

# Elektrodynamik

Prof. Dr. G. Blatter

2007

**Achtung:** Dieses Dokument basiert auf den Aufzeichnungen von Prof. Blatter, die in den Vorlesungen verteilt werden. Die Übertragung in elektronische Form führt zu einer Anhäufung von Druckfehlern. Wer sich an der Fehlersuche beteiligen möchte, einen typographischen, grammatikalischen, stilistischen oder sonstwie gearteten Fehler als solchen identifiziert und Korrekturen an [mitschriften@vmp.ethz.ch](mailto:mitschriften@vmp.ethz.ch) meldet, vermeidet Mehraufwand und verdient sich die **Achtung** aller Leser.

**Dank:** Ich danke den Herren Ruben Andrist, Darko Pilav, Simon Wood, Pascal Steger und meinen Mitarbeitern Fabian Hassler und Alexander Thomann für Ihre geschätzte Mithilfe.

G. Blatter

# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>0</b> | <b>Einleitung</b>  | <b>3</b>  |
| <b>1</b> | <b>Elektrostatik</b>                                       | <b>9</b>  |
| 1.1      | Mathematische Hilfsmittel . . . . .                        | 9         |
| 1.1.1    | Einfache Vektoridentitäten . . . . .                       | 9         |
| 1.1.2    | Theoreme der Vektorrechnung . . . . .                      | 9         |
| 1.1.3    | Integration . . . . .                                      | 12        |
| 1.1.4    | Deltafunktion $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ . . . . .  | 12        |
| 1.1.5    | Greensche Funktion zu $\Delta$ . . . . .                   | 15        |
| 1.2      | Das Coulombgesetz der Elektrostatik . . . . .              | 17        |
| 1.3      | Oberflächen und Zwischenschichten . . . . .                | 22        |
| 1.3.1    | Geladene Oberfläche . . . . .                              | 23        |
| 1.3.2    | Metallische Oberfläche . . . . .                           | 24        |
| 1.3.3    | Neutrale Dipolschicht . . . . .                            | 25        |
| 1.4      | Elektrostatische Randwertprobleme . . . . .                | 26        |
| 1.5      | Elektrostatische Energie . . . . .                         | 28        |
| 1.6      | Kapazitäten . . . . .                                      | 30        |
| <b>2</b> | <b>Randwertprobleme in der Elektrostatik</b>               | <b>35</b> |
| 2.1      | Bildtechnik . . . . .                                      | 35        |
| 2.1.1    | Greensche Funktion mit Bildtechnik . . . . .               | 38        |
| 2.2      | Konforme Abbildungen . . . . .                             | 39        |
| 2.3      | Orthogonale Funktionen, karthesische Koordinaten . . . . . | 41        |
| 2.4      | Krummlinie Koordinaten . . . . .                           | 44        |
| 2.4.1    | Vektoranalysis: grad, div, rot, Laplace . . . . .          | 46        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.5      | Kugelkoordinaten . . . . .   | 50         |
| 2.5.1    | Lösungen des Laplace-Problems $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$ . . . . . | 51         |
| 2.5.2    | Anwendungen . . . . .  | 55         |
| 2.5.3    | Physikalische Anwendungen . . . . .                                  | 57         |
| 2.6      | Zylinderkoordinaten . . . . .  | 60         |
| 2.6.1    | Lösungen des Laplace-Problems $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$ . . . . . | 61         |
| 2.6.2    | Fourier-Bessel-Reihe . . . . .                                       | 63         |
| 2.6.3    | Modifizierte Besselfunktionen . . . . .                              | 65         |
| 2.6.4    | Sphärische Besselfunktionen . . . . .                                | 65         |
| 2.6.5    | Anwendungen . . . . .  | 67         |
| 2.7      | Green'sche Funktionen . . . . .                                      | 68         |
| 2.7.1    | Kugelschale $a < r < b$ . . . . .                                    | 68         |
| 2.7.2    | Zylinderschale $a < \rho < b$ . . . . .                              | 70         |
| 2.7.3    | Entwicklung in Eigenfunktionen . . . . .                             | 70         |
| 2.8      | Multipol-Entwicklung . . . . .                                       | 71         |
| 2.8.1    | Energie einer Ladungsdichte in Multipolentwicklung . . . . .         | 73         |
| <b>3</b> | <b>Magnetostatik</b>   | <b>75</b>  |
| 3.1      | Das Ampère Gesetz der Magnetostatik . . . . .                        | 76         |
| 3.2      | Vektorpotential und Eichinvarianz . . . . .                          | 81         |
| 3.3      | Stromschleife . . . . .  | 82         |
| 3.4      | Kraft, Drehmoment und Energie . . . . .                              | 87         |
| 3.5      | Ampèresches (magnetisches) Blatt . . . . .                           | 91         |
| 3.6      | Konforme Abbildungen (2D) . . . . .                                  | 92         |
| <b>4</b> | <b>Elektro- und Magnetostatik im Medium</b>                          | <b>93</b>  |
| 4.1      | Elektrostatik im linear polarisierbaren Medium . . . . .             | 95         |
| 4.2      | Magnetostatik im linear polarisierbaren Medium . . . . .             | 102        |
| 4.3      | Beispiele zur Elektro- und Magnetostatik . . . . .                   | 109        |
| 4.4      | Strom-Feld Beziehung in Medien . . . . .                             | 112        |
| <b>5</b> | <b>Elektrodynamik</b>  | <b>115</b> |
| 5.1      | Elektrodynamik im Vakuum und im Medium . . . . .                     | 115        |
| 5.1.1    | Magnetische Energie . . . . .  | 118        |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 5.1.2    | Maxwellgleichungen in Medien . . . . .  | 120        |
| 5.2      | Skalar- und Vektor-Potentiale . . . . .   | 121        |
| 5.3      | Lösung der Wellengleichung . . . . .  | 124        |
| 5.4      | Energie- und Impulserhaltung eines Materie-Feld Systems . .                           | 128        |
| 5.5      | Struktur der Maxwell-Gleichungen . . . . .  | 131        |
| 5.5.1    | Symmetrien . . . . .  | 132        |
| 5.5.2    | Einheiten . . . . .   | 133        |
| 5.5.3    | Dualität und magnetische Monopole . . . . .   | 135        |
| <b>6</b> | <b>Ebene Wellen und ihre Ausbreitung</b>  | <b>137</b> |
| 6.1      | Dispersionsloses, nichtleitendes Medium . . . . .                                     | 139        |
| 6.1.1    | Polarisationen . . . . .  | 142        |
| 6.1.2    | Reflexion und Transmission ebener Wellen durch eine<br>planare Grenzschicht . . . . . | 144        |
| 6.2      | Leitendes Medium, Skin-effekt . . . . .   | 150        |
| 6.3      | Dispersive Medien . . . . .   | 151        |
| 6.4      | Analytizität und Kausalität . . . . .   | 153        |
| 6.5      | Propagation in dispersive Medien . . . . .  | 158        |
| <b>7</b> | <b>Wellenleiter und Kavitäten</b>   | <b>161</b> |
| 7.1      | Ideale Hohlleiter . . . . .   | 162        |
| 7.2      | Reale metallische Hohlleiter . . . . .  | 172        |
| 7.3      | Kavitäten . . . . .   | 176        |
| 7.4      | Dielektrische Wellenleiter . . . . .  | 180        |
| 7.5      | Einkoppelung in Wellenleiter . . . . .  | 183        |
| <b>8</b> | <b>Erzeugung von Strahlung: Antennen</b>  | <b>187</b> |
| 8.1      | Elektrischer Monopol . . . . .  | 190        |
| 8.2      | Elektrische Dipolfelder . . . . .   | 191        |
| 8.3      | Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolfelder . . . . .                          | 194        |
| 8.4      | Antenne als Randwertproblem . . . . .   | 197        |
| <b>9</b> | <b>Streuung an kleinen Objekten</b>   | <b>199</b> |
| 9.1      | Streuwellen . . . . .   | 200        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 9.2       | Dielektrische Kugel . . . . .                    | 201        |
| 9.3       | Ideal leitende Kugel . . . . .                   | 202        |
| 9.4       | Kollektion von Streuern . . . . .                | 204        |
| 9.5       | Inhomogene Medien . . . . .                      | 205        |
| 9.6       | Anwendungen . . . . .                            | 207        |
| 9.6.1     | Himmelsblau . . . . .                            | 207        |
| 9.6.2     | Kritische Opaleszenz . . . . .                   | 209        |
| <b>10</b> | <b>Beugung/Diffraktion von Licht</b>             | <b>211</b> |
| 10.1      | Kirchhoff'sche Beugungstheorie . . . . .         | 212        |
| 10.2      | Fraunhofer- und Fresnelbeugung . . . . .         | 216        |
| 10.2.1    | Fraunhofer Beugung . . . . .                     | 218        |
| 10.2.2    | Fresnel Beugung . . . . .                        | 218        |
| 10.3      | Babinetsches Prinzip . . . . .                   | 219        |
| 10.4      | Optische Intensität . . . . .                    | 220        |
| 10.5      | Licht und Schatten . . . . .                     | 222        |
| 10.5.1    | Geometrische Optik, Eikonapproximation . . . . . | 222        |
| 10.5.2    | Schatten in der Wellenoptik . . . . .            | 224        |
| 10.6      | Fraunhofer Beugung . . . . .                     | 227        |
| 10.6.1    | Rechteck . . . . .                               | 229        |
| 10.6.2    | Spalt . . . . .                                  | 229        |
| 10.6.3    | Kreis . . . . .                                  | 230        |
| 10.7      | Fresnel Beugung: Spalt und Halbebene . . . . .   | 232        |
| 10.8      | Vektorielle Beugungstheorie . . . . .            | 237        |
| <b>11</b> | <b>Relativitätstheorie</b>                       | <b>241</b> |
| 11.1      | Von Galilei zu Lorentz . . . . .                 | 241        |
| 11.2      | Vektoren und Tensoren . . . . .                  | 244        |
| 11.2.1    | Ko- und kontravariante Vektoren . . . . .        | 244        |
| 11.2.2    | 4-er Vektoren, Tensoren in der SRT . . . . .     | 247        |
| 11.2.3    | Zusammenhang mit linearer Algebra . . . . .      | 250        |
| 11.3      | Die Lorentzgruppe . . . . .                      | 253        |
| 11.4      | Eigenzeit und Lichtkegel . . . . .               | 257        |

|  |            |
|--|------------|
| 11.5 Dopplereffekt . . . . .   | 260        |
| 11.6 Addition von Geschwindigkeiten . . . . .                          | 261        |
| 11.7 Relativistische Mechanik . . . . .                                | 263        |
| 11.8 Kovarianz (Lorentzinvarianz) der Elektrodynamik . . . . .         | 265        |
| 11.9 Transformation elektromagnetischer Felder . . . . .               | 268        |
| 11.10 Allgemeine Relativitätstheorie . . . . .                         | 270        |
| <b>12 Lagrange Formulierung</b>  | <b>279</b> |
| 12.1 Relativistische Mechanik . . . . .                                | 279        |
| 12.2 Elektrodynamik . . . . .  | 283        |
| 12.3 Proca-Gleichungen . . . . .                                       | 283        |
| <b>13 Dynamik relativistischer Teilchen</b>                            | <b>285</b> |
| 13.1 Homogenes, statisches Magnetfeld . . . . .                        | 285        |
| 13.2 Orthogonale Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ . . . . .              | 286        |
| <b>14 Strahlung relativistischer Teilchen</b>                          | <b>289</b> |
| 14.1 Strahlung nichtrelativistischer beschleunigter Teilchen . . . . . | 292        |
| 14.2 Strahlung relativistischer beschleunigter Teilchen . . . . .      | 293        |
| 14.2.1 Winkelverteilung der Strahlung . . . . .                        | 295        |
| 14.2.2 Synchrotronstrahlung . . . . .                                  | 297        |



## Literatur

J.D. Jackson

*Classical Electrodynamics*

(John Wiley, 1962)

Klassiker, gut, extensiv

L.D. Landau, E.M. Lifshitz, and L.P. Pitaevskii

*Electrodynamics of continuous media, Landau-Lifshitz Course in Theoretical Physics, Vol. 8*

(Pergamon, 1960)

Für Freaks, exzellent aber schwierig, Landau'sch

W.K.H. Panovsky and M. Phillips

*Classical Electricity and Magnetism*

(Addison-Wesley, 1955)

Vorgänger von Jackson

A. Sommerfeld

*Elektrodynamik, Vorlesungen über theoretische Physik, III*

(Akademische Verlagsgesellschaft, 1967)

Klassiker, alte Schule

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands

*The Feynman Lectures on Physics, II*

(Addison Wesley, Redwood, 1964)

Feynman'sch

W. Greiner

*Theoretische Physik, Band 3*

(Harri Deutsch, 1991)

etwas einfacher

R. Becker und F. Sauter

*Theorie der Elektrizität*

(Teubner, 1973)

etwas einfacher

M. Schwarz

*Principles of Electrodynamics*

(McGraw-Hill, 1972)

übersichtlich, etwas kürzer, keine spezielle Relativitätstheorie

G. Lehner  
*Elektromagnetische Feldtheorie*  
(Springer, 1994) &  
mit Ingenieur touch

A. Sommerfeld  
*Optik, Vorlesungen über theoretische Physik, IV*  
(Harry Deutsch, 1978)  
Klassiker, alte Schule

M. Born and E. Wolf  
*Principles of Optics*  
(Pergamon, 1959)  
Klassiker der Optik

E.T. Whittaker  
*A history of the Theories of Aether and Electricity*, Vol. I and II  
(Harper, 1960)  
geschichtliches

# Kapitel 0

## Einleitung

Die Elektrodynamik beschreibt die Physik der *Maxwellgleichungen* (MG),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \rho, \quad (\text{Ii})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{Ih})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - c^{-1} \partial_t \vec{D} = 4\pi c^{-1} \vec{j}, \quad (\text{IIi})$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{B} = 0. \quad (\text{IIh})$$

Die Gleichungen I sind statisch, II involvieren zeitliche Ableitungen  $\partial_t$  und sind somit dynamisch; (i) sind inhomogene Gleichungen mit Quellen  $\rho =$  Ladungsdichte und  $\vec{j} =$  elektrische Stromdichte, die Quellen des (di-)elektrischen Feldes  $\vec{D}$  und des Magnetfeldes  $\vec{H}$ . Die Gleichungen (h) sind homogen in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Die Maxwell Gleichungen involvieren 4 Vektorfelder  $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}$ , und  $\vec{H}$ .

Im *Vakuum* gilt  $\vec{E} = \vec{D}$ ,  $\vec{B} = \vec{H}$ , und auf die bewegten ( $\vec{v}_i$ ) Ladungen  $q_i$  wirken die Lorentz Kräfte (nichtrelativistisch)

$$\vec{F}_i = q_i \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_i \wedge \vec{B} \right). \quad (\text{LK})$$

Mit den (nichtrelativistischen) Newton'schen Gleichungen  $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i$  der Mechanik haben wir ein vollständiges System von Gleichungen, mit Quellen  $\rho(\vec{E}, \vec{B})$  und  $\vec{j}(\vec{E}, \vec{B})$ , und das Problem ist lösbar (allerdings nur approximativ aufgrund von Problemen mit Selbstfeldern). Typischer ist, dass Quellen  $\rho$  und  $\vec{j}$  (sowie geeignete Randbedingungen) vorgegeben sind und die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  zu bestimmen sind.

