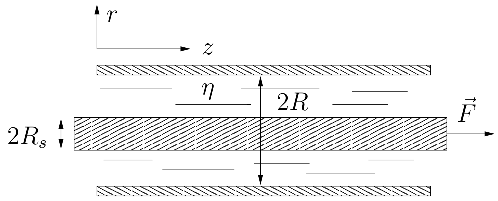
Kontinuumsmechanik
Serie 12

Aufgabe 12.1 Strömung im Rohr durch Bewegung eines Stabes

In einem sehr langen Rohr mit zylindrischem Querschnitt (Radius R) befinde sich eine viskose Flüssigkeit (Viskosität η) in Ruhe. Nun werde ein ebenfalls zylinderförmiger Stab (Radius R_s) mittels einer konstanten Kraft $\vec{F} = F\hat{z}$ längs des Rohrs durch die Flüssigkeit bewegt.



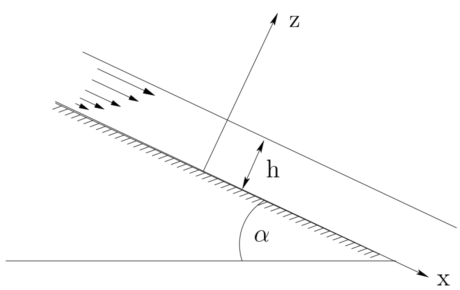
Aufgrund der Viskosität wird dabei eine Strömung im Rohr erzeugt. Der Stab sei länger als das Rohr, so dass sich keine Zirkulärströmung um die Stabenden einstellen kann.

a) Bestimme die stationäre Strömungsgeschwindigkeit $\vec{v}(r, \phi, z)$, ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Fluida ohne Volumenkräfte und ohne Druckgefälle.
Tipp: verwende die Herleitung der Hagen-Poiseuille Strömung (Skript Kap. 10.2, S.94/95) mit modifizierten Randbedingungen und $p' = 0$.

b) Berechne die Wirbeldichte $\vec{\Omega}$ und daraus die Dissipation in der Flüssigkeit. Vergleiche sie mit der Verlustleistung $P = \vec{F} \cdot \vec{v}|_{r=R_s}$ des Stabes.

Aufgabe 12.2 Strömung einer dünnen Flüssigkeitsschicht auf schiefer Ebene

Eine Schicht der Dicke h einer inkompressiblen viskosen Flüssigkeit (dynamische Viskosität η) bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft längs einer schiefen Ebene (Bild).
Man bestimme die stationäre Strömung, d.h. das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(x, z)$, den Druckverlauf $p(z)$ sowie den Fluss Φ (pro Längeneinheit in y-Richtung).



Aufgabe 12.3 Widerstand einer rotierenden Kugel

Eine starre Kugel vom Radius a befinde sich inmitten eines unendlich ausgedehnten Fluidums. Die Kugel rotiere mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω. Die Reynolds-Zahl $R = \Omega a^2 \rho / \eta$ sei klein, so dass Strömung beschrieben werden kann durch

$$\vec{\nabla} p = -\eta \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0.$$

a) Zeige unter Verwendung von sphärischen Koordinaten, dass eine rein zirkuläre Strömung $\vec{v} = v_\varphi(r, \theta)\hat{\varphi}$ möglich ist unter der Voraussetzung, dass

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 r}(r v_\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\varphi \sin\theta)\right] = 0. \qquad (*)$$

b) Bestimme die Randbedingungen, welche v_φ für $r = a$ bzw. $r \to \infty$ erfüllen muss. Zeige, dass $(*)$ mit diesen RB gelöst wird durch

$$v_\varphi = \frac{\Omega a^3}{r^2} \sin\theta.$$

c) Bestimme das Drehmoment, welches benötigt wird, um die Rotationsgeschwindigkeit Ω der Kugel konstant zu halten. Zeige dazu, dass die Schubspannung bei $r = a$ gegeben ist durch

$$K_\varphi = -3\eta\Omega \sin\theta.$$