Elektrodynamik, Serie 4.

FS 08 *Abgabe:* Woche 5

1. Multipolmomente

(a) Zeige, dass das Dipolmoment $\vec{p} = \int \mathrm{d}^3x\, \vec{x}\, \rho(\vec{x})$ genau dann unabhängig vom Koordinatenursprung ist, falls die Gesamtladung $\int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})$ verschwindet. Wie lautet die entsprechende Aussage für höhere kartesische Multipolmomente

$$\int \mathrm{d}^3x\, \rho(\vec{x})\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3}\,,$$

wobei $m_1 + m_2 + m_3 = l$?

(b) Allgemein, zeige dass dasselbe für die sphärischen Multipolmomente q_{lm} gilt, falls

$$q_{l'm} = 0$$

für alle $l' < l$.

(c) Man überzeuge sich (bis auf die Wahl der Phase), dass die Kugelfunktionen Y_{1m} ($m = -1, 0, 1$) gegeben sind durch

$$Y_{1-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\,,\ Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\,,\ Y_{11}(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,.$$

Zeige dann, dass folgender Zusammenhang gilt:

$$p_1 + \mathrm{i}p_2 = \sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,q_{1-1}\,, \qquad p_3 = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\,q_{10}\,, \qquad p_1 - \mathrm{i}p_2 = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,q_{11}\,.$$

2. Der Satz von Thomson

Hält man mehrere Körper mit jeweils vorgegebener Gesamtladung fest, so nimmt die elektrostatische Energie ein Minimum an, wenn die Ladungen so verteilt sind, dass auf jedem von ihnen – wie im Falle von Leitern – das Potential konstant ist. Insbesondere befindet sich dann in ihrem Inneren keine Ladung.

Hinweis: Drücke die Energie durch die Ladungsverteilung aus.

3. Eine Greensche Funktion in 2 Dimensionen

Finde die Greensche Funktion für das Potentialproblem auf der Scheibe $D = \{|\vec{x}| < 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Zeige damit, dass eine harmonische Funktion $\varphi(\vec{x})$ auf D wie folgt durch ihre Randwerte bestimmt ist:

$$\varphi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(1,\theta')\,\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\theta')}\,\mathrm{d}\theta' \tag{1}$$

(r, θ: Polarkoordinaten für $\vec{x}$).

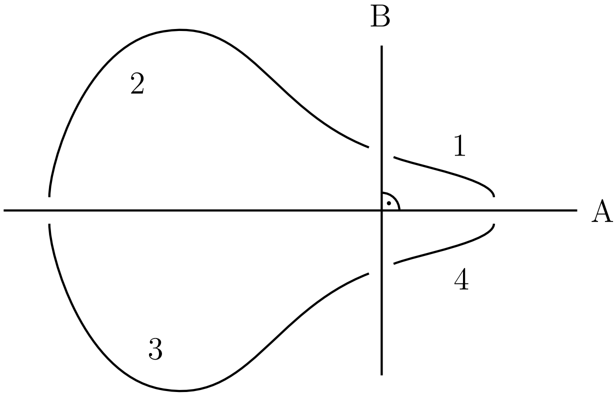
Hinweis: Verwende, dass auch hier für $\vec{x} \in \partial D$ (1.28) gilt.

4. Geometrieunabhängige Kapazität

(a) Zeige, dass die Masseinheit der Kapazität $[C] = L$ ist in den Einheiten der Vorlesung.

Für eine in 3-Richtung translationsinvariante Anordnung ist somit die Kapazität pro Längeneinheit dimensionslos.

Betrachte folgende 2-dimensionale Anordnung.



Eine einfache geschlossene Kurve weise eine Symmetrieachse A auf. Diese und eine dazu senkrechte Gerade B teilen die Kurve in die infinitesimal getrennte Stücke 1,2,3,4, die als Leiter anzusehen sind.

Der Satz von Thompson und Lampard (1956) besagt

$$C_{31} = \frac{1}{\pi} \log 2 \,, \tag{2}$$

(unabhängig von der Gestalt der Kurve!). Es folgt (wieso?) aus der Verallgemeinerung für den Fall ohne Symmetrieachse:

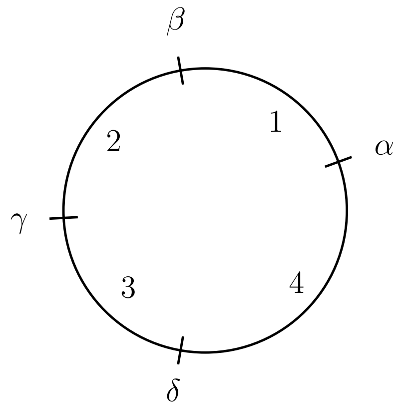
$$\mathrm{e}^{-\pi C_{31}} + \mathrm{e}^{-\pi C_{24}} = 1 \,. \tag{3}$$

Bemerkungen. 1) Der Kapazitätskoeffizient C_{31} ist die Ladung auf der Innenseite von 3 bei Potentialen $V_i = \delta_{1i}$ $(i = 1, \ldots, 4)$. Die Ladung auf der Aussenseite verschwindet, falls die Kurve von einem infinitesimal davon getrennten geerdeten Leiter umgeben ist.
2) Gl. (2) ist wichtig in der Metrologie (Herstellung einer elektrischen Masseinheit).

Ziel der folgenden Schritte (b),(c) ist es, (3) herzuleiten.

(b) Sei $f : G \to \tilde{G}$, $z \mapsto \tilde{z}$ eine konforme Abbildung, mit $G, \tilde{G}$ einfach zusammenhängend; ∂G und $\partial \tilde{G}$ seien in je 4 Stücke geteilt, die sich unter f entsprechen. Zeige $C_{31} = \tilde{C}_{31}$.

Demzufolge und dem Riemannschen Abbildungssatz genügt es, den Fall der Kreisscheibe zu betrachten.



(c) Zeige:

$$C_{31} = \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{\sin\left(\frac{\delta-\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma-\beta}{2}\right)} \right)$$

und schliesse auf (3).

Hinweis: Verwende (1) aus Aufgabe 3 und die unbestimmten Integrale

$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{1-\cos x} = -\frac{1}{\tan(x/2)}\,, \qquad \int \mathrm{d}x \, \frac{1}{\tan(x/2)} = 2\log\left(\sin\frac{x}{2}\right)\,.$$

Bemerkung:

$$C_{31} \;=\; \frac{1}{\pi} \log(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta})\,,$$

wobei

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \;=\; \frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_1} \;:\; \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

das Doppelverhältnis ist.