

Aufgabe 9.1 Schwerelose Flüssigkeiten

In einem Space Shuttle bildet verschüttete Flüssigkeit aufgrund der Schwerelosigkeit und unter der Wirkung des Kapillareffekts Kugeln.

Berechne Frequenzen, Geschwindigkeitsfeld und Stromlinien der niedrigsten drei Anregungsmoden ($l = 0, 1, 2$) bei harmonischer Anregung $\sim \exp(-i\omega t)$.

Wie könnte man das Resultat verwenden, um mittels Schallwellen den Radius von Nebeltröpfchen zu ermitteln, wenn man davon ausgeht, dass die Lichtbrechungseigenschaft der Tröpfchen von der Anregungsmoden abhängt? Die Tröpfchen werden dabei als Kugeln idealisiert.

Tipp: Arbeite in Kugelkoordinaten.

Aufgabe 9.2 Kapillare

Falls man ein Glas Wasser umdreht fließt das Wasser raus, obwohl der Luftdruck eine Wassersäule bis zu 10 m Höhe zu halten vermöchte. Ist der Durchmesser des Glases jedoch genügend klein wie zum Beispiel bei einer Pipette, bleibt das Wasser oben. Ein solches Gefäß bezeichnet man als Kapillare.

- a) Berechne die Dispersionsrelation für Schwerewellen an der Grenzfläche zweier unterschiedlich dichter (ρ_1, ρ_2) Fluida. Verwende die Herleitung aus dem Skript (S.68/69) mit den Ansätzen

$$\eta = ae^{i(kx-\omega t)}; \quad \Phi_1 = Ae^{-kz}e^{i(kx-\omega t)}; \quad \Phi_2 = Be^{kz}e^{i(kx-\omega t)}$$

für harmonische Auslenkung und Geschwindigkeitspotentiale.

- b) Berechne die maximale Seitenlänge für ein Gefäß mit quadratischem Querschnitt, welches das Wasser oben behält.

Tipp: Untersuche die Dispersionsrelation für die Grenzfläche Wasser-Luft (Luft: $\rho \approx 0$) hinsichtlich zeitlicher Stabilität.

$$\sigma_{\text{Wasser/Luft}} = 7.2 \times 10^{-2} \text{ N/m}$$

Aufgabe 9.3 Wann erzeugt der Wind Wasserwellen?

Untersuche die Stabilität einer ruhenden, horizontalen Wasseroberfläche unter dem Einfluss eines darüber hinwegstreichenden Windes. Zeige, dass für Windgeschwindigkeiten u grösser als eine Grenzgeschwindigkeit u_{gr} , die flache, ruhende Oberfläche instabil wird, d.h. Wasserwellen entstehen.

Hinweis: Betrachte kleine Störungen ϕ_L und ϕ_W der anfänglichen Geschwindigkeitspotentiale $\Phi_L = -ux$ in der Luft, respektive $\Phi_W \equiv 0$ im Wasser, sowie eine kleine Störung der glatten Wasseroberfläche $\eta(x)$. Stelle dann die Bernoulli-Gleichungen in 1. Ordnung in ϕ_j , $j = L, W$ auf. Sowohl Wasser als auch Luft sind als inkompressibel anzunehmen. Zeige, dass für $u > u_{gr}$ die kleinen Störungen ϕ_j mit der Zeit exponentiell anwachsen (\Rightarrow Instabilität).