

Aufgabe 2.1 Untergruppen

Mache dir mit Hilfe der Charaktertafel klar, dass folgende Gruppenpaare äquivalente irreduzible Darstellungen aufweisen:

$$D_2 \leftrightarrow C_{2v},$$

$$D_3 \leftrightarrow C_{3v},$$

$$D_4 \leftrightarrow C_{4v}.$$

Die definierenden Darstellungen im 3-dim. Raum sind allerdings verschieden. Schreibe die verschiedenen Operationen von D_3 und C_{3v} in 3D als Matrizen auf. Zeige, dass die definierenden Darstellungen von D_3 und C_{3v} nicht äquivalent sind, indem du sie in irreduzible Darstellungen zerlegst. Zeige zudem folgende Identitäten

$$D_2 \times C_i = D_{2h} = C_{2v} \times C_i,$$

$$D_4 \times C_i = D_{4h} = C_{4v} \times C_i.$$

Gilt die analoge Identität für D_3 und C_{3v} ?

Aufgabe 2.2 Dipolübergänge im kubischen Kristall

Linear polarisiertes Licht mit dem Polarisationsvektor ϵ_k für die Polarisation entlang $k = x, y, z$ fällt auf einen kubischen Kristall. Wie sind die gruppentheoretischen Auswahlregeln? Welche Übergängen sind für die d -Zustände ($D^{l=2} \rightarrow \Gamma_3^+ \oplus \Gamma_5^+$) erlaubt?

Hinweis: Die Operatoren $\hat{O}_k = \mathbf{r} \cdot \epsilon_k$ transformieren wie x, y, z und gehören zu Γ_4^- .

Aufgabe 2.3 Spin-Bahn Kopplung

Ausreduktion von $\Lambda_k \otimes D^{1/2}$: zeige, dass $\Lambda_3 \otimes D^{1/2} = \Lambda_4 \oplus \Lambda_5 \oplus \Lambda_6$. Gib ein Beispiel eines physikalischen Systems, in dem sich die Niveaus nach diesem Schema aufspalten.

Hinweis: Die Λ_k sind irreduzible Darstellungen von C'_{3v} .

Aufgabe 2.4 Zeitumkehr

Mit dem Frobenius/Schur Test erhält man zusätzliche Entartungen auf Grund von Zeitumkehrinvarianz. Berechne die Entartung für freie (spinlose und Spin-1/2) Teilchen. Stimmen die gruppentheoretisch erwarteten Entartungen mit den Entartungen, die man aus $E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m$ erhält, überein?

Hinweis: Kapitel 2.7.3 im Skript.