In einem vom Vakuum verschiedenen *Medium* brauchen wir zur Lösung der

Maxwell Gleichungen zusätzlich die *konstitutiven Gleichungen*

$$\rho = \rho(\vec{E}, \vec{B}), \quad (\text{Iq})$$

$$\vec{j} = \vec{j}(\vec{E}, \vec{B}), \quad (\text{IIq})$$

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad (\text{Ip})$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (\text{IIp})$$

Sie beschreiben, wie das Medium auf die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  reagiert, zum Beispiel,

ein Isolator wird polarisiert (üblicherweise ist  $\varepsilon > 1$ ),

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad D_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} E_\nu$$

ein Metall leitet Ströme,

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad j_\mu = \sigma_{\mu\nu} E_\nu$$

ein Diamagnet verdrängt das Feld ( $\mu_{\text{dia}} < 1$ ),

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad B_\mu = \mu_{\mu\nu} H_\nu.$$

Es ist Aufgabe der Festkörperphysik, Astrophysik, etc. die konstitutiven Gleichungen der Medien (Festkörper z.B., Isolatoren, Halbleiter, Metalle, Supraleiter, etc.; stellare Materie, z.B., Neutronensterne, Sonnen, etc.) zu finden. Es ist die Aufgabe der Elektrodynamik/Optik die elektrischen  $\vec{E}$  und magnetischen  $\vec{B}$  Felder zu bestimmen. Die Maxwellgleichungen MG, konstitutiven Gleichungen KG und Randbedingungen legen die Lösungen fest. Damit ist Aufgaben und Ziele dieser Vorlesung bestimmt: i) Gegeben (generische) konstitutive Gleichungen und Randbedingungen, welches sind die interessantesten Lösungen der Maxwellgleichungen? ii) Was ist die Struktur der Maxwellgleichungen?

Jede der Maxwellschen Gleichungen hat eine spezifische physikalische Bedeutung (im Vakuum):

Ii: Ladungen sind die Quellen des *longitudinalen elektrischen Feldes*. Das durch die Ladungen erzeugte Potential fällt wie  $1/r$  ab (das Photon hat Masse 0). (Coulomb, Gauss).

Ih: Es gibt keine magnetischen Monopole und damit *keine longitudinalen Magnetfelder* (genauer, es gibt keine zwei Teilchen mit verschiedenem Verhältnis von elektrischer und magnetischer Ladung; Dualität).

Iii: Ströme sind die Quellen des *transversalen Magnetfeldes* (Ampère).

III: Zeitlich veränderliche Magnetfelder erzeugen *transversale elektrische Felder* (Faraday).

Das Verständnis für elektromagnetische Erscheinungen wurde über Jahrhunderte hindurch entwickelt und gipfelte in der Arbeit von James Clerk Maxwell. Aber auch im 20. Jahrhundert ging die Entwicklung weiter, mit der Verquickung von Elektrodynamik und Quantenmechanik zur Quantenelektrodynamik (QED) und elektromagnetischer und schwacher Wechselwirkung. Eine historische Übersicht geben folgende Seiten, vgl. Abb. 1.

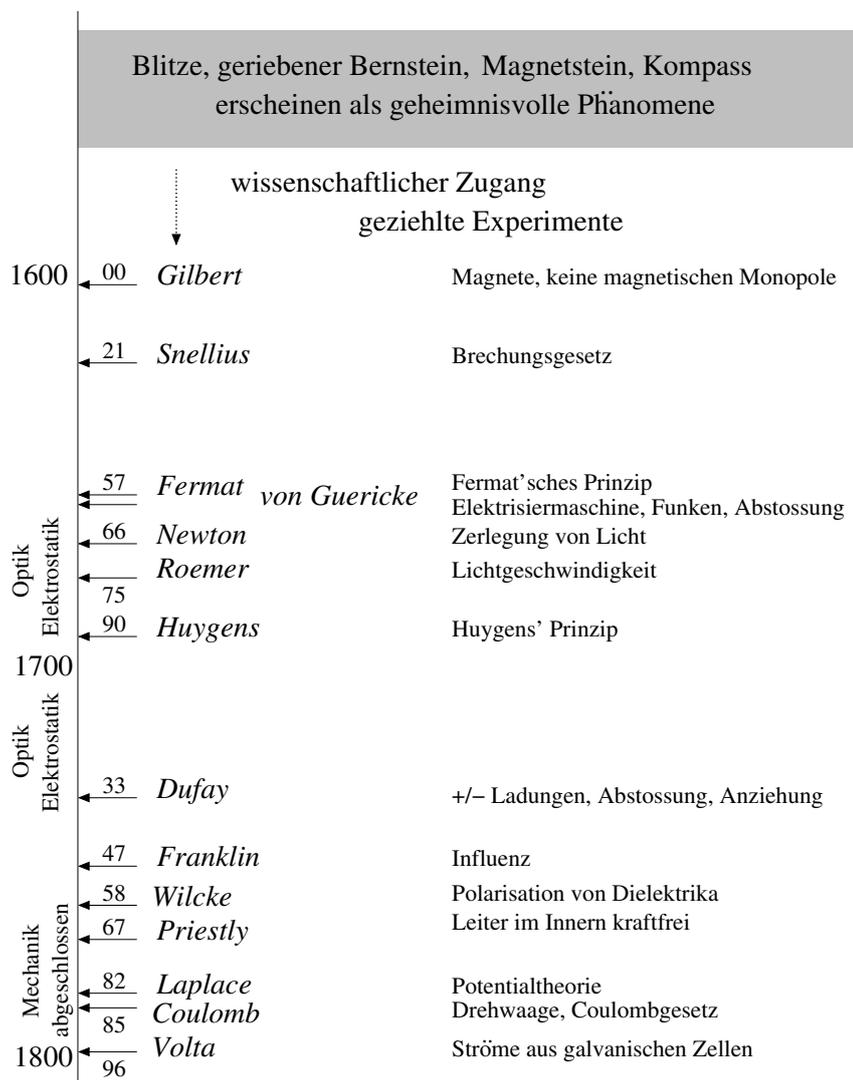


Abb. 1: Geschichtliche Übersicht mit Daten, Entdecker, und Thema. Aufgeführt sind Beiträge zu Elektrostatik, Magnetostatik, Optik, Elektrodynamik und Mathematik.

|   |                               |      |   |   |
|---|-------------------------------|------|---|---|
| Optik<br>Magnetostatik                                | 1800                          | 07   | <i>Young</i>  | Interferenz des Lichtes   |
|   |                               | 11   | <i>Malus</i><br><i>Poisson</i>  | Polarisation des Lichtes<br>Poisson Gleichung der ES  |
|   |                               | 20   | <i>Arago, Seebeck</i><br><i>Ampere</i> <i>Oersted</i><br><i>Biot-Savart</i> | Ströme lenken Magnete ab<br>Magnetisierung von Stoffen durch Ströme<br>Magnetfelder aus Strömen, Kraftwirkung |
|   |                               | 26   | <i>Ohm</i>  | Ohmsches Gesetz   |
|   |                               | 31   | <i>Faraday</i> <i>Green</i>   | Greensche Sätze<br>elektromagn. Induktion   |
|   |                               | 33   | <i>Gauss</i>  | Messung magnetischer Größen   |
|   |                               | 39   | <i>Gauss</i> <i>Weber</i>   | magnetisches Masssystem<br>Theoreme und Sätze   |
|   |                               | 41   | <i>Joule</i> <i>Doppler</i>   | Wärmewirkung des el. Stromes<br>Doppler Effekt  |
|   |                               | 45   | <i>Faraday</i><br><i>Helmholtz</i>  | Faraday Effekt<br>Energieerhaltung  |
|   | Unifizierung von ED und Optik | 1850 | 64  | <i>Maxwell</i>  |
|   |                               | 73   | <i>Maxwell</i>  | Treatise, Vereinheitlichung ED und Optik  |
|   |                               | 87   | <i>Michelson-Morley</i>   | $c$ ist absolut   |
|   |                               | 88   | <i>Hertz</i>  | Dipolstrahlung  |
| Relativistische Aera<br>Quantenaera                   | 1900                          | 00   | <i>Planck</i>   | Strahlungsgesetz  |
|   |                               | 05   | <i>Einstein</i>   | Photoeffekt<br>Spezielle Relativitätstheorie  |
|   |                               | 16   | <i>Einstein</i>   | Allgemeine Relativitätstheorie  |
| Entwicklung der Quantenmechanik                       |                               |      |   |   |
| Elektro-Schwach Unifizierung<br>Quantenelektrodynamik | 1950                          | 47   | <i>Feynman, Tomonaga, Schwinger</i>   | Quantenelektrodynamik   |
|   |                               | 54   | <i>Townes</i>   | Maser<br>abelsche Eichtheorie   |
|   |                               | 60   | <i>Yang, Mills</i>  | nicht-abelsche Eichtheorie  |
|   |                               | 61   | <i>Maiman</i>   | Laser   |
|   |                               | 67   | <i>Glashow, Weinberg, Salam</i>   | Unifizierung der<br>elektromagn. & schwachen WW   |

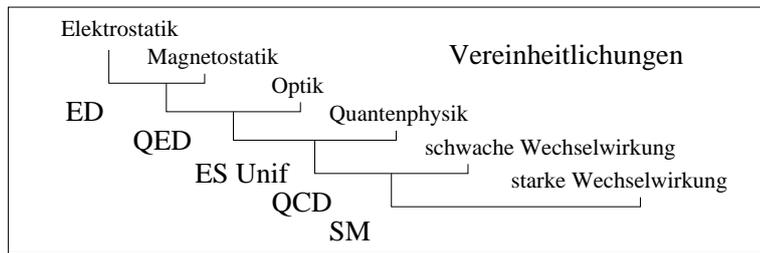


Abb. 2: Die Elektrostatik, Magnetostatik und Optik lassen sich zur Elektrodynamik zusammenfassen (Maxwell); die Quantisierung der Theorie führt auf die Quantenelektrodynamik (Feynman, Tomonaga, Schwinger); deren Vereinheitlichung mit der elektroschwachen Wechselwirkung führt auf die Elektroschwache Unifizierung. Der Einbezug der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik) führt schliesslich auf das Standardmodell.

Die Vorlesung folgt in etwa dem geschichtlichen Verlauf, natürlich unter Berücksichtigung der heutigen Übersicht. Wir beginnen mit *statischen* Phänomenen im *Vakuum*

(MG, Ii, IIh) Elektrostatik, durch Ladungen erzeugte longitudinale  $\vec{E}$ -Felder,  
 (MG, Ih, IIIi) Magnetostatik, durch Ströme erzeugte transversale  $\vec{B}$ -Felder.

Als nächstes untersuchen wir den Einfluss von *Medien*,

(KG) Konstitutive Gleichungen,  
 Rand- und Grenzflächeneffekte,  
 Elektro- und Magnetostatik in Medien.

*Dynamische* Phänomene sind unser nächstes Ziel, zuerst im *Vakuum*, dann wiederum im Medium. Dazu gehören

(MG) Wellen in offenen Geometrien,  
 Wellen in beschränkten Geometrien, Wellenleiter, Kavitäten  
 Beugung  
 Quellen und Streuung elektromagnetischer Wellen.

Alsdann wenden wir uns der ‘Struktur’ der Maxwellgleichungen zu,

Spezielle Relativitätstheorie,  
 Lagrange Formulierung der Elektrodynamik,  
 Proca Gleichungen (Elektrodynamik mit massiven Photonen).

Schliesslich untersuchen wir die

Strahlung bewegter Teilchen, Synchrotronstrahlung.

Wir benutzen die Gauss’sche Notation. Einheiten sind ein Problem, welches ich nicht aus der Welt schaffen kann. Wir werden zu gegebener Zeit Kommentare einbringen.



# Kapitel 1

## Elektrostatik

### 1.1 Mathematische Hilfsmittel

Theorie und Anwendungen der Elektrodynamik machen von mathematischen Konzepten aus der Analysis, Vektoranalysis und der Funktionentheorie Gebrauch. Spezielle Funktionen, Distributionen und Fourierreihen und deren Verallgemeinerung auf andere vollständige Funktionensysteme sind wichtige Hilfsmittel. In dieser Vorlesung werden diese Konzepte als bekannt vorausgesetzt und ohne mathematische Rigorosität angewandt.

#### 1.1.1 Einfache Vektoridentitäten

Es sind  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  Vektoren, Vektorfelder auf  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Psi$  ein Skalarfeld auf  $\mathbb{R}^3$ .  $\varepsilon_{ijk}$  der total schiefssymmetrische Tensor,  $\varepsilon_{123} = 1$ . Wir definieren

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k, \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i. \quad (1.1)$$

Es ist

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}. \quad (1.2)$$

Folgende Identitäten lassen sich durch einfaches Nachrechnen zeigen:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \\ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

#### 1.1.2 Theoreme der Vektorrechnung

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{r}), \Psi(\vec{r}) & \text{ anständige Skalarfelder in } \mathbb{R}^3, \\ \vec{A}(\vec{r}) & \text{ anständiges Vektorfeld in } \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Longitudinale und transversale Felder**

$$\vec{A} \text{ ist transversal} = \vec{A}_\perp \quad \text{falls} \quad \nabla \cdot \vec{A} = \partial_i A_i = 0, \quad (1.5)$$

$$\vec{A} \text{ ist longitudinal} = \vec{A}_\parallel \quad \text{falls} \quad (\vec{\nabla} \times \vec{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = 0. \quad (1.6)$$

Ein Vektorfeld setzt sich aus longitudinalen und transversalen Komponenten zusammen,

$$\vec{A} = \vec{A}_\parallel + \vec{A}_\perp. \quad (1.7)$$

Die Notation  $\parallel$ ,  $\perp$  ergibt sich zwanglos aus der Fourier Darstellung der Felder,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 = \vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}} \rightarrow \vec{A}_{\vec{k}} \perp \vec{k}, \quad (1.8)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 = \vec{k} \times \vec{A}_{\vec{k}} \rightarrow \vec{A}_{\vec{k}} \parallel \vec{k}. \quad (1.9)$$

**Ableitungen (Kettenregeln)**

Folgende Identitäten verifiziert man durch einfaches Nachrechnen:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\Psi \vec{a}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \Psi + \Psi (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}), \\ \vec{\nabla} \times (\Psi \vec{a}) &= \vec{\nabla} \Psi \times \vec{a} + \Psi \vec{\nabla} \times \vec{a}, \\ \vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{b}) &= (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}), \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b}), \\ \vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) &= \vec{a} (\vec{\nabla} \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) + (\vec{b} \cdot \vec{\nabla}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{b}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Folgende Identität wird oft gebraucht:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta \vec{a}; \quad (1.11)$$

sie gilt in dieser einfachen Form nur in kartesischen Koordinaten. Dabei bezeichnet  $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2$  den Laplace Operator.

Sehr nützlich sind die Zusammenhänge (es ist  $\vec{n} = \vec{r}/r$ )

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{r} &= 3, \\ \vec{\nabla} \times \vec{r} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{n} &= \frac{2}{r}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{n} &= 0, \\ (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{n} &= \frac{1}{r} [\vec{a} - \vec{n} (\vec{a} \cdot \vec{n})]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

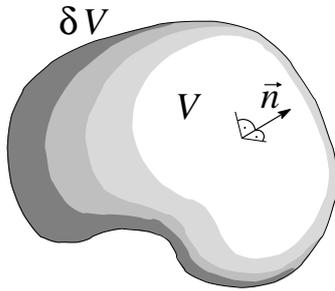


Abb. 1.1: Volumen  $V$  mit Rand  $\partial V$  und Oberflächennormalen  $\vec{n}$  zum Gauss Theorem.

