

Serie 8: Einige Eigenschaften der Fermi Flüssigkeiten

Abgabe: 21. Dezember 2004

Aufgabe 8.1 Effektive Masse

Beweise, dass die effektive Masse der Quasiteilchen in einem translationinvarianten System mit dem Landau Parameter F_1^s und der Masse des Teilchens, m , via,

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{1}{3}F_1^s \quad (1)$$

gekoppelt ist.

Hinweis: Die Herleitung diese Gleichung wird im Skript unter 4.2.4 durchgeführt.

Aufgabe 8.2 Schallgeschwindigkeit und Schalldämpfung im Jellium-Model

Wir wollen die Effekte der Elektron-Phonon Wechselwirkung im Jellium-Model Modell untersuchen. Sei

$$H = H_{el} + H_{ph} + H_{el-ph}, \quad (2)$$

der Hamilton-Operator des Systems. Hier ist H_{el} der Hamilton-Operator für die (wechselwirkende) Elektronen, H_{ph} der Freie-Phonon Hamilton-Operator, mit

$$H_{ph} = \frac{1}{2} \sum_k \{P_k^2 + \Omega_p^2 Q_k^2\}, \quad (3)$$

gegeben (siehe Skript, Kapitel 3.3) und H_{el-ph} der Wechselwirkung-Hamiltonian. Ω_p ist die Plasmafrequenz der Ionen, $\Omega_p^2 = 4\pi n_0 (Ze)^2 / M$.

[a] Beweise, dass sich die Elektron-Phonon Wechselwirkung im allgemeinen als,

$$H_{el-ph} = \sum_k v_k \rho_k^\dagger Q_k \quad (4)$$

schreiben lässt, wobei ρ_k^\dagger der Ladungsdichte-Operator für Elektronen ist. Der Wechselwirkungsparameter v_k ist im Fall des Jellium-Modells, durch

$$v_{\vec{q}} = -i\vec{q} \frac{4\pi Z e^2}{q^2} \left(\frac{n_0}{M}\right)^{1/2}, \quad (5)$$

gegeben.

Hinweis: Beachte, dass die Schwankung der Ionen auf einer Polarisierung führt, und diese äquivalent zur Ladungsdichte ist, mit

$$\delta\rho = \nabla \cdot \vec{P}. \quad (6)$$

[b] Zeige, dass die Phonon Frequenz durch,

$$\omega_k^2 = \Omega_k^2 + |v_k|^2 \chi(k, \omega_k), \quad (7)$$

gegeben ist, wobei $\chi(k, \omega)$ die elektrische Suszeptilität (siehe Übungen 6 und 7) des Elektronengases ist.

Hinweis: Wie lautet die Bewegungsgleichung für Q_k ?

[c] Im allgemeinen wird die Frequenz ω_k eine komplexe Zahl. Der Realteil ergibt die 'renormalisierte' Phonon Frequenz und der Imaginärteil entspricht einer Abschwächung der Phononschwingungen. Nütze, dass im Limes $q \ll k_F$ die Dielektrizitätsfunktion der Elektronen als,

$$\epsilon(q, \omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{s^2 q^2} \left\{ 1 + i \left(\frac{\pi}{6} \right) \frac{\omega}{q p_F} \left(\frac{p_F^2}{m s^2} \right) \right\} + \dots \quad (8)$$

schreiben lässt, wobei $s = v_F/\sqrt{3}$ und die ω_p elektronische Plasmafrequenz ist. Zeige, dass

$$\text{Re } \omega_k^2 = \frac{\Omega_p^2}{\epsilon(k, 0)} \quad (9)$$

und damit, dass im Limes $k \ll k_F$,

$$\text{Re } \omega_k = s_{ph} k, \quad (10)$$

wobei

$$s_{ph} = s \sqrt{\frac{Zm}{M}}, \quad (11)$$

die Schallgeschwindigkeit ist.

Zeige auch, dass

$$\frac{\text{Im } \omega_k}{\text{Re } \omega_k} = \frac{\pi}{12} \sqrt{\frac{Zm}{M}} \frac{p_F}{ms}. \quad (12)$$

Die Abschwächung der Phononschwingungen (Schall Absorption) bleibt bei langen Wellenlängen also klein ($\propto \sqrt{m/M}$).

Aufgabe 8.3 Cooper'sche Instabilität des Fermigas

In diese Aufgabe wird man eines der bekanntesten Resultate der Festkörpertheorie beweisen. Es geht nämlich um Cooper'sche Instabilität, einen der grössten Schritte im theoretischen Verständnis der Supraleitung.

Betrachte das Fermigas mit einer anziehenden Wechselwirkung zwischen den Elektronen die als,

$$V_{kk'} = \begin{cases} -g & \text{falls, } k_F - \Delta k < k, k' < k_F + \Delta k \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (13)$$

mit $\Delta k \ll k_F$, gegeben ist. Löse die Schrödingergleichung für ein Elektronpaar mit Impuls 0 (zwei Elektronen mit Impulsen \vec{k} , bzw. $-\vec{k}$) und eine inerte Fermikugel und zeige, dass die Wechselwirkung $V_{kk'}$ zu einem gebundenen Zustand mit Energie,

$$E = -2\epsilon_k e^{-\frac{4}{g\nu}} \quad (14)$$

führt, wobei ν die Zustandsdichte auf der Fermifläche ist.

Hinweis: Cooper'sche Instabilität ist in vielen Festkörperphysik Büchern erklärt. Ein schönes 'review' Artikel über Fermiflüssigkeiten das auch die Cooper'sche Instabilität betrachtet ist: Leggett, AJ *A theoretical description of the new phases of liquid He* Rev. Mod. Phys. **47** 331 (1975).