Aufgabe 8.1 Elektron im Magnetfeld: Landau Quantisierung

- Wir betrachten ein Elektron mit Ladung $-e$ ($e > 0$) in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung. In der Landau-Eichung wählt man das dazu gehörende Vektorpotential $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$. Der Hamiltonian ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}\big(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\big)^2 \ . \tag{1}$$

  Zeige, dass sich das Problem auf jenes des harmonischen Oszillators zurückführen lässt. Bestimme die Energie-Eigenwerte und die Wellenfunktionen der Landau-Orbits. Welche Bedeutung haben die Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/mc$ und die magnetische Länge $l_B^2 = \hbar c/eB$? Wie sieht es mit der Entartung der Energieniveaus aus?

- Betrachte nun den Fall, dass zusätzlich zum obigen $\mathbf{B}$-Feld auch noch ein homogenes $\mathbf{E}$-Feld in x-Richtung mit Potential $\phi(x) = -|\mathbf{E}|x$ angelegt wird. Bestimme für diesen Fall das Spektrum. Was ändert sich?
  Bestimme den Erwartungswert der Stromdichte $\mathbf{j}_y$ und vergleiche mit dem klassischen Resultat.

Aufgabe 8.2 Fock–Darwin

Betrachte ein Teilchen in einem zweidimensionalen Harmonischen Oszillator, das zusätzlich einem dazu senkrecht stehenden Magnetfeld ausgesetzt ist. Zeige, dass die exakten Werte der Energieniveaus gegeben sind durch

$$E_{N,l} = (N+1)\hbar\Omega + l\frac{\hbar\omega_c}{2}. \tag{2}$$

Für die Quantenzahlen N, l gilt

$$N := n_0 + n_1;\ l := n_0 - n_1;\ n_0, n_1 \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

In Gleichung (2) bezeichnet ω_c die Zyklotronfrequenz ($\omega_c = eB/(mc)$); Ω ist definiert als

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega_c^2}{4}}, \tag{4}$$

wobei ω_0 die Eigenfrequenz des harmonischen Oszillators ist. Dieser Effekt wurde von V. Fock 1928 dargelegt. Ein zweidimensionaler parabolischer Quantentopf lässt sich heute zum Beispiel durch InAs-Quantenpunkte in GaAs realisieren.

Hinweise zur Lösung:

- Führe eine zirkuläre Eichung $\mathbf{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0)$ ein, die die Lösung des Problems vereinfacht.

- Der Hamiltonian lautet dann (zweidimensionales Problem)

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2}\Omega^2(x^2 + y^2) + \frac{\omega_c}{2}(xp_y - yp_x) \tag{5}$$

- Definiere den Parameter $\beta := \sqrt{m\Omega/\hbar}$ und führe Absteigeoperatoren

$$a_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta x + \frac{i}{\beta\hbar}p_x) \tag{6}$$
$$a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\beta y + \frac{i}{\beta\hbar}p_y)$$

  sowie die zugehörigen Aufsteigeoperatoren ein.

- Mit diesen lassen sich neue Absteigeoperatoren

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - i a_y) \tag{7}$$
$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + i a_y)$$

  (und wieder die entsprechenden Aufsteigeoperatoren) definieren. Zeige, dass der Satz von Operatoren (7) die Vertauschungsbeziehungen der Auf- und Absteigeoperatoren des Harmonischen Oszillators erfüllt:

$$[a_i, a_j] = 0 \tag{8}$$
$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$$
$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}1$$

- Drücke nun den Hamiltonian mit Hilfe der neu definierten Operatoren aus und bestimme das Spektrum.

Aufgabe 8.3 Streuproblem: Phasensprung

Betrachte folgende Streuprobleme:

- Ein einfallendes Teilchen wird an einer unendlich hohen senkrechten Potentialwand gestreut.

- Ein einfallendes Teilchen wird an einer Potentialwand mit linearem Anstieg gestreut.

Welchen Phasensprung erfährt die Wellenfunktion jeweils bei der Reflexion?

C. M.