### Sätze von Gauss und Stokes

Sei  $V$  ein Volumen in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial V$  sein Rand,  $\vec{n} \perp \partial V$  ein Normalenvektor (nach aussen gerichtet) der Länge 1, vgl. Abb. 1.1:

Gauss (Divergenz)-Theoreme:

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \int_{\partial V} d^2r \vec{A} \cdot \vec{n}, \\ \int_V d^3r \vec{\nabla} \Psi &= \int_{\partial V} d^2r \Psi \vec{n}, \\ \int_V d^3r \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \int_{\partial V} d^2r \vec{A} \times \vec{n}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Greensche Identitäten:

$$\begin{aligned} \int_V d^3r [\Phi \nabla^2 \Psi + \vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{\nabla} \Psi] &= \int_{\partial V} d^2r \Phi (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \Psi, \\ \int_V d^3r [\Phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Phi] &= \int_{\partial V} d^2r [\Phi (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \Psi - \Psi (\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) \Phi]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Sei  $S$  eine Fläche in  $\mathbb{R}^3$ ,  $\partial S$  sein Rand,  $\vec{n} \perp S$  ein Normalenvektor (rechtshändig bezüglich  $\partial S$ ) der Länge 1,  $d\vec{r}$  das Linienelement entlang  $\partial S$ , vgl. Abb. 1.2:

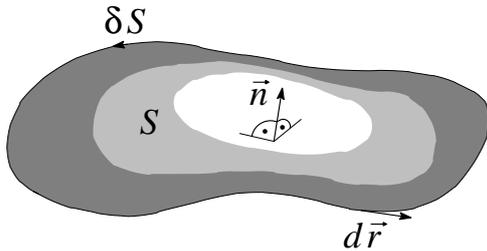


Abb. 1.2: Fläche  $S$  mit Rand  $\partial S$  und Flächennormale  $\vec{n}$  zum Stokes Theorem.

Stokes Theoreme:

$$\begin{aligned} \int_S d^2r (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot \vec{n} &= \oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{A}, \\ \int_S d^2r (\vec{n} \times \vec{\nabla}) \Psi &= \oint_{\partial S} d\vec{r} \Psi. \end{aligned} \quad (1.15)$$

### 1.1.3 Integration

Divergenzfreie Felder lassen sich als Rotation eines Vektorfeldes schreiben, rotationsfreie Felder sind Gradienten eines Skalarfeldes:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Psi) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{a} = 0 \rightarrow \vec{a} = \vec{\nabla} \Psi, \quad (1.16)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{b} = \vec{\nabla} \times \vec{a}. \quad (1.17)$$

Diese Integrationen lassen sich in einfach zusammenhängenden Gebieten ausführen, nicht jedoch in nicht-einfach zusammenhängenden Situationen (z.B., eine gepunktete Ebene).

### 1.1.4 Deltafunktion $\delta(x - a)$

Die Deltafunktion  $\delta(x - a)$  im Punkt  $a$  ist eine Distribution (Filter) welche bei Faltung mit  $f(x)$  den Wert  $f(a)$  herausfiltert,

$$\begin{aligned} \delta(x - a) &= 0, & \forall x \neq a, \\ \int \delta(x - a) dx &= 1, \\ \int f(x) \delta(x - a) dx &= f(a). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \delta(ax) &= \frac{1}{|a|} \delta(x), & (1.18) \\ \delta(g(x)) &= \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i), \end{aligned}$$

mit  $g(x_i) = 0$  den (einfachen) Nullstellen von  $g(x)$ . Die Ableitung der  $\delta$ -Funktion erzeugt die Ableitung der Testfunktion (das Minuszeichen ist die Folge der partiellen Integration)

$$\int dx f(x) \delta'(x - a) = -f'(a).$$

Die Deltafunktion  $\delta(x)$  lässt sich als Grenzfall verschiedener Funktionen schreiben:

### Trigonometrische Funktionen

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\sin(\gamma x)}{\pi x}, \quad \frac{\sin^2(\gamma x)}{\pi \gamma x^2}; \quad (1.19)$$

**Lorentz- und Gauss Funktionen**

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon/\pi}{x^2 + \varepsilon^2}; \quad \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2\sigma}}{\sqrt{2\pi\sigma}}; \quad (1.20)$$

**Charakteristische Funktion**

$$\lim_{a \rightarrow 0} \chi_a(x), \quad \chi_a = \begin{cases} 1/a, & |x| \leq a/2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad (1.21)$$

**Übungen:**

Zeige

- $\delta(x) = \delta(-x)$ ,
- $\delta'(x) = -\delta'(-x)$ ,
- $x\delta(x) = 0$ ,
- $x\delta'(x) = -\delta(x)$ ,
- $\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{|2a|}[\delta(x - a) + \delta(x + a)]$ ,
- $\int \delta(x - a)\delta(x - b)dx = \delta(a - b)$ ,
- $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$ ,
- $\delta(x) = \Theta'(x)$   
mit der Heavisidefunktion  $\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1/2, & x = 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$
- $\chi_a(x) = (1/a)[\Theta(x + a) - \Theta(x - a)]$ , die Charakteristische Funktion
- $\int_{-\infty}^{\infty} (dk/2\pi) e^{ikx} = \delta(x)$ ,
- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi imn} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m - k)$ , die Poisson Summationsformel.

### Fourier Summen und Reihen

Sei  $x_m = ma$  und  $k_n = 2\pi n/L$ , dann gilt

$$\frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{ik_n x_m} = \delta_{m,0},$$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ik_n x_m} = \delta_{n,0}.$$

Verifiziere die entsprechenden Formeln für folgende Grenzfälle (vgl. Abb. 1.3)

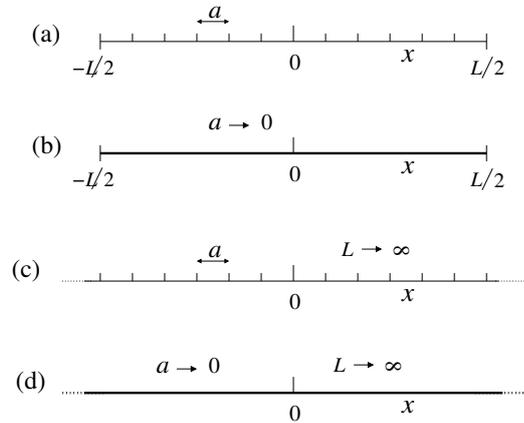


Abb. 1.3: Fouriersummen/integrale für (a) das endliche Gitter, (b) das endliche reelle Intervall, (c) das unendliche Gitter, (d) die reelle Achse.

(a)  $0 < a < L < \infty, \quad N = L/a < \infty$

$$\frac{1}{N} \sum_{m=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{-ik_n x_m} = \delta_{n,0}, \quad \frac{1}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} e^{ik_n x_m} = \delta_{m,0}, \quad (1.22)$$

(b)  $0 \leftarrow a < L < \infty, \quad N = L/a \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} dx e^{-ik_n x} = \delta_{n,0}, \quad \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n x} = \delta(x), \quad x \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}], \quad (1.23)$$

(c)  $0 < a < L \rightarrow \infty, \quad N = L/a \rightarrow \infty$

$$\frac{a}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-ik x_m} = \delta(k), \quad k \in [-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}], \quad \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} dk e^{ik x_m} = \delta_{m,0}, \quad (1.24)$$

(d)  $0 \leftarrow a < L \rightarrow \infty, \quad N = L/a \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} = 2\pi\delta(k), \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} = \delta(x). \quad (1.25)$$

In mehreren Dimensionen ist

$$\delta^d(\vec{x} - \vec{y}) = \prod_{i=1}^d \delta(x_i - y_i). \quad (1.26)$$

Bei Benutzung nicht-kartesischer Koordinaten ist Vorsicht geboten, z.B. ist in Kugelkoordinaten  $(r, \vartheta, \varphi)$ <sup>1</sup>

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta') \delta(\varphi - \varphi').$$

Die Dimension von  $\delta(x)$  ist  $[x]^{-1}$ , wobei  $[x]$  die Dimension der Variablen  $x$  bezeichnet.

### 1.1.5 Greensche Funktion zu $\Delta$

Die Green'sche Funktion zum Laplace Operator  $\Delta$  löst die Gleichung

$$\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') + \text{Randbedingungen}. \quad (1.27)$$

In  $\mathbb{R}^3$  (d.h., ohne spezifisch vorgegebene Randbedingungen) ergibt sich die Lösung

$$G_0(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.28)$$

Zum Beweis zeige man zuerst, dass  $\Delta(1/r) = 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  und anschliessend integriere man  $\nabla^2(1/r)$  über das Kugelvolumen  $V_\rho$  und benutze den Satz von Gauss. Die Randbedingung wird durch Addition der harmonischen Funktion  $F(\vec{r}, \vec{r}')$ ,

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{r}} F(\vec{r}, \vec{r}') &= 0, \\ G &= G_0 + F \text{ erfüllt die Randbedingung,} \end{aligned} \quad (1.29)$$

berücksichtigt. In  $\mathbb{R}^2$  (keine spezifischen Randbedingungen) gilt

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{R}} G_0(\vec{R}, \vec{R}') &= -2\pi\delta^2(\vec{R} - \vec{R}'), \\ G_0(\vec{R}, \vec{R}') &= \ln \frac{1}{|\vec{R} - \vec{R}'|}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

<sup>1</sup>Zum Verständnis betrachte man das Volumenintegral in Kugelkoordinaten,  $\int d^3r = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\cos\vartheta \int_0^\infty dr r^2$  und integriere die  $\delta$ -Funktion.

### Divergenz- und Rotations-Felder in 2D

In zwei Dimensionen haben die Theoreme von Gauss und Stokes die gleiche Topologie,  $V = S$ ,  $\partial V = \partial S$ , nur  $\vec{n}$  ist verschieden. Insbesondere, sei  $\vec{A} = (a_x, a_y)$  ein rein divergentes Feld (rotationsfrei), dann ist  $\vec{A}_\perp = (-a_y, a_x)$  ein (divergenzfreies) Rotationsfeld. Folgende Divergenz- und Rotations-Felder lassen sich als Gradientenfelder zu den Green'schen Funktionen von  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$  (vgl. Abb. 1.4) und  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}$  (vgl. Abb. 1.5) schreiben:

#### Gauss

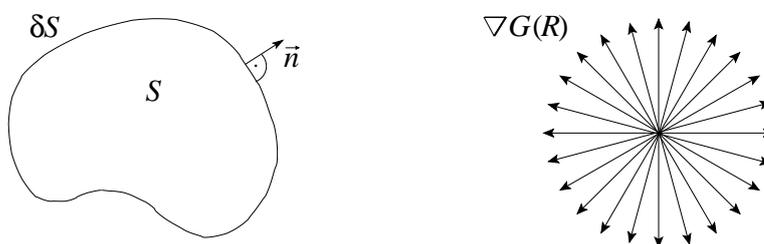


Abb. 1.4: Gauss Problem in zwei Dimensionen. Das Potential  $G(R) = \ln(1/R)$  erzeugt ein reines Divergenzfeld  $\nabla G$ .

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} G = -2\pi\delta^2(\vec{R}) \quad (1.31)$$

$$G(R) = \ln(1/R), \quad \text{vgl. Abb. 1.4.} \quad (1.32)$$

#### Stokes

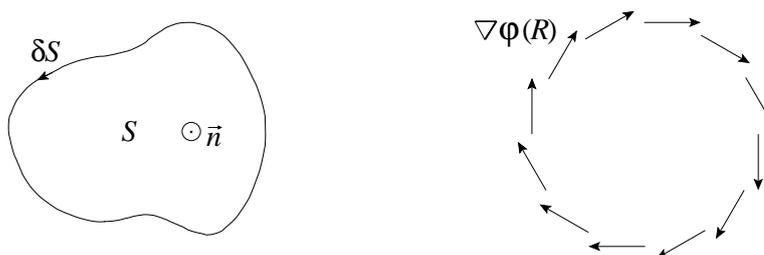


Abb. 1.5: Stokes Problem in zwei Dimensionen. Das 'Potential'  $\varphi(R) = -\arctan(y/x)$  erzeugt eines reines Rotationsfeld  $\nabla\varphi$ .

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi = -2\pi\delta^2(\vec{R}) \quad (1.33)$$

$$\varphi(R) = -\arctan(y/x), \quad \text{vgl. Abb. 1.5.} \quad (1.34)$$

Zum Beweis (Gauss) zeige man zuerst, dass  $\nabla^2 \ln R = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist und anschliessend integriere man  $\nabla^2 \ln(1/R)$  über die Kreisfläche  $S_\rho$  mit Radius  $\rho$  und verwende den Satz von Gauss,

$$\begin{aligned} \int_{S_\rho} d^2 R [-2\pi \delta^2(\vec{R})] &= \int_{S_\rho} d^2 R \nabla^2 \ln(1/R) = \int_{S_\rho} d^2 R \vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \ln(1/R)] \\ &= \int_{\partial S_\rho} d\varphi R (\vec{R}/R) \cdot [\vec{\nabla} \ln(1/R)] = \int_{\partial S_\rho} d\varphi R (\vec{R}/R) \cdot [-\vec{R}/R^2] \\ &= -2\pi \rho \rho^2 / \rho^3 = -2\pi. \end{aligned}$$

Der Beweis zum Rotationsfeld  $\vec{\nabla} \varphi$  ist identisch.

## 1.2 Das Coulombgesetz der Elektrostatik

Grundlegende experimentelle Fakten die zum Coulombgesetz führen sind das  $F \propto 1/r^2$  Verhalten der Kräfte zwischen zwei Ladungen und die Linearität (Additivität) der Kräfte. Wir definieren zuerst das elektrische Feld  $\vec{E}$  durch die Kraft  $\vec{F}$ , die selbiges auf eine Testladung  $q$  ausübt,

$$\vec{E} = \frac{\vec{F} \text{ auf } q}{q}; \quad (1.35)$$

dabei soll die Testladung  $q$  beliebig klein in Stärke und Ausdehnung sein, so dass die Quelle des elektrischen Feldes nicht gestört wird, eine Punktquelle. Beachte, dass das Elektron eine Punktquelle (eine experimentelle Tatsache) mit minimaler Ladung  $-e$  ist, wobei wir die Ladung  $e > 0$  positiv definieren. Das Coulombgesetz für die Kraft zwischen zwei Ladungen  $Q$  (Quelle im Ursprung) und  $q$  (Testladung) am Ort  $\vec{r}$  (vgl. Abb. 1.6) lautet

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.36)$$

und das zugehörige elektrische Feld ist

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (1.37)$$

Der Parameter  $k$  legt die Einheiten fest:

**cgs/esu**

Mit den Einheiten ‘centimeter’, ‘gramm’, ‘sekunden’ ( $\rightarrow$  Kräfte in dyn =  $10^{-5}$  N) und den ‘electrostatic units’ für die Ladungen und elektrischen/magnetischen Feldern wählen wir  $k = 1$  und erhalten die Elektronenladung

$$k = 1 \quad \rightarrow \quad e = 4.803250 \cdot 10^{-10} \text{ [statcoulomb]}. \quad (1.38)$$

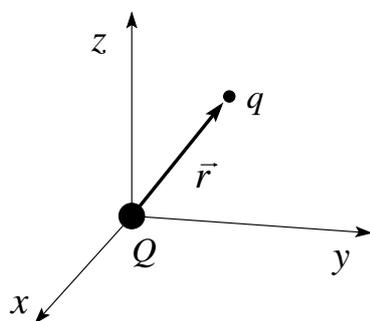


Abb. 1.6: Geometrie zum Coulombgesetz, mit der Quellladung  $Q$  im Ursprung und der Testladung  $q$  am Ort  $\vec{r}$ .

