Serie 9: Elektronen in Magnetfeld

Abgabe: 14. Dezember 2004

Aufgabe 9.1 Van Leeuwen Theorem

Beweise das Van Leeuwen Theorem: Es gibt keinen Diamagnetismus in der klassischen Physik.
Hinweis: Sei $H(p_1, \ldots, p_N; q_1, \ldots, q_N)$ der Hamiltonian des N-Teilchensystems ohne Magnetfeld. Dann ist der Hamiltonian im Magnetfeld B gleich $H(p_1 - e/cA_1, \ldots, p_N - e/cA_N; q_1, \ldots, q_N)$, wobei $B = \nabla \times A$ und $A_i = A(q_i)$ ist.
Hinweis: Die Magnetisierung ist durch,

$$M = \left\langle -\frac{\partial H}{\partial B} \right\rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log Z}{\partial B}, \tag{1}$$

gegeben, wobei Z die Zustandssumme im Magnetfeld ist.

Aufgabe 9.2 Landau'scher Diamagnetismus

Finde den orbitalen Beitrag zur Magnetisierung des freien Elektronengases in 3D im Limes $T \to 0$, $H \to 0$. Zeige also, dass die magnetische Suszeptibilität bei $T = 0$ und $H = 0$, durch

$$\chi = 2/3 \chi_P, \tag{2}$$

gegeben ist, wobei χ_P die Pauli-(Spin-)Suszeptibilität ist.
Hinweis: Berechne die freie Energie (Gl. (3.101) im Skript) bei $T = 0$ in zweiter Ordnung in H. Nutze dabei die Euler-Mclaurin Summenformel,

$$\sum_0^{n_0} f(n) = \int_{-1/2}^{n_0+1/2} f(n) dn - \frac{1}{24} \left[f'(n_0 + 1/2) - f'(-1/2) \right]. \tag{3}$$

Aufgabe 9.3 Normaler Halleffekt im 2D Elektronengas

Betrachte das zweidimensionale Elektronengas in gleichförmigen senkrechten magnetischen (entlang z-Achse) und elektrischen (entlang x-Achse) Feldern. Löse die Schrödinger Gleichung in der Landau Eichung (siehe Skript 3.4.1).

[a] Zeige, dass die Entartung der Landau-Niveaus durch das elektrische Feld aufgehoben ist und dass die Energien nun als,

$$\epsilon(x_0) = \omega_c(n + 1/2) - eEx_0 + \frac{m^*}{2} \left(\frac{cE}{B} \right)^2, \tag{4}$$

gegeben sind, wobei $\omega_c = \frac{eB}{cm^*}$ die Zyklotronfrequenz und $x_0 = \frac{cEk_y}{B}$ das Zentrum der Wellenfunktion ist.

[b] Berechne den Erwartungswert des Geschwindigkeits Operators in der Richtung $\vec{E} \times \vec{B}$. Zeige, dass der Strom j_y, durch

$$j_y = \frac{\nu e^2}{h} E, \tag{5}$$

gegeben ist, wobei h Plank'sche Konstante und ν der Füllfaktor (= Elektronendichte/Magetischefluxdichte) ist.

[c] Zeichne den Hall-Wiederstand ($\rho_{xy} = E_x / j_y$) als Funktion von ν.