}_0(t)$

- langsam veränderlich ist auf der Zeitskala $2\pi/\omega_0$ (Periode); die für $\vec{E}_0(t)$ charakteristische Zeitskala heisst Kohärenzzeit τ.
- rasch veränderlich ist auf der Zeitskala optischer Polarisationsmessungen. Die Amplituden $\vec{E}_0(t_i)$, $(i = 1, 2)$ erweisen sich unkorreliert, wenn $t_2 - t_1 \gg \tau$.

Man fasse $\vec{E}_0$ als Zufallsvariable auf. Mittelwerte bezeichnen wir mit $\langle \cdot \rangle$. Ziel der Aufgabe ist es, folgende Aussage zu verdeutlichen: Die Polarisation des Lichtes wird durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \langle E_1 \overline{E}_1 \rangle & \langle E_1 \overline{E}_2 \rangle \\ \langle E_2 \overline{E}_1 \rangle & \langle E_2 \overline{E}_2 \rangle \end{pmatrix} = S^*\,, \tag{1}$$

bzw.

$$S = \langle \underline{E}\, \underline{E}^* \rangle\,, \qquad \underline{E} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}\,, \qquad \underline{E}^* = (\overline{E}_1, \overline{E}_2)\,, \tag{2}$$

beschrieben.

i) Zeige, dass S von der Form

$$S = s_0 \sigma_0 + s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3 \equiv s_0 1_2 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma} \tag{3}$$

ist, wobei $s_i \in \mathbb{R}$ (Stokessche Parameter), $\sigma_0 = 1_2$ und

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Pauli-Matrizen). *Hinweis:* Die 2×2-Matrizen $S = S^*$ bilden einen reellen Vektorraum. Was ist seine Dimension?

ii) Drücke die s_i durch die Mittelwerte $\langle E_j \overline{E}_k \rangle$ aus. *Hinweis:* $(S, T) = \mathrm{tr}(ST)/2$ ist ein Skalarprodukt. Ferner gilt $\sigma_i^2 = 1_2$ und $\sigma_1 \sigma_2 = \mathrm{i}\sigma_3$ (und zyklisch).

iii) Zeige, dass im Fall einer reinen Polarisation ($\vec{E}_0$ fest, Mittelwerte überflüssig)

$$|\vec{s}| = s_0 \tag{4}$$

gilt. *Hinweis:* Berechne S^2 für diesen Fall und nimm die Spur.

iv) Zeige, dass im Allgemeinen

$$|\vec{s}| \leq s_0$$

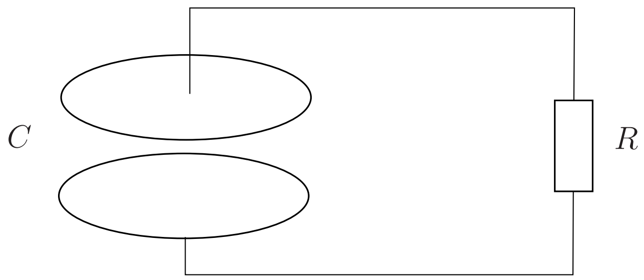
Hinweis: Mittle über (4); alternativ, zeige: $S \geq 0$ und die Eigenwerte von S sind $s_0 \pm |\vec{s}|$.

v) Finde die Bedeutung von s_0 und s_i/s_0, $(i = 1, 2, 3)$. Was bedeutet $\vec{s} = 0$? *Hinweis:* Die Eigenwerte von σ_i sind ± 1, $(i = 1, 2, 3)$. Was sind die Eigenvektoren, $\vec{e}_\pm^{(i)}$? Drücke s_i durch die Koeffizienten $\alpha_\pm^{(i)}$ in der Zerlegung $\underline{E} = \alpha_+^{(i)} \vec{e}_+^{(i)} + \alpha_-^{(i)} \vec{e}_-^{(i)}$ aus. Verwende dazu, dass die Spur basisunabhängig ist.

Bemerkung: In der Optik sind die Matrizen σ_i etwas anders definiert. Hier wurden die in der Quantenmechanik üblichen Pauli-Matrizen verwendet.

2. Energiefluss bei Entladung eines Kondensators

Diskutiere qualitativ den Energiefluss (Poynting-Vektor) bei der langsamen Entladung eines Kondensators über einen Widerstand.



3. Satellit an der Leine

Auf einer Mission des Space Shuttle (1996) wurde ein Satellit über ein 20 km langes Spannseil ausgesetzt. Das Seil war leitend und durch einen Mantel vom umgebenden verdünnten Plasma (ionisiertes Gas) isoliert. Erkläre, wieso ein Strom im Seil floss. Berechne grössenordnungsmässig die elektromotorische Kraft längs des Seils. Woher stammte die dabei umgesetzte Energie?

Hinweis: Das Magnetfeld in Erdnähe beträgt $\sim 40 \mu$T in SI-Einheiten (1 Tesla =1 Vs/m^2).