### MKSA

Mit den Einheiten ‘Meter’, ‘Kilogramm’, ‘Sekunden’ ( $\rightarrow$  Kräfte in Newton N) und der Einheit ‘Ampere’ für die elektrischen Ströme setzen wir

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ [F/m = As/Vm]}, \quad (1.39)$$

mit den Einheiten Farad F der Kapazitäten und Volt V der Spannung, und erhalten die Elektronen Ladung  $-e$  der Grösse

$$e = 1.6021917 \cdot 10^{-19} \text{ [ C = As]}. \quad (1.40)$$

Es ist  $1 \text{ C} = 3 \cdot 10^9 \text{ statcoulombs}$ .<sup>2 3</sup> Wir betrachten eine Ladungsverteilung mit Ladungen  $q_i$  bei  $\vec{r}_i$ . Es gilt das *Superpositionsprinzip* der Kräfte, eine experimentelle Tatsache. Somit ist das elektrische Feld gegeben durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_i q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}. \quad (1.41)$$

<sup>2</sup>Als Übung berechne man die Kraft in Newton zwischen zwei Elektronen im Abstand  $1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ cm}$  (ungefähr die Ausdehnung des Wasserstoff (H) Atoms):

### MKSA

$$F \stackrel{VAs=Nm}{=} \frac{(1.602 \cdot 10^{-19})^2 \text{ A}^2 \text{ s}}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm} \cdot 10^{-20} \text{ m}^2} = 2.31 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

### cgs

Längen in cm, Kräfte in dynes =  $10^{-5} \text{ N}$

$$F = \frac{(4.803 \cdot 10^{-10})^2}{10^{-8}} = 2.31 \cdot 10^{-3} \text{ dynes} = 2.31 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

<sup>3</sup>Dazu noch eine Idee: man reskaliere das Problem an einem wohlbekannten Standardproblem (hier das Wasserstoff Atom). Der speziell hier verwendete Trick ist die Plancksche Konstante  $\hbar$  einmal in  $eVs$  und einmal in Js zu schreiben, so dass sich Ladungen  $e$  kürzen lassen. Man benutze folgende Grössen (den Bohr Radius  $a_0$  und die Rydbergenergie Ry

Wir definieren die *Ladungsdichte*

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (1.42)$$

und erhalten

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.43)$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} &= -\vec{\nabla}_{\vec{r}'} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right), \\ \vec{\nabla}_{\vec{r}'}^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) &= -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (1.44)$$

gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{r}), \quad \varphi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.45)$$

und

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho. \quad (\text{MG II})$$

Damit haben wir aus dem Coulombgesetz  $F \propto 1/r^2$  und dem Superpositionsprinzip das Gauss'sche Gesetz der Elektrostatik hergeleitet. Beachte, dass das durch die Ladungen erzeugte  $\vec{E}$ -Feld rein longitudinal ist; aus (1.45) folgt sofort

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (1.46)$$

Beachte, dass (1.46) aus (MG IIh) mit  $\partial_t \vec{B} = 0$ , Statik, folgt  $\rightarrow$  Konsistenz.

Die Grösse  $\varphi(\vec{r})$ , siehe (1.45), heisst *Skalares Potential* und erfüllt die

$$\text{Poissongleichung} \quad \nabla^2 \varphi = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (1.47)$$

findet man in jedem Buch):

$$\begin{array}{ll} c &= 2.988 \cdot 10^8 \text{ m/sec,} \\ m_e &= 0.911 \cdot 10^{-30} \text{ kg,} \\ \hbar &= 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ Js,} \\ a_0 &= \frac{\hbar^2}{me^2} = \frac{\hbar[\text{Js}]}{mc} \frac{\hbar c}{e^2} = 0.529 \text{ \AA, Bohr'scher Radius,} \\ e^2/\hbar c &= 1/137.4, \text{ Feinstrukturkonstante,} \\ \text{Ry} &= \frac{e^2}{2a_0} = \frac{\hbar^2}{2ma_0^2} = \frac{\hbar[\text{J s}]}{2ma_0^2} \frac{\hbar c[\text{eV}]}{e^2} = 13.61 \text{ eV, Rydberg-Energie,} \\ \text{eV} &= 1.602 \cdot 10^{-19} [\text{VAs} = \text{J} = \text{Nm}], \end{array}$$

dann gilt

$$F = \frac{e^2}{r^2} = \frac{e^2}{a_0^2} \frac{a_0^2}{r^2} = \frac{27.2 \text{ eV}}{0.529 \text{ \AA}} \cdot \left( \frac{0.529}{1} \right)^2 = 2.31 \cdot 10^{-8} \text{ N.}$$

Mehr über Einheiten später und im Jackson (Tabellen)

Im ladungsfreien Raum gilt die

$$\text{Laplacegleichung} \quad \nabla^2 \varphi = 0. \quad (1.48)$$

Eine Lösung von (1.47) und (1.48) ist erst möglich, wenn wir die *Randbedingungen* kennen. Typische Randbedingungen sind

$$\begin{aligned} \text{freie RB:} & \quad \varphi(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \\ \text{Dirichlet RB:} & \quad \varphi|_{\partial V} = \varphi_{\partial V}(\vec{r}), \\ \text{Neumann RB:} & \quad \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi|_{\partial V} = -E_{\partial V}^{\perp}, \\ \text{gemischte RB:} & \quad \text{DRB auf } \partial V_D, \text{ NRB auf } \partial V_N, \partial V_D + \partial V_N = \partial V. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Diese Randbedingungen legen die Lösung eindeutig <sup>4</sup> fest. Das Potential  $\varphi(\vec{r})$  legt via  $q\varphi(\vec{r})$  die *potentielle Energie* der Ladung  $q$  im Feld  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  fest, vgl. Abb. 1.7: Mit  $\vec{F} = q\vec{E}$  der Kraft leisten wir mit der Bewegung von

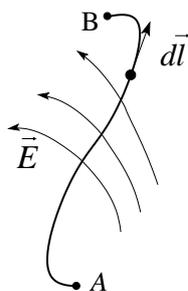


Abb. 1.7: Das Potential  $\varphi$  misst die durch das elektrische Feld  $\vec{E}$  geleistete Arbeit  $q(\varphi_B - \varphi_A)$  bei der Verschiebung der Ladung  $q$  von A nach B.

$q$  von A nach B die Arbeit

$$\begin{aligned} W &= - \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} \\ &= q \int_A^B \vec{\nabla} \varphi \cdot d\vec{l} \\ &= q\varphi_B - q\varphi_A; \end{aligned} \quad (1.50)$$

d.h. die potentielle Energie  $q\varphi_A$  ist durch die geleistete Arbeit  $W$  erhöht worden,  $q\varphi_B = q\varphi_A + W$ . Ist  $C = \partial S$  geschlossen, so ist  $W = 0$ ,

$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d^2\vec{\sigma}, \quad (1.51)$$

und da (1.51) für alle  $S$  gilt, erhalten wir wiederum  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ .<sup>5</sup> Das Potential der Ladung  $Q$  bei  $\vec{r} = 0$  folgt aus der Poissongleichung (1.47) und

<sup>4</sup>Bis auf eine triviale additive Konstante beim Neumannproblem.

<sup>5</sup>Beachte, um eine elektromotorische Kraft (ein elektrisches Feld) in einer Schleife zu erzeugen brauchen wir zeitlich variierende Magnetfelder, Faraday (MG IIh).

der Green'schen Funktion (1.28),

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= -4\pi Q\delta^3(\vec{r}) \\ \rightarrow \varphi &= Q/r.\end{aligned}\tag{1.52}$$

Das Gauss'sche Gesetz der Elektrostatik folgt aus dem Coulomb-Gesetz  $F \propto 1/r^2 \leftrightarrow E \propto 1/r^2 \leftrightarrow \varphi \propto 1/r$  und dem Superpositionsprinzip. Wie genau sind diese Voraussetzungen erfüllt?

### Tests für das Coulombgesetz

messen Abweichungen vom  $1/r$ -Potential, üblicherweise ausgehend von den Ansätzen

$$\begin{aligned}V(r) &\propto 1/r^{1-\varepsilon}, \quad \text{bestimme } \varepsilon, \quad \text{oder} \\ V(r) &\propto e^{-\mu r}/r, \quad \text{bestimme } \mu.\end{aligned}\tag{1.53}$$

Man kann zeigen, dass das  $1/r$ -Gesetz eine Folge der Masselosigkeit der Photonen ist; die Messung von  $\mu^{-1} = \hbar/m_{\text{photon}}c = \text{Compton-Wellenlänge des Photons}$ , liefert deshalb eine obere Schranke für  $m_{\text{photon}}$ . Ein raffiniertes Experiment ist dasjenige von Cavendish (1772): Gilt das Coulombgesetz, so kann keine Ladung aus dem Innern einer hohlen metallischen Kugel abgegriffen werden, jedes andere Gesetz verletzt diese Eigenschaft und das  $1/r$ -Gesetz für das Potential ist wirklich etwas Besonderes. In den Übungen wird das Cavendish-Experiment ausführlich diskutiert  $\rightarrow$  versuche mit einer Kugel und einem Elektrometer die Masse des Photons abzuschätzen. Typische Werte gemessen mit moderner Technik sind von der Grössenordnung

$$m_{\text{photon}} < 10^{-48} \text{ g}.\tag{1.54}$$

Vergleiche dazu die Masse des Elektrons  $m_e \approx 10^{-27} \text{ g}$ .

### Tests für das Superpositionsprinzip

Das *Superpositionsprinzip* wird auf makroskopischem Niveau durch viele Experimente bestätigt. Auf dem atomaren und subatomaren Niveau treten nicht-lineare Effekte auf, Vakuum-Polarisationen aufgrund von Elektrom-Positron-Paarerzeugung. Diese Effekte sind mit der Feinstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \ll 1$$

verbunden, dem kleinen Parameter der Theorie. Die Quantenelektrodynamik vermag diese Effekte beliebig genau zu beschreiben und ist eine der erfolgreichsten modernen Theorien überhaupt (Störungstheorie im kleinen

Parameter  $\alpha$ ). In diesem Sinne hat man das Superpositionsprinzip mikroskopisch und makroskopisch im Griff.<sup>6</sup>

### Einheiten

In esu ist

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi\rho$$

und man misst  $\varphi$  in statvolt,

$$[\varphi] = \text{statvolt.}$$

Entsprechend gilt für das  $\vec{E}$ -Feld

$$[E] = \text{statvolt/cm.}$$

In MKSA ist

$$\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0,$$

man misst  $\varphi$  in Volt,

$$[\varphi] = \text{Volt,}$$

und für das elektrische Feld gilt<sup>7</sup> Es ist  $1 \text{ Volt} = \frac{1}{300} \text{ statvolt}$ .

## 1.3 Oberflächen und Zwischenschichten

Wir betrachten verschiedene Typen von Oberflächen  $S$ , geladene (mit Oberflächenladung  $\sigma$ , metallische (mit influenzierter Oberflächenladung), und rekonstruierte Isolatoroberflächen mit Dipolschicht.

<sup>6</sup>Beachte: Ein Medium kann nichtlineare Effekte (z.B.  $\vec{D}(\vec{E})$  nichtlinear in  $\vec{E}$ ) in die Elektrodynamik einführen. Das moderne und technologisch relevante Gebiet der nichtlinearen Optik lebt von diesen Effekten.

<sup>7</sup>Beispiel: Potential (eines Elektrons) in der Distanz 1 Å vom Kern mit Ladung  $e$ :  
in esu:

$$\varphi = \frac{e}{r} = \frac{4.803 \cdot 10^{-10}}{10^{-8}} = 0.048 \text{ statvolt} = 14.4 \text{ V.}$$

in MKSA:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{1.602 \cdot 10^{-19} \text{ AsVm}}{4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As} \cdot 10^{-10} \text{ m}} = 14.4 \text{ V.}$$

$\vec{E}$ -Feld:

$$E = \frac{e}{r^2} \approx 10^9 \text{ V/cm.}$$

Zum Vergleich: Durchbruchfelder in Luft haben eine Stärke von  $10^{4-5} \text{ V/cm}$ , in  $\text{SiO}_2$  eine Stärke von  $10^6 \text{ V/cm}$ , die maximale technische Durchbruchfeldstärke liegt bei ungefähr  $10^7 \text{ V/cm}$ .

### 1.3.1 Geladene Oberfläche

Betrachte die Fläche  $S$  mit  $\vec{n}$  die auswärts gerichtete Normale, vgl. Abb. 1.8. Wir bestimmen das Verhalten des elektrischen  $\vec{E}$ -Feldes an der Fläche

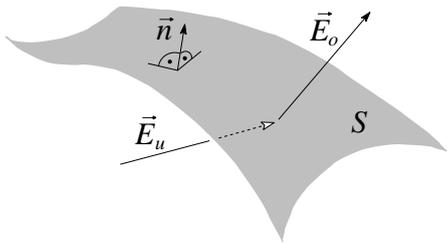


Abb. 1.8: Eine geladene Oberfläche  $S$  verändert das elektrische Feld,  $E_u \neq E_o$ . Der Einheitsvektor  $\vec{n}$  bezeichnet die Oberflächennormale.

$S$  indem wir normale und tangente Komponenten via Gauss Box und Stokes Schleife untersuchen. Betrachte den Punkt  $P$  auf  $S$  und konstruiere eine flache Box  $V_P$  drum herum, vgl. Abb. 1.9. Das Gauss'sche Theorem für

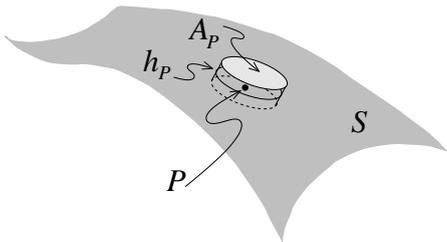


Abb. 1.9: Box der Fläche  $A_P$  und Höhe  $h_P$  um den Punkt  $P$  herum.

