Quantenmechanik II
Serie 2

SS 06
Prof. G. Blatter

Aufgabe 2.1 2D Hilbertraum – Quantum Bit

Ein Qubit (Quantum Bit) ist ein System beschrieben durch einen 2D Hilbertraum. Wir bezeichnen die orthonormierte Basis des Raumes mit $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Dieser Hilbertraum ist der einfachste nichttriviale Hilbertraum. Reine und gemischte Zustände haben darin eine schöne geometrische Interpretation als Punkte auf der Oberfläche bzw. im Inneren einer 3D Kugel, der Bloch Kugel.

a) Der Raum der reinen Zustände des Quantensystems sind Strahlen im Hilbertraum; d.h. man kann den Phasenfaktor und die Normierung festlegen. Zeige, dass der Raum der reinen Zustände äquivalent ist zu S^2.

b) Gemischte Zustände werden durch Dichtematrizen ρ beschrieben. Für ein Qubit ist ρ eine positive 2×2 Matrix mit $\mathrm{Tr}\rho = 1$. Die Erwartungswerte für die drei Spinprojektionen sind definiert durch $S_k = \mathrm{Tr}(\rho\sigma_k)$ mit σ_k den Pauli Matrizen. Zeige, dass gilt:

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{S}\cdot\boldsymbol{\sigma}),$$

d.h. die Spinprojektionen $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)^{\mathrm{T}}$ legen die Dichtematrix vollständig fest.

c) Zeige zudem, dass $S^2 \le 1$. Schliesse daraus, dass ein gemischter Zustand eines Qubits einem Punkt in der Bloch Kugel $\mathsf{B}_1 \subset \mathbb{R}^3$ entspricht.
Tipp: Benutze $\det\rho \ge 0$.

d) Zeige, dass die Reinheit $r = \mathrm{Tr}\rho^2$ des gemischten Zustands ρ gegeben ist durch $r = (1{+}S^2)/2$; ein reiner Zustand entspricht $r = 1$, $S^2 = 1$, d.h. einem Punkt auf der Oberfläche vgl. a).

Aufgabe 2.2 Kohärente Manipulation eines Qubits

Wie in Serie 1 am Beispiel eines Doppeltopf Potentials gezeigt, wird ein Qubit in der Basis $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ durch den Hamiltonian $H(t) = -\mathbf{B}(t)\cdot\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{B}(t) = [\Delta + \delta(t), 0, \epsilon(t)]^{\mathrm{T}}/2$; $\Delta \gg \delta, \epsilon$ beschrieben, wobei $\Delta/\hbar$ die Tunnelrate ist, $\delta(t)/\hbar$ die Abweichung von der Tunnelrate durch Veränderung der Potentialbarriere und $\epsilon(t)$ die relative Verschiebung der beiden Minima des Potentials. Die Energieeigenzustände für $\delta = \epsilon = 0$ sind dann gegeben durch $|0,1\rangle = [|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle]/\sqrt{2}$ mit der Energiedifferenz $\Delta E = E_1 - E_0 = \Delta$. Die Parameter $\delta(t)$ und $\epsilon(t)$ können verändert werden, um das Qubit zu manipulieren.

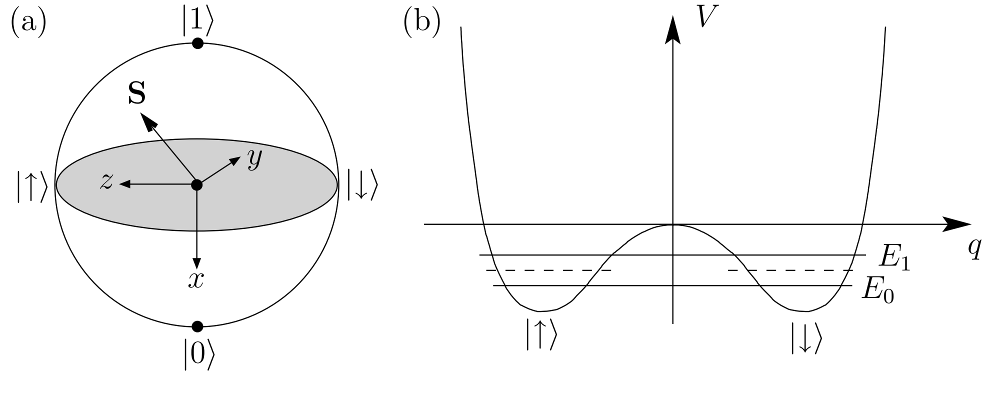

Abbildung 1: (a) Bloch Kugel; (b) Doppeltopf Potential.