$V_P$  liefert für  $h_P \rightarrow 0$

$$\int_{V_P} d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \int_{\partial V_P} d^2r \vec{E} \cdot \vec{n} = (\vec{E}_o - \vec{E}_u) \cdot \vec{n} A_P = 4\pi\sigma(P)A_P, \quad (1.55)$$

wobei  $\sigma(P)$  die Flächenladungsdichte von  $S$  am Punkt  $P$  ist. Betrachte als nächstes eine Schleife  $\partial S$  um  $P$ , vgl. Abb. 1.10, mit  $\vec{t} \perp \vec{n}$ ,  $\vec{t}$  die Flächentangente. Der Satz von Stokes liefert mit  $h_P \rightarrow 0$

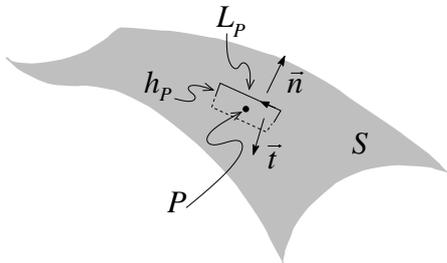


Abb. 1.10: Schleife der Länge  $L_P$  und Höhe  $h_P$  um den Punkt  $P$  herum; Die Oberflächentangente  $\vec{t}$  in  $P$  definiert die Orthogonale zur Schleife.

$$\int_S d^2r (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{t} = \int_{\partial S} \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{E}_o - \vec{E}_u) L_P = 0. \quad (1.56)$$

Die Theoreme von Gauss und Stokes liefern die Bedingungen

$$\begin{aligned}(\vec{E}_o - \vec{E}_u) \cdot \vec{n} &= 4\pi\sigma, \\ (\vec{E}_o - \vec{E}_u) \cdot (\vec{n} \times \vec{t}) &= 0,\end{aligned}\tag{1.57}$$

d.h. die Komponente  $\vec{E}_{\perp S}$  springt um  $4\pi\sigma$ , währenddem die Parallelkomponente  $\vec{E}_{\parallel S}$  stetig ist, vgl. Abb. 1.11.

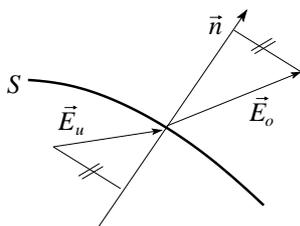


Abb. 1.11: Sprung des elektrischen Feldes beim Durchgang durch eine geladene Oberfläche  $S$ .

### 1.3.2 Metallische Oberfläche

Im Metall sind die Ladungsträger beweglich und  $\vec{E}_{\text{Metall}}$  wird 0 (die Ladungen erfahren eine Kraft  $\vec{F} = q\vec{E}$  und bewegen sich so lange, bis  $\vec{E} = 0$  ist). Eine genauere Betrachtung gibt, vgl. Abb. 1.12,

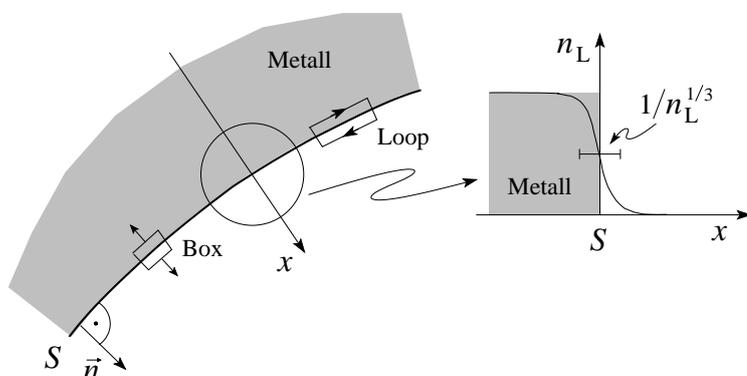


Abb. 1.12: Elektrisches Feld auf Metalloberfläche: Mit  $\vec{E} = 0$  im Innern des Metalls ergeben die Sätze von Gauss und Stokes das Feld  $\vec{E} = 4\pi\sigma \vec{n}$  an der Oberfläche. Die Ladungsdichte  $n_L$  der Leitungselektronen fällt auf der Skala des mittleren elektronischen Abstandes  $1/n_L^{1/3}$  ab.

$$\begin{aligned}(1.57.b) \rightarrow \vec{E}_{\parallel} - \vec{E}_{\text{Metall}} &= 0 \rightarrow \vec{E} \perp \text{metallisches } S, \\ (1.57.a) \rightarrow \vec{E}_{\perp} - \vec{E}_{\text{Metall}} &= 4\pi\sigma \vec{n} \rightarrow \vec{E} = 4\pi\sigma \vec{n}.\end{aligned}\tag{1.58}$$

Dabei ist  $\sigma$  die in  $S$  influenzierte Ladungsdichte.

### 1.3.3 Neutrale Dipolschicht

Dieser Typ Oberfläche ist typisch für eine physikalisch oder chemisch ‘rekonstruierte’ Oberfläche an einem Isolator oder Halbleiter, vgl. Abb. 1.13. Mit

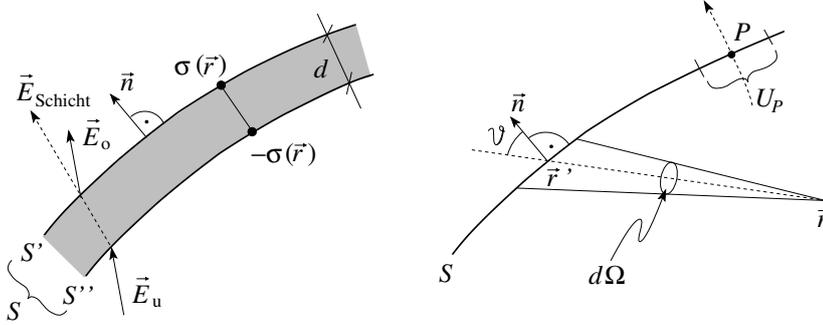


Abb. 1.13: Links: mikroskopische Struktur einer Oberfläche mit Dipolschicht, zum durch Rekonstruktion der Oberfläche eines Isolators/Halbleiters. Die Dipolschicht lässt das elektrische Feld ausserhalb der Dipolschicht invariant, verstärkt aber das Feld im Bereich  $d$  der Oberflächenrekonstruktion und erzeugt damit einen Sprung  $\delta\varphi$  im Potential. Rechts: Geometrie zur Berechnung des Potentials  $\varphi(\vec{r})$ .

(1.57) gilt, dass  $\vec{E}$  stetig durch  $S$  hindurchläuft, aber nur auf einer makroskopischen Skala. Auf einer mikroskopischen Skala erzeugt die Dipolschicht eine  $+/-$  Ablenkung von  $E$ , so dass das Potential springt; wir berechnen den Sprung in  $\varphi$  für kleine Abstände  $d$  zwischen den Ladungsschichten  $\pm\sigma$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \int_S d^2r' \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \int_S \frac{d^2r' \sigma(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}' + \vec{n}d(\vec{r}')|} \\ &= \int_S d^2r' \underbrace{\sigma(\vec{r}') d(\vec{r}')}_{D(\vec{r})=\text{Dipol-Schicht}} \vec{n} \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\end{aligned}$$

Mit  $\vec{n} \cdot \vec{\nabla}' [1/|\vec{r} - \vec{r}'|] d^2r' = [-\cos\theta/|\vec{r} - \vec{r}'|^2] d^2r' = -d\Omega$ , vgl. Abb. 1.13, ergibt sich

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_S d\Omega D(\vec{r}'). \quad (1.59)$$

Traversieren wir  $S$ , vgl. Abb. 1.13, so erhalten wir einen Sprung in  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= - \int_{S-U_P} d\Omega D(\vec{r}') - \int_{U_P} d\Omega D(\vec{r}') \\ &\rightarrow \delta\varphi(P) = \varphi_o - \varphi_u = 4\pi D(P).\end{aligned} \quad (1.60)$$

Die Dipolschicht wirkt wie ein Kondensator mit Ladungsdichte  $\sigma$  und Plattenabstand  $d$ . Beim Durchgang durch die Schicht muss die Arbeit  $\vec{E} \cdot \vec{d} =$

$4\pi\sigma d = 4\pi D$  erbracht werden, woraus sich sofort der Sprung im Potential ergibt. Interessant ist, wie die Resultate (1.57) und (1.60) in der Green'schen Identität (1.15) mit  $\Psi = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  und  $\Phi = \varphi(\vec{r}')$  auftauchen (es ist  $\partial_n \equiv \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$ ),

$$\int_V d^3r' \left( \underbrace{\Phi \vec{\nabla}'^2 \Psi}_{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} - \underbrace{\Psi \vec{\nabla}'^2 \Phi}_{-4\pi\rho(\vec{r}')} \right) = \int_S d^2\sigma' \left[ \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial n'} - \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial n'} \right]$$

ergibt <sup>8</sup>

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \vec{r} \notin V, \\ \int_V d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_S d^2\sigma \left[ \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right], & \vec{r} \in V. \end{cases} \quad (1.61)$$

(1.61) ist *keine Lösung* für  $\varphi$ , nur eine Selbstkonsistenzgleichung. Es ist gerade die Oberflächenladung  $\sigma = \partial_{n'}\varphi/4\pi$  und der Oberflächendipol  $D = -\varphi/4\pi$ , welche elektrisches Feld und Potential beim Überqueren von  $\vec{r} \in S$  zum Verschwinden bringen.

Es wäre aber völlig falsch, (1.61) als Lösung aufzufassen, mit  $\varphi$  und  $\partial_{n'}\varphi$  auf dem Rand vorgegeben. Diese *Cauchy* Randbedingungen führen auf eine Überbestimmung des Problems. Nur ein *konsistentes* Set  $\varphi$  und  $\partial_{n'}\varphi$  auf  $S$  kann auf eine echte Lösung führen. Ein alternatives Problem gibt zwar CR vor, aber die Oberfläche  $S$  ist unbestimmt. Wie man wohldefinierte Dirichlet- und Neumann-Probleme löst, zeigen wir im nächsten Abschnitt.

## 1.4 Elektrostatische Randwertprobleme

Sei ein Dirichlet- oder Neumann-Problem in  $V$  mit Rand  $\partial V$  gegeben,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(\vec{r}) &= -4\pi\rho(\vec{r}), & \vec{r} \in V, \\ \varphi|_{\partial V} &= \varphi_{\partial V}(\vec{r}), & \text{Dirichlet,} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{n}} &= -\vec{E}_{\partial V}^{\perp}(\vec{r}), & \text{Neumann.} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Die Green'sche Funktion für das Gebiet  $V$  erfüllt

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{r}'} G(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= ?, \quad \vec{r}' \in \partial V. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Die allgemeine Lösung zu (1.63) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + F(\vec{r}, \vec{r}') \quad \text{mit} \\ \Delta_{\vec{r}'} F(\vec{r}, \vec{r}') &= 0. \end{aligned} \quad (1.64)$$

<sup>8</sup>Wir definieren  $\varphi(\vec{r}) = \int_V \Phi \nabla^2 \Psi$  auch für  $\vec{r} \notin V$ .

Wir setzen  $\Psi = G$  und  $\Phi = \varphi$  im Greenschen Theorem und erhalten (es ist  $\partial_n \equiv \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$ )

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) = & \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d^2\sigma' \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi}{\partial n'} - \varphi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right]. \end{aligned} \quad (1.65)$$

**Dirichlet:**

Wir wählen  $F$  so, dass  $G_D(\vec{r}, \vec{r}' \in \partial V) = 0$  und erhalten

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') G_D(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d^2\sigma' \varphi_{\partial V}(\vec{r}') \frac{\partial G_D(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'}. \quad (1.66)$$

Eine kurze Überlegung soll skizzieren wie (1.66) die Randbedingung selbstkonsistent erfüllt. Wir analysieren den Ausdruck

$$\varphi(\vec{r} \in \partial V) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d^2\sigma' \varphi_{\partial V}(\vec{r}') \frac{\partial G_D}{\partial n'}$$

mit

$$G_D(\vec{r} \in \partial V, \vec{r}') = G_D(\vec{r}, \vec{r}' \in \partial V) = 0.$$

Die Symmetrie  $G_D(\vec{r}, \vec{r}') = G_D(\vec{r}', \vec{r})$ , folgt aus dem Greenschen Theorem mit  $\Phi = G_D(\vec{r}, \vec{x})$ ,  $\Psi = G_D(\vec{r}', \vec{x})$ , wo  $\vec{x}$  die Integrationsvariable bezeichnet. Die Greensche Funktion  $G_D$  wird 0 auf  $\partial V$ , indem  $F$  eine Spiegelladung repräsentiert, vgl. Abb. 1.14,

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}_S - \vec{r}'|} \rightarrow G_D(\vec{r} \rightarrow \partial V, \vec{r}') = 0.$$

Dann ist aber

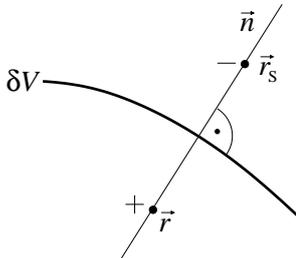


Abb. 1.14: Spiegelladung mit gegenteiligem Vorzeichen bei  $\vec{r}_S$  symmetrisch an der Oberfläche gespiegelt zu  $\vec{r}$ .

$$\frac{\partial G_D}{\partial n'} \approx \frac{\partial^2 1/|\vec{r} - \vec{r}'|}{\partial r'^2} \approx -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

und wir erhalten

$$\varphi(\vec{r} \in \partial V) = \varphi_{\partial V}(\vec{r}).$$

**Neumann:**

Die offensichtliche Lösung  $\partial_{n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}' \in \partial V) = 0$  funktioniert wegen der Bedingung

$$\int_V d^3 r' \underbrace{\nabla_{\vec{r}}^2 G(\vec{r}, \vec{r}')}_{-4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')} = \int_{\partial V} d^2\sigma \frac{\partial G}{\partial n'} = -4\pi$$

nicht. Wir setzen deshalb

$$\frac{\partial G_N}{\partial n'}(\vec{r}, \vec{r}' \in \partial V) = -\frac{4\pi}{\int_{\partial V} d^2\sigma'} = \text{const.}$$

und erhalten

$$\varphi(\vec{r}) = \langle \varphi \rangle_{\partial V} + \int_V d^3 r' \rho(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}') - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} d^2\sigma' E_{\partial V}^\perp(\vec{r}') G_N(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (1.67)$$

Der Mittelwert  $\langle \varphi \rangle_{\partial V}$  des Potentials über  $\partial V$  ist eine irrelevante additive Konstante zu  $\varphi$ . Für das Problem im Aussenraum ist  $\int_{\partial V} d^2\sigma = \infty$  und die Randbedingung wird homogen,  $\partial_{n'} G_N(\vec{r}, \vec{r}' \in \partial V) = 0$ . Auch für das Neumann-Problem kann  $F$  als ein durch externe Ladungen ( $\Delta F = 0$  in  $V \implies \Delta F \neq 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus V$ ) erzeugtes kompensierendes Potential betrachtet werden.  $G_N$  ist nicht automatisch symmetrisch in  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$ , kann aber so konstruiert werden, dass diese Symmetrie erfüllt wird.

## 1.5 Elektrostatische Energie

Es seien die Ladungen  $q_i$  in den Positionen  $\vec{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  plaziert. Sie erzeugen ein Potential im freien Raum

$$\varphi_{n-1}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \quad (1.68)$$

Die Heranführung der  $n$ -ten Ladung  $q_n$  von  $r \approx \infty$  an die Position  $\vec{r}_n$  involviert die Arbeit

$$W_n = q_n \varphi_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{q_n q_i}{|\vec{r}_n - \vec{r}_i|}. \quad (1.69)$$

Bringen wir die Ladungen  $q_1, \dots, q_n$  aus dem Unendlichen an die Positionen  $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n$ , so müssen wir die Gesamtarbeit

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (1.70)$$

leisten:  $W$  ist die *potentielle* oder *elektrostatische* Energie der Konfiguration  $q_i, \vec{r}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Beachte, dass wir die unendlichen Selbstenergieterme  $i = j$  weggelassen haben.

Wir gehen zu einer Kontinuumsbeschreibung über, indem wir schreiben,

$$\sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \rightarrow \rho(\vec{r});$$

für die *elektrostatische Energie der Ladungsverteilung*  $\rho(\vec{r})$  erhalten wir dann

$$W = \frac{1}{2} \iint d^3r d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.71)$$

Der Ausdruck (1.71) enthält auch Selbstenergieterme, welche im Grenzwert von Punktladungen divergieren. Mit (1.45),

$$\varphi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

erhalten wir unter Ausnutzung von

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \varphi$$

und partieller Integration (mit  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ ) die alternativen Ausdrücke

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^3r \varphi(\vec{r}) \vec{\nabla}^2 \varphi(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E}^2. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Die letzte Gleichung führt auf die Interpretation, dass die elektrostatische Energie im Feld steckt, und

$$w = \frac{E^2}{8\pi} \quad (1.73)$$

ergibt sich als die Energiedichte des  $\vec{E}$ -Feldes.<sup>9</sup> Offensichtlich stimmt  $W_{\text{ww}}$  mit (1.70) überein. Für  $qQ < 0$  (ungleiche Ladungsvorzeichen) ist  $W_{\text{ww}} < 0$ .  $W$  gemäss (1.72) wäre divergent  $\rightarrow +\infty$ .

<sup>9</sup>Beachte, dass (1.72) positiv definit ist, (1.70) aber negativ sein kann; der Unterschied liegt in der in (1.72) zusätzlich berücksichtigten Selbstenergie. Betrachte die Konfiguration  $\{q, \vec{0}; Q, \vec{R}\}$ , dann ist

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{Q(\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3}$$

und die Energiedichte wird zu

$$W = \underbrace{\frac{q^2}{8\pi r^4} + \frac{Q^2}{8\pi(\vec{r} - \vec{R})^4}}_{\text{Selbstenergie } w_{\text{Selbst}}} + \underbrace{\frac{qQ \vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{R})}{4\pi r^3 |\vec{r} - \vec{R}|^3}}_{w_{\text{Wechselwirkung}}}.$$

## 1.6 Kapazitäten

Ist die Ladung  $\rho$  auf Leiterstücken  $L_i$  lokalisiert, mit Ladungen  $Q_i$  und Potentialen  $V_i$ , so lässt sich das Energieproblem auf ein geometrisches Problem reduzieren welches sich durch Kapazitäten formulieren lässt. Die Linearität der Elektrostatik erlaubt uns, die Potentiale  $V_i$  aus den Ladungen  $Q_i$  zu gewinnen,

$$V_i = \sum_{j=1}^n (C^{-1})_{ij} Q_j, \quad \vec{V} = C^{-1} \vec{Q}. \quad (1.74)$$

Umgekehrt folgen die Ladungen aus den Potentialen,

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j, \quad \vec{Q} = C \vec{V}. \quad (1.75)$$

$C_{ii}$  = Kapazitäten,  $C_{ij}, i \neq j$  sind elektrostatische Induktionskoeffizienten. Die  $C_{ij}$  werden durch die Leitergeometrie festgelegt, mit  $C_{ii} > 0$  und  $C_{ij} = C_{ji} < 0$  für  $i \neq j$  (Wähle  $\vec{V} = (0, \dots, V_i, 0, \dots, 0)$ , d.h.  $L_{i \neq j}$  geerdet. Mit  $V_i > 0$  ist  $Q_i > 0$  und  $Q_{j \neq i} < 0$ , da  $Q_i$  Ladung aus  $L_j$  verdrängt.) Die Energie einer  $\vec{Q}, \vec{V}$ -Konfiguration ergibt sich aus

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (C^{-1})_{ij} Q_i Q_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} V_i V_j. \quad (1.76)$$

Die Berechnung der  $C_{ij}$  entspricht einer Reduktion des System-Hamiltonians: Statt für jede Konfiguration das  $\vec{E}$ -Feld zu bestimmen und  $W$  mittels  $(1/8\pi) \int d^3r E^2$  zu berechnen, brauchen wir nur einmal die geometrischen Koeffizienten  $C_{ij}$  zu bestimmen; die Energie der Konfiguration folgt sofort aus (1.76). Beachte, dass  $C_{ij} = \partial_{V_i} \partial_{V_j} W = C_{ji}$ ,  $W$  positiv definit  $\rightarrow C_{ii} > 0$ .

Wohlbekannt ist der Plattenkondensator, vgl. Abb. 1.15. Wir laden die Platten gegenüber der Erde auf die Potentiale  $V_1$  und  $V_2$  auf und erhalten die Ladungen

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_0 V_1 + C(V_1 - V_2), \\ Q_2 &= C_0 V_2 + C(V_2 - V_1). \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} \rightarrow W_{\text{ww}} &= \frac{qQ}{4\pi} \int d^3r \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{R})}{r^3 |\vec{r} - \vec{R}|^3} \stackrel{\vec{r} = \vec{r}/R}{=} \frac{qQ}{R} \frac{1}{4\pi} \int d^3\rho \frac{\vec{\rho} \cdot (\vec{\rho} - \vec{n})}{\rho^3 |\vec{\rho} - \vec{n}|^3} \\ &= \frac{qQ}{R} \frac{1}{4\pi} \int d^3\rho \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \left( -\vec{\nabla}_\rho \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{n}|} \right) \\ &= \frac{qQ}{R} \frac{1}{4\pi} \int d^3\rho \underbrace{-\Delta_\rho \rho^{-1}}_{=4\pi\delta^3(\rho)} \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{n}|} - \frac{qQ}{R} \frac{1}{4\pi} \underbrace{\int d^3\rho \vec{\nabla}_\rho \left( \frac{\vec{\rho}}{\rho^3} \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{n}|} \right)}_{\rightarrow 0} \\ &= \frac{qQ}{R}. \end{aligned}$$

Daraus finden wir die Kapazitätsmatrix

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 + C & -C \\ -C & C_0 + C \end{pmatrix}.$$

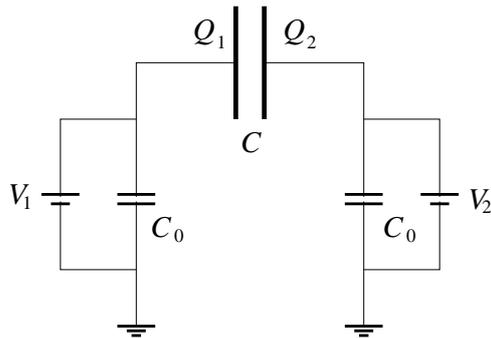


Abb. 1.15: Plattenkondensator  $C$  mit Ladungen  $Q_1$  und  $Q_2$  induziert durch Potentiale  $V_1$  und  $V_2$  gegenüber der Erde.

Mit der Inversen

$$C^{-1} = \frac{1}{C_0(C_0 + 2C)} \begin{pmatrix} C_0 + C & C \\ C & C_0 + C \end{pmatrix}$$

ist

$$W = \frac{Q^2}{C_0 + 2C} \quad (1.77)$$

für  $Q_1 = -Q_2 = Q$ . Oft ist  $C_0 = 0$  und  $W = Q^2/2C$  mit  $C = A/4\pi d$ . Die Kapazitäten  $C_{ij}$  haben die Dimensionalität von Längen. Z.B. gilt für den *Plattenkondensator*

$$C = \frac{A}{4\pi d}, \quad (1.78)$$

wie man leicht aus dem Gauss'schen Satz ersieht,

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= A \cdot E = A \frac{V}{d} = 4\pi Q \\ \rightarrow C &= \frac{Q}{V} = \frac{A}{4\pi d}. \end{aligned}$$

Wir zitieren schliesslich einige Resultate für wichtige Geometrien, vgl. dazu mit Abb. 1.16.

**Kugelkondensator:**

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad r_2 > r_1,$$

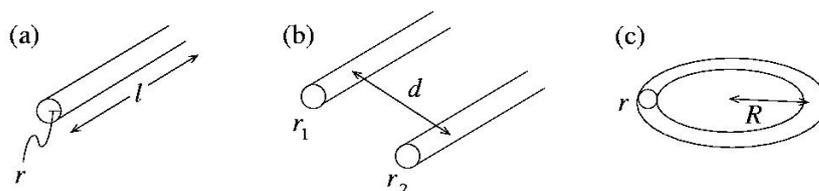


Abb. 1.16: Kapazitäten eines Drahtes (a), eines Doppelleiters (b), und eines Ringes (c).

### Zylinderkondensator:

$$C = \frac{l}{2 \ln(r_2/r_1)}$$

### Gerades Stück Draht:

$$C = \frac{l}{2 \ln(l/r)}$$

### Doppelleiter:

$$C = \frac{l}{4 \ln(d/\sqrt{r_1 r_2})}$$

### Ring:

$$C = \frac{\pi R}{\ln(8R/r)}, \quad r \ll R$$

### Einheiten

$$\begin{aligned}
 [C]_{\text{cgs}} &= 1 \text{ cm} & (1.79) \\
 [C]_{\text{MKSA}} &= \frac{[Q]}{[V]} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{Farad} \\
 C|_{\text{MKSA}} &= 4\pi\epsilon_0 C|_{\text{cgs}}
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung erhält man zum Beispiel aus der Berechnung der Kapazität des Plattenkondensators via Poissongleichung und Satz von Gauss in den verschiedenen Masssystemen, cgs und MKSA. Zur Umrechnung zwi-

schen cgs und MKSA Einheiten benutze man

$$\begin{aligned} 1 \text{ cm} &= 4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{100 \text{ cm}} \cdot 1 \text{ cm} \\ &= \frac{10}{9} \cdot 10^{-12} \text{ F} = \frac{10}{9} \text{ pF} \end{aligned} \quad (1.80)$$

Schliesslich schreiben wir die wichtigsten Gleichungen der Elektrostatik in MKSA Einheiten,

$$\begin{aligned} \text{Poissongl. in MKSA: } \Delta\varphi &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{aus } F = qQ/4\pi\varepsilon_0 r^2) \\ \text{Gauss: } \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{aus } F = qQ/4\pi\varepsilon_0 r^2) \\ \text{Energiedichte: } w &= \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \quad (\text{aus } W = CV^2/2) \end{aligned} \quad (1.81)$$

In einem gewissen Sinne komplettiert dies die Elektrostatik im freien Raum, der Rest besteht im Erarbeiten von Beispielen. Dabei kann man sich eine interessante mathematische Trickkiste anlegen und ein Gefühl für die ‘Funktionsweise’ der Elektrostatik erarbeiten. Wir werden kurz folgende Techniken anschauen:

- Bildtechnik
- Konforme Abbildungen (in  $d = 2$ )
- Variablenseparation und vollständige Funktionensysteme

Für das letzte Thema werden wir die allgemeinen Definitionen von grad ( $= \vec{\nabla}$ ), div ( $= \vec{\nabla} \cdot$ ), rot ( $= \vec{\nabla} \times$ ) und  $\Delta$  ( $= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ ) in allgemeinen orthogonalen Koordinaten brauchen. Viele dieser Techniken sind auch in der Magnetostatik anwendbar.



## Kapitel 2

# Randwertprobleme in der Elektrostatik

### 2.1 Bildtechnik

Wir betrachten wir ein Volumen  $V$  begrenzt (auf  $\partial V$ ) durch Leiter mit Potential  $\varphi_{\partial V} = 0$  oder  $\varphi_{\partial V} \neq 0$  (Äquipotentialfläche). Im Inneren von  $V$  liegen die Punktladungen  $q_i$  in den Positionen  $\vec{r}_i \in V$ . Gesucht ist das Potential  $\varphi(\vec{r})$ . Mit der *Bildtechnik* ersetzt man zur Lösung des obigen elektrostatischen Problems die Leiter auf  $\partial V$  durch *Bildladungen* ( $b_j \notin V$  ausserhalb  $V$ ), so dass die Randbedingung auf  $\partial V$  erfüllt wird. Damit wird das Problem auf ein geometrisches reduziert.

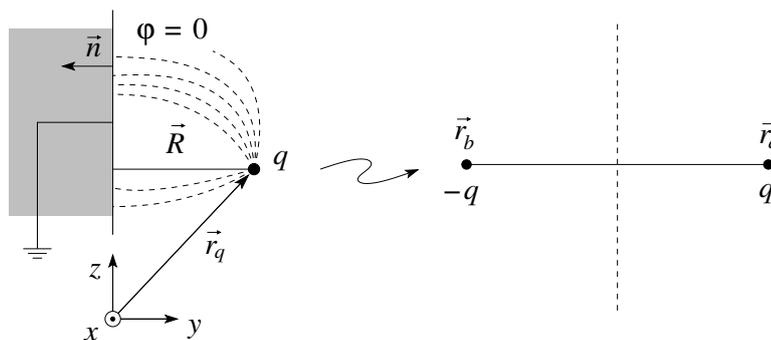


Abb. 2.1: Ladung  $q$  bei  $\vec{r}_q$  gegenüber einer geerdeten metallischen Oberfläche. Die bei  $\vec{r}_b$  platzierte Bildladung  $-q$  bringt das Potential  $\varphi$  auf der Oberfläche zum Verschwinden. Die Feldlinien stehen senkrecht auf der metallischen Oberfläche.

Als erstes und einfachstes Beispiel betrachten wir das Problem einer Ladung in der Umgebung einer metallischen Oberfläche (leitender Halbraum  $y < 0$ ),

vgl. die Skizze in Abb. 2.1. Wir platzieren die Bildladung  $-q$  bei  $\vec{r}_b = \vec{r}_q - 2\vec{R} = \vec{r}_q - 2(\vec{r}_q \cdot \vec{n})\vec{n}$  und erhalten das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = q \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_b|} \right] \quad (= 0 \text{ auf } \vec{r} \cdot \vec{n} = 0) \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} [\text{denn } (\vec{r} - \vec{r}_b)^2 &= r^2 + (\vec{r}_q - 2(\vec{r}_q \cdot \vec{n})\vec{n})^2 - 2\vec{r}(\vec{r}_q - 2(\vec{r}_q \cdot \vec{n})\vec{n}) \\ &= r^2 + r_q^2 + 4(\vec{r}_q \cdot \vec{n})^2 - 4(\vec{r}_q \cdot \vec{n})(\vec{r} \cdot \vec{n}) \\ &\quad - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_q + 4(\vec{r}_q \cdot \vec{n})(\vec{r} \cdot \vec{n})]. \end{aligned}$$

Das Metall zieht die Ladung mit der Kraft  $F = q^2/4R^2$  an.

Auch kompliziertere Geometrien können mit Hilfe der Bildtechnik gelöst werden, zum Beispiel die Ladung nahe einer geerdeten *leitenden Kugel* mit Radius  $r = R$ , vgl. Abb. 2.2. Es sei also  $\varphi(r = R) = 0$ ,  $q$  eine in  $\vec{a}$  platzierte Ladung,  $a > R$ . Die Bildladung  $q'$  bei  $\vec{a}'$  soll zusammen mit  $q$  bei  $\vec{a}$  gerade  $\varphi(r = R) = 0$  erzeugen. Symmetrieargumente implizieren, dass  $\vec{a} \parallel \vec{a}'$  sein muss.