a) Leite die Bewegungsgleichungen für die Spinprojektionen $\mathbf{S}(t) = \mathrm{Tr}[\rho(t)\boldsymbol{\sigma}]$,

$$\hbar\dot{\mathbf{S}}(t) = 2\mathbf{S}(t) \wedge \mathbf{B}(t),$$

aus der Schrödingergleichung $i\hbar\dot{\rho}(t) = [H(t), \rho(t)]$ her. Die Gleichung entspricht den Bewegungsgleichungen für ein Ensemble von magnetischen Momenten in einem NMR Experiment. Durch Lösen der drei gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen bekommt man eine Lösung für die Dichtematrix $\rho(t)$.

b) *Rabi Oszillationen:*
Jeder Zustand, beschrieben durch den Spin $\mathbf{S}$, präzidiert aufgrund des angelegten permanenten Magnetfeldes $B_x = \Delta/2$ mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega_L = -\Delta/\hbar$ um die x Achse. Wir starten mit dem Qubit im Grundzustand $\rho(0) = |0\rangle\langle 0|$, d.h. $\mathbf{S} = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Es wird nun ein schwaches, oszillierendes magnetisches Feld

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \cos(\omega t)$$

parallel zur z Achse angelegt. Berechne die Wahrscheinlichkeit $P_{0\to 1}(t) = \langle 1|\rho(t)|1\rangle$ für den Übergang in den Zustand $|1\rangle$. Was ist die Resonanzfrequenz ω_r, so dass P bei bestimmten Zeiten den maximal möglichen Wert 1 annimmt? Nach welcher Zeit $\tau_{\pi/2}$ ist $P = 1/2$ bei der Resonanzfrequenz? Die Wahrscheinlichkeit $P = 1/2$ bedeutet, dass der Spin in die yz Ebene gedreht wurde; man bezeichnet deshalb einen solchen Puls auch als $\pi/2$ Puls.
Tipp: Gehe über in ein Bezugssystem, das mit ω um x rotiert.

c) *Ramsey Experiment:*
Startend vom Qubit im Grundzustand, benutzt das Ramsey Experiment einen $\pi/2$ Puls gefolgt von einem $-\pi/2$ Puls mit der Zeit τ zwischen den einzelnen Pulsen. Was ist die Wahrscheinlichkeit $P_{\mathrm{Ramsey}}(\tau)$ das Qubit nach dieser Pulssequenz wieder im Grundzustand zu finden?

d) Welchem Versuch (Rabi oder Ramsey) entspricht das Problem von Leggett-Chakravarty [Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987)]? Sie betrachten ein Teilchen im Doppeltopf Potential, vgl. Abb. 1(b), dass sich am Anfang im linken Topf befindet, und suchen nach der Wahrscheinlichkeit, es nach einer bestimmten Zeit t wieder dort anzutreffen.

Aufgabe 2.3 Qubit mit Dekohärenz

Dekohärenz im Qubit aufgrund der Umgebung kann man phänomenologisch durch zwei charakteristische Zeiten $T_{1,2}$ beschreiben. Dazu werden die Bewegungsgleichungen für den Spin wie folgt abgeändert:

$$\dot{\mathbf{S}} = 2\mathbf{S}(t) \wedge \mathbf{B}(t)/\hbar - [(S_x - 1)/T_1, S_y/T_2, S_z/T_2]^{\mathrm{T}}.$$

a) Was ist der Zustand für $t \to \infty$ für $\delta = \epsilon = 0$? Was beschreiben die Zeiten T_1 und T_2?

b) Was ist nun die Wahrscheinlichkeit $P_{\mathrm{Ramsey}}(\tau)$ und welche Zeit lässt sich mit diesem Experiment messen?

c) Welches ist die zeitliche Änderung der Reinheit $\dot{r}$? Wie gehen $T_{1,2}$ in $\dot{r}$ ein? Was für eine Beziehung bekommt man für die charakteristischen Zeiten aus der Bedingung $r \leq 1$ für die Reinheit?
Tipp: Starte vom Grundzustand $|0\rangle$, der ein reiner Zustand ist, $r = 1$. Für kleine Abweichungen vom Grundzustand sollte die Reinheit nicht zunehmen. Daraus bekommt man eine Ungleichung, die T_1 und T_2 verknüpft.

d) Studiere den Artikel von D. Vion *et al.*, Science **296**, 886 (2002), die Rabi und Ramsey Experiment in einem supraleitenden Ladungsqubit durchgeführt haben. Was sind die Dekohärenzzeiten $T_{1,2}$ in ihrem Qubit?

F.H.