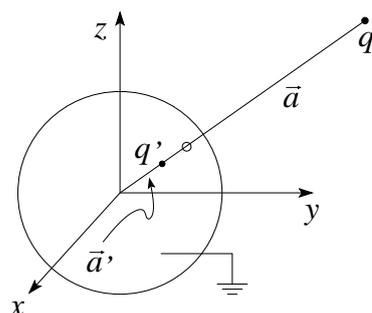


Abb. 2.2: Technik der Bildladungen für eine geerdete Kugel im Koordinatensprung, mit Ladung  $q$  bei  $\vec{a}$ .

Das durch die Ladungen  $\{q, \vec{a}; q', \vec{a}'\}$  erzeugte Potential ist

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} + \frac{q'}{|\vec{r} - \vec{a}'|}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r} = R\hat{r}) &= \frac{q}{|R\hat{r} - a\hat{a}|} + \frac{q'}{|R\hat{r} - a'\hat{a}|} \\ &= \frac{q}{R|\hat{r} - a\hat{a}/R|} + \frac{q'}{a'|R\hat{r}/a' - \hat{a}|} \\ &= 0 \text{ falls } q/R = -q'/a'; \quad a/R = R/a'. \end{aligned}$$

Die Bildladung  $q' = -qR/a$  bei  $\vec{a}' = (R^2/a^2)\vec{a}$  erzeugt mit  $q$  bei  $\vec{a}$  zusammen das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{qR/a}{|\vec{r} - (R/a)^2\vec{a}|}, \quad \varphi(r = R) = 0. \quad (2.2)$$

Die Kugel zieht die Ladung  $q$  mit der Kraft

$$\vec{F} = -\frac{q^2 R}{a^3} \frac{1}{(1 - (R/a)^2)^2} \frac{\vec{a}}{a} \xrightarrow{R \ll a} -\frac{q^2 R}{a^3} \hat{a}$$

an. *Laden* wir die Kugel mit der Ladung  $Q$  auf, so verteilt sich die *zusätzliche* Ladung  $Q - q'$  homogen. Operationell erden wir erst die Kugel, dann verteilt sich die Ladung  $q'$  inhomogen; anschliessend isolieren wir die Kugel und fügen die Ladung  $Q - q'$  zu. Da die Konfiguration  $\{q, \vec{a}; q', \vec{a}'\}$  kraftfrei war, verteilt sich  $Q - q'$  homogen. Die Ausdrücke für das Potential  $\varphi$  und die Kraft  $F$  auf  $q$  involvieren dann die drei Ladungen

$$\{q, \vec{a}; -qR/a, (R/a)^2 \vec{a}; Q + (R/a)q, 0\},$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} - \frac{qR/a}{|\vec{r} - (R/a)^2 \vec{a}|} + \frac{Q + (R/a)q}{r}, \quad (2.3)$$

$$\vec{F} = \frac{q}{a^2} \left[ Q - \frac{qR^3(2a^2 - R^2)}{a(a^2 - R^2)^2} \right] \frac{\vec{a}}{a}.$$

Statt der Ladung  $Q$  können wir auch ein *Potential*  $V$  auf der Kugel vorgeben. Im Ausdruck für das Potential ersetzen wir  $Q - q'$  durch  $VR$ ; dann ist  $\varphi(r = a) = V$ . Die Kraft ergibt sich zu

$$\vec{F} = \frac{q}{a^2} \left[ VR - \frac{qR a^3}{(a^2 - R^2)^2} \right] \frac{\vec{a}}{a}. \quad (2.4)$$

Als weiteres Beispiel erwähnen wir die leitende Kugel im homogenen  $\vec{E}$ -

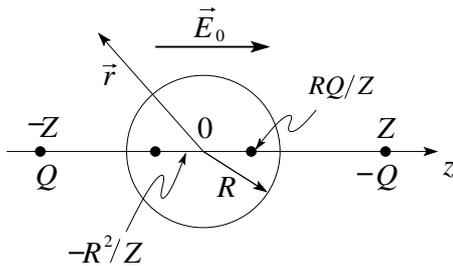


Abb. 2.3: Leitende Kugel im homogenen  $\vec{E}$ -Feld. Das gewünschte Potential wird von Ladungen  $\pm Q$  bei  $\pm Z$  und zwei Bildladungen innerhalb der Kugel erzeugt.

Feld, vgl. Abb. 2.3. Wir erzeugen das  $\vec{E}$ -Feld, indem wir Ladungen  $\pm Q$  bei  $z = \pm Z$  platzieren,  $E_0 \approx 2Q/Z^2$ , und anschliessend  $Q, Z \rightarrow \infty$  streben lassen mit  $Q/Z^2 = \text{const.}$  Zwei Bildladungen in der Kugel erzeugen dann zusammen mit den äusseren Ladungen das gewünschte Potential

$$\varphi(\vec{r}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right); \quad (2.5)$$

### 2.1.1 Greensche Funktion mit Bildtechnik

Mit den obigen Resultaten ist es einfach, die *Greenschen Funktionen*  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , mit  $\vec{\nabla}_{\vec{r}}^2 G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')$ , für das *Dirichlet-Problem* im Halbraum und im Aussen- und Innenraum einer Kugel mit Radius  $R$  zu finden.

#### Halbraum

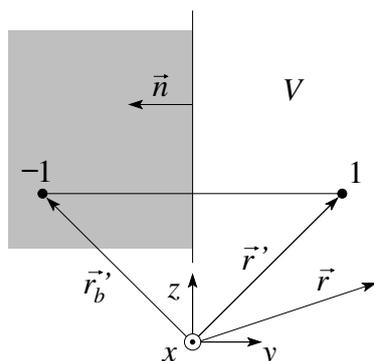


Abb. 2.4: Geometrie des Dirichletproblems im Halbraum. Wir plazieren die Bildladung bei  $\vec{r}_b' = \vec{r}' - 2(\vec{r}' \cdot \vec{n})\vec{n}$ .

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}' + 2(\vec{r}' \cdot \vec{n})\vec{n}|}. \quad (2.6)$$

#### Aussenraum der Kugel

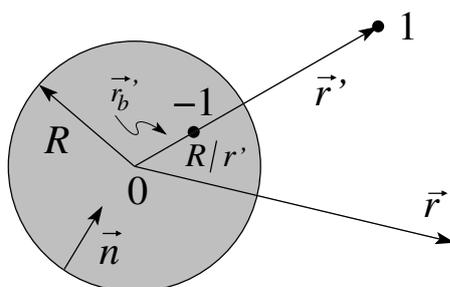


Abb. 2.5: Geometrie des Dirichletproblems im Aussenraum einer Kugel. Die Bildladung der Stärke  $-R/r'$  wird im Punkt  $\vec{r}_b' = (R^2/r'^2)\vec{r}'$  im Innenraum plaziert.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{R/r'}{|\vec{r} - (R/r')^2 \vec{r}'|}. \quad (2.7)$$

#### Innenraum der Kugel

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{(R/r')}{|\vec{r} - (R/r')^2 \vec{r}'|}. \quad (2.8)$$

Beachte die Symmetrie  $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$ .

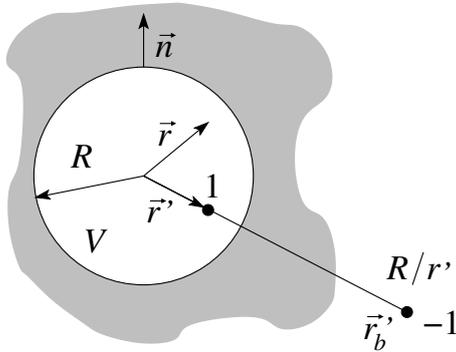


Abb. 2.6: Geometrie des Dirichletproblems im Innenraum einer Kugel. Die Bildladung der Stärke  $-R/r'$  wird im Punkt  $\vec{r}_b' = (R^2/r'^2)\vec{r}'$  im Aussenraum plaziert.

## 2.2 Konforme Abbildungen

Die Technik der konformen Abbildungen funktioniert für 2D-Probleme (translationsinvariante 3D-Probleme), z.B. für einen geladenen Draht  $\parallel z$ . Wir wählen die  $xy$ -Ebene. Im Vakuum gelten die (Integrations-)Bedingungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{\nabla}_{\perp} A,\end{aligned}$$

mit  $\vec{A} = (0, 0, A)$  und  $\nabla_{\perp} = (-\partial_y, \partial_x)$  für ein zweidimensionales Problem. Die Komponenten  $E_x$  und  $E_y$  lassen sich dann durch die Potentiale  $\varphi$  und  $A$  ausdrücken,

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{und} \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \quad (2.9)$$

Diese Formeln erinnern an die Cauchy-Riemann Bedingungen für analytische Funktionen,

$$w(z) = \varphi - iA \quad \text{oder} \quad w(z) = A + i\varphi \quad z = x + iy. \quad (2.10)$$

Ist  $w$  analytisch, so hat  $w$  in jedem Punkt wohldefinierte Ableitungen unabhängig von der gewählten Richtung, und es gilt

$$\begin{aligned}\partial_z w &= \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(\varphi - iA) \\ &= \frac{1}{2}(\partial_x\varphi - \partial_y A) - \frac{i}{2}(\partial_y\varphi + \partial_x A) \\ &= -E_x + iE_y = \partial_x w = \partial_{iy} w, \\ \partial_{\bar{z}} w &= \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)(\varphi - iA) = 0;\end{aligned} \quad (2.11)$$

schliesslich ist  $w$  wegen

$$\Delta w = 4\partial_z\partial_{\bar{z}} w = 0$$

harmonisch. Die Grösse  $w$  und heisst *komplexes Potential*; ihr Imaginärteil gibt die Kraftlinien währenddem der Realteil die Äquipotentiallinien liefert,

$$\begin{aligned}\Im w(z) &= \text{const. Kraftlinien,} \\ \Re w(z) &= \text{const. Äquipotentiallinien.}\end{aligned}$$

Die Kraftlinien folgen aus der Differentialgleichung  $\partial_x y = E_y/E_x$ , denn

$$0 = E_x dy - E_y dx = \frac{\partial A}{\partial y} dy + \frac{\partial A}{\partial x} dx = dA.$$

Beide Familien von Linien sind orthogonal, denn

$$\vec{\nabla}\varphi \cdot \vec{\nabla}A = \partial_x\varphi \underbrace{\partial_x A}_{\partial_y\varphi} + \partial_y\varphi \underbrace{\partial_y A}_{-\partial_x\varphi} = 0. \quad (2.12)$$

Weiter gilt auf Äquipotentiallinien ((2.9), vgl. Abb. 2.7))

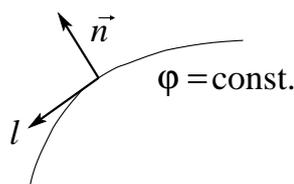


Abb. 2.7: Zur Integration entlang einer Äquipotentiallinie.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = -\frac{\partial A}{\partial\ell},$$

$$\oint E_n d\ell = -\oint \frac{\partial\varphi}{\partial n} d\ell = \oint \frac{\partial A}{\partial\ell} d\ell = A_2 - A_1, \quad (2.13)$$

und für geschlossene Äquipotentialschleifen gilt, mit  $q$  die von der Schleife eingeschlossene Linienladung,

$$4\pi q = \Delta A,$$

d.h., das Potential  $A$  ist nicht eindeutig. Demnach ist  $A$  eindeutig, falls  $q = 0$  überall und  $A$  *springt* beim Umlauf um eine Ladung. Als Anwendung betrachten wir das Beispiel eines geladenen Drahtes parallel zur  $\hat{z}$ -Achse mit der Linienladung  $q$ ; das zugehörige komplexe Potential hat dann die Form

$$w(z = x + iy) = -2q \ln z \quad \longrightarrow \quad E_r = 2q/r, \quad E_\theta = 0. \quad (2.14)$$

Sei  $\mathcal{L}$  ein Leiter mit Potential  $\varphi$  in 2D. Dann ist  $w(z)$  gerade die *konforme Abbildung*, welche  $\mathcal{L}$  in  $w = \varphi$  überführt, vgl. Abb. 2.8.

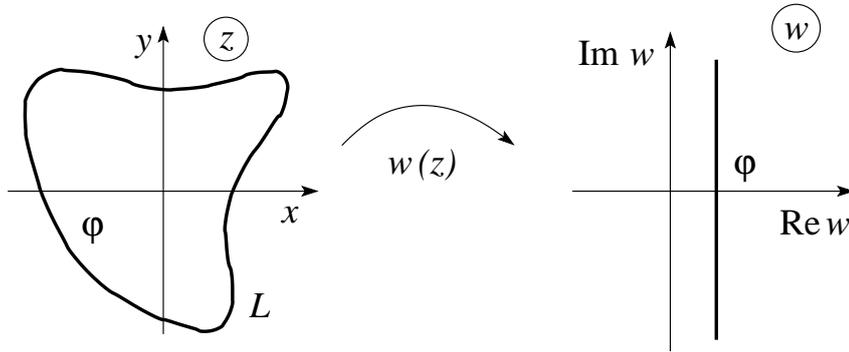


Abb. 2.8: Konforme Abbildung  $w$ , welche  $\mathcal{L}$  in  $w = \varphi$  überführt.

### 2.3 Orthogonale Funktionen, kartesische Koordinaten

Sei  $[a, b]$  ein Intervall aus  $\mathbb{R}$ . Die Funktionenmenge  $\{\phi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ,  $\phi_n$  reell oder komplex, ist *orthonormiert* und *vollständig*, falls gilt

$$\int_a^b dx \phi_n^*(x) \phi_m(x) = \delta_{nm}, \quad \text{orthonormiert,} \quad (2.15)$$

$$\sum_n \phi_n^*(x') \phi_n(x) = \delta(x - x'), \quad \text{vollständig.} \quad (2.16)$$

Jede ‘anständige’ Funktion  $f$  auf  $[a, b]$  lässt sich durch eine Linearkombination der  $\phi_n$  darstellen,

$$f(x) = \sum_m a_m \phi_m(x).$$

Die Koeffizienten folgen aus (2.16),

$$a_n = \int_a^b \phi_n^*(x') f(x') dx'. \quad (2.17)$$

Aus der Vollständigkeit folgt, dass tatsächlich

$$\begin{aligned} \sum_n a_n \phi_n(x) &= \int dx' \sum_n \phi_n^*(x') f(x') \phi_n(x) \\ &= \int dx' \delta(x - x') f(x') = f(x). \end{aligned}$$

Man nennt die Menge der Funktionen  $\{\phi_n\}$  eine Basis von  $\mathbb{L}_2([a, b])$ . Ein bekanntes Beispiel ist die Fourierdarstellung von Funktionen aus  $\mathbb{L}_2([-a/2, a/2])$  (für den  $n = 0$  Koeffizienten ist die Normierung  $1/\sqrt{a}$  zu nehmen),

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \begin{cases} \sin(2\pi n x/a), & \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(2\pi i n x/a). \end{cases} \quad (2.18)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos(2\pi n x/a) + b_n \sin(2\pi n x/a) \right),$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x/a}.$$

Die Koeffizienten  $a_n$ ,  $b_n$ , und  $c_n$  sind durch folgende Ausdrücke gegeben

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx f(x) \cos 2\pi n x/a, & c_n &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-a/2}^{a/2} dx f(x) e^{-2\pi i n x/a}. \\ b_n &= \frac{2}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx f(x) \sin 2\pi n x/a, \end{aligned} \quad (2.19)$$

Gehen wir vom endlichen Interval  $[-a, a]$  zur reellen Achse über benutze man den Satz von Basisfunktionen

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}. \quad (2.20)$$

Orthonormierung und Vollständigkeit nehmen folgende Formen an,

$$\begin{aligned} \text{orthon.} \quad & 1/2\pi \int dx \exp(i(k - k')x) = \delta(k - k'), \\ \text{vollst.} \quad & 1/2\pi \int dk \exp(ik(x - x')) = \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (2.21)$$

und die Darstellung einer Funktion  $f(x)$  mit ihren Koeffizienten  $a(k)$  ist gegeben durch

$$\begin{cases} \phi_k(x) &= 1/\sqrt{2\pi} \exp ikx, \\ f(x) &= 1/\sqrt{2\pi} \int dk a(k) e^{ikx}, \\ a(k) &= 1/\sqrt{2\pi} \int dx f(x) e^{-ikx}. \end{cases} \quad (2.22)$$

Diese Basen sind nicht irgendwelche Funktionen; sie sind alles Lösungen der Eigenwertgleichung zum Laplaceoperator,

$$(\partial_x^2 + \lambda^2) \phi = 0, \quad \lambda = \frac{2\pi n}{a} k. \quad (2.23)$$

Die Verallgemeinerung auf  $d$  Dimensionen ist trivial; das Problem  $(\Delta + \lambda^2) \phi = 0$  separiert und kann durch einen Produktansatz gelöst werden,

$$\phi_{n_1 \dots n_d}(\vec{r}) = \prod_{i=1}^d \phi_{n_i}(x_i), \quad (\Delta + \lambda^2) \phi_{n_1 \dots n_d} = 0 \rightarrow \lambda^2 = \sum_i \lambda_i^2. \quad (2.24)$$

Geben wir nun zusätzlich separierbare Randbedingungen vor, so wird das elektrostatische Problem einfach lösbar. Z.B. können wir in  $d = 3$  eine Box  $a, b, c$  vorgeben mit  $\varphi = 0$  überall, ausser auf  $z = c$ , wo  $\varphi(x, y) = V(x, y)$  sein soll, vgl. Abb. 2.9. Wir finden die Lösungen zu  $\Delta \varphi = 0$  in der Form

### 2.3. ORTHOGONALE FUNKTIONEN, KARTHESISISCHE KOORDINATEN 43

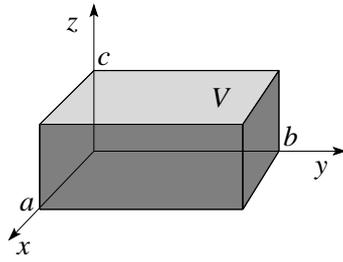


Abb. 2.9: Rechtwinklige Box (Quader) mit dem Potential  $\varphi$  auf der Oberfläche vorgegeben, z.B.,  $\varphi(x, y, z = c) = V$ .

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma} = \sin \alpha x \sin \beta y \sin \gamma z \quad \text{mit} \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0 \quad (2.25)$$

$$\alpha = \alpha_n = 2\pi/a \rightarrow \text{Randbedingung bei } x = 0, a \text{ erfüllt,}$$

$$\beta = \beta_m = 2\pi/b \rightarrow \text{Randbedingung bei } y = 0, b \text{ erfüllt,}$$

$$\gamma = \gamma_{nm} = i\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \rightarrow \text{Diffgl. und Randbed. bei } z = 0 \text{ erfüllt.}$$

Es bleibt die Randbedingung bei  $z = c$  zu befriedigen. Als Lösungsansatz für dieses Dirichletproblem schreiben wir dann

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{nm} a_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sinh\left(\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} z\right)$$

und finden die Koeffizienten  $a_{nm}$  via der letzten Randbedingung bei  $z = c$

$$V(x, y) = \sum_{nm} a_{nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} \sinh\left(\pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} c\right)$$

mit dem Resultat

$$a_{nm} = \frac{4/ab}{\sinh(\pi \sqrt{n^2/a^2 + m^2/b^2} c)} \int dx dy V(x, y) \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$$

Die Lösung des *allgemeinen separablen Dirichletproblems* mit  $\varphi(x_i = \alpha_i) = V_i(x_{j \neq i})$  und den Konstanten  $\alpha_i$  ergibt sich durch lineare Superposition.

Wir können sofort sehen, wodurch diese Technik limitiert wird: Die Randbedingungen müssen dem Koordinatensystem angepasst sein. Für kartesische Koordinaten können wir Boxprobleme vom obigen Typ lösen. Was ist zu tun, wenn wir als Ränder Kugeln, Zylinder, Ellipsen, Parabeln usw. haben? Offensichtlich müssen wir

- zu neuen Koordinaten übergehen, in welchen die Randbedingungen separabel sind,
- den Operator  $\Delta$  in den neuen Koordinaten finden,
- die Basis zu  $(\Delta + \lambda^2)$  finden.

Dieses Programm können wir für folgende Geometrien durchziehen:

- kartesishe Koordinaten
- Zylinderkoordinaten
- Kugelkoordinaten
- parabolische Koordinaten
- parabolische Zylinderkoordinaten
- elliptische Koordinaten
- elliptische Zylinderkoordinaten
- Toruskoordinaten
- Bipolarkoordinaten

Wir familiarisieren uns zuerst mit den Eigenschaften orthogonaler krummliniger Koordinaten.

## 2.4 Krummlinie Koordinaten

Oft treten solche krummlinigen Koordinaten als Kraft- und Äquipotentiallinien eines Vektorfeldes auf. Wir führen erst einige

### Definitionen

ein:

|                   | alt         | neu          | euklidisch                |        |
|-------------------|-------------|--------------|---------------------------|--------|
| Koordinaten       | $x_i$       | $x'_i$       | $\xi_i$                   | (2.26) |
| Basisvektoren     | $\vec{e}_i$ | $\vec{e}'_i$ | $\vec{\varepsilon}_i$     |        |
| allg. Vektorkomp. | $a_i$       | $a'_i$       | $\alpha_i$                |        |
| Metrik            | $g_{ij}$    | $g'_{ij}$    | $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ |        |
| orthog. Metrik    | $h_i^2$     | $h_i'^2$     | 1                         |        |

Die Richtungskosinusse  $\gamma_{ij}$  vermitteln zwischen den alten, neuen, und den euklidischen Koordinaten. Im folgenden nutzen wir die Einsteinkonvention und summieren über doppelt vorkommende Indices (ohne das Summenzeichen zu schreiben).

Betrachte dann einen Punkt  $P$  im Raum und zwei orthogonale Koordinatensysteme mit Basisvektoren<sup>1</sup>  $\{\vec{e}_i\}$  und  $\{\vec{e}'_i\}$ . Die Richtungskosinusse  $\gamma_{ij}$

<sup>1</sup>Die Einheitsvektoren seien bezüglich gleichen Längenskalen gemessen.

beschreiben den Übergang zwischen den Systemen,

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= \delta_{ij}, & \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j &= \gamma_{ij}, & \vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j' &= \delta_{ij}, \\ \vec{e}_i &= (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j') \vec{e}_j', & \gamma_{ij} \gamma_{kj} &= \delta_{ik}, & \vec{e}_i' &= (\vec{e}_i' \cdot \vec{e}_j) \vec{e}_j', \\ &= \gamma_{ji} \vec{e}_j', & \gamma_{ji} \gamma_{jk} &= \delta_{ik}, & &= \gamma_{ij} \vec{e}_j. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Die Komponenten eines Vektors transformieren gemäss

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_i \vec{e}_i = a'_i \vec{e}_i' \\ a'_i &= \vec{a} \cdot \vec{e}_i' = a_j \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i' = \gamma_{ij} a_j, \\ a_i &= \vec{a} \cdot \vec{e}_i = a'_j \vec{e}_j' \cdot \vec{e}_i = \gamma_{ji} a'_j \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Längen ( $\rightarrow$  Metrik) ergeben sich aus

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ij} d\xi_i d\xi_j = d\xi_i^2 \\ &= \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} dx_j \right) \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_l} dx_l \right) \stackrel{\{x_j\} \text{ orthog.}}{\equiv} h_j^2 dx_j^2, \\ h_j^2 &= \sum_i \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right)^2 = \frac{1}{\sum_i (\partial_{\xi_i} x_j)^2}; \end{aligned} \quad (2.29)$$

die Grössen  $h_j^2$  sind die Skalenfaktoren der diagonalen<sup>2</sup> Metrik,

$$g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}. \quad (2.30)$$

Die Skalenfaktoren und Richtungskosinusse hängen zusammen gemäss

$$\gamma_{ij} = \frac{h_i dx_i}{d\xi_j} = h_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}.$$

Dabei dividieren wir die neue Länge  $h_i dx_i$  in Richtung  $i$ , die wir bei einer Verschiebung um  $d\xi_j$  abschreiten, durch die (alte) Länge  $d\xi_j$  in Richtung  $j$ . Umgekehrt können wir  $\xi_j$  durch  $x_i$  ausdrücken und erhalten

$$\gamma_{ij} = \frac{d\xi_j}{h_i dx_i} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = h_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j}. \quad (2.31)$$

Konsistent ergibt sich

$$\gamma_{ij} \gamma_{ji} = h_i \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{1}{h_i} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = \delta_{ii} = d.$$

Gehen wir von alten (krummlinigen) Koordinaten zu neuen über, so gilt

$$\frac{h_j}{h_i'} \frac{\partial x_j}{\partial x_i'} = \gamma_{ij} = \frac{h_i'}{h_j} \frac{\partial x_i'}{\partial x_j}. \quad (2.32)$$

<sup>2</sup>Die Koordinaten  $x_i$  sind orthogonal.

Schliesslich ergeben sich für Linien-, Flächen- und Volumenelemente die Ausdrücke

$$\begin{aligned} dl_i &= h_i dx_i, \\ d^2\sigma_i &= \prod_{j \neq i} h_j dx_j, \\ d^3V &= \prod_i h_i dx_i. \end{aligned} \quad (2.33)$$

### 2.4.1 Vektoranalysis: grad, div, rot, Laplace

**grad:**

Transformiert ein Skalarfeld  $\Psi(\vec{x})$  in ein Vektorfeld  $(\vec{\nabla}\Psi)(\vec{x})$ . Die Änderungsrate  $\vec{\nabla}\Psi$  des Skalarfeldes zeigt in die Richtung der stärksten Zunahme von  $\Psi$ .  $\vec{\nabla}\Psi$  ist orthogonal zur  $\Psi = \text{const.}$ -Fläche,

$$d\Psi = \vec{\nabla}\Psi \cdot d\vec{s}, \quad d\Psi = 0 \text{ für } d\vec{s} \parallel \Psi = \text{const.}$$

In allgemeinen orthogonalen Koordinaten ist

$$\vec{\nabla}\Psi = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \vec{e}_i, \quad (2.34)$$

denn mit

$$\begin{aligned} \vec{e}_i &= \gamma_{ji} \vec{e}_j' = \frac{h_i}{h_j'} \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \vec{e}_j', & \frac{\partial}{\partial x_i} &= \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k'}, \\ \text{und} & \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} = \delta_{kj} \end{aligned}$$

ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\Psi &= \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Psi}{\partial x_i} \vec{e}_i = \sum_{i,j,k} \frac{1}{h_i} \frac{\partial x_k'}{\partial x_i} \frac{\partial\Psi'}{\partial x_k'} \frac{h_i}{h_j'} \frac{\partial x_i}{\partial x_j'} \vec{e}_j' \\ &= \sum_j \frac{1}{h_j'} \frac{\partial\Psi'}{\partial x_j'} \vec{e}_j' = \vec{\nabla}'\Psi' \end{aligned}$$

und die Definition (2.34) ist *unabhängig* vom Koordinatensystem.  $\vec{\nabla}\Psi$  transformiert wie ein Vektor, denn

$$(\vec{\nabla}\Psi)_i = \gamma_{ji} (\vec{\nabla}\Psi)'_j = \frac{h_j'}{h_i} \frac{\partial x_j'}{\partial x_i} \frac{1}{h_j'} \frac{\partial\Psi'}{\partial x_j'} = \frac{1}{h_i} \frac{\partial\Psi}{\partial x_i}.$$

**div:**

Transformiert ein Vektorfeld  $\vec{a}(\vec{x})$  in ein Skalarfeld  $\operatorname{div}\vec{a}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{x})$ . Die Divergenz misst den Vektorlinienfluss, den Ausfluss des Vektorfeldes, aus einem Volumen  $d^3V$ . In kartesischen Koordinaten findet man den Ausdruck für die Divergenz via folgender Betrachtung:

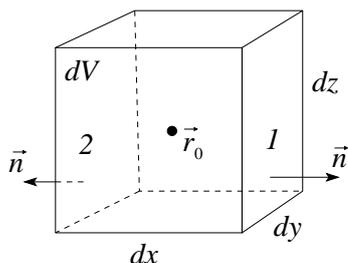


Abb. 2.10: Infinitesimale Box in kartesischen Koordinaten zur Berechnung der Divergenz eines Vektorfeldes.

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{a}(\vec{r})|_1 &= a_x(\vec{r}_0) + (\partial_x a_x)(\vec{r}_0) \frac{dx}{2} \\ \vec{n} \cdot \vec{a}(\vec{r})|_2 &= -a_x(\vec{r}_0) + (\partial_x a_x)(\vec{r}_0) \frac{dx}{2}\end{aligned}$$

Der Fluss aus  $dV$  durch die Flächen 1 und 2 ist

$$\iint_{1\&2} d^2\sigma \vec{a} \cdot \vec{n} = (\partial_x a_x)(\vec{r}_0) dx dy dz$$

Analog verfährt man mit der Berechnung des Flusses durch die Anderen Flächen und erhält die Divergenz aus der Summe

$$\operatorname{div} \vec{a} \equiv \lim_{dV \rightarrow 0} \frac{\iint d^2\sigma \vec{a} \cdot \vec{n}}{dV} = \partial_x a_x + \partial_y a_y + \partial_z a_z = \partial_i a_i.$$

Gehen wir zu allgemeinen orthogonalen Koordinaten über, so muss bei der Berechnung des Flusses durch die Flächen auch die Änderung der Flächeninhalte berücksichtigt werden, vgl. Abb. 2.11: Der Fluss aus  $dV$  durch die

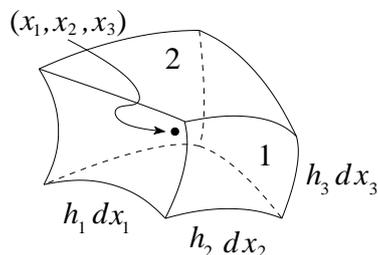


Abb. 2.11: Infinitesimale Box zur Berechnung der Divergenz in allgemeinen orthogonalen Koordinaten.

Flächen 1 und 2 ist dann gegeben durch

$$[\partial_{x_1}(h_2 h_3 a_1)] dx_1 dx_2 dx_3,$$

(beachte die Änderung des Flächenelements  $h_2 dx_2 h_3 dx_3$  entlang  $dx_1$ ) und der Ausdruck für die Divergenz hat die Form

$$\rightarrow \operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\partial_{x_1}(h_2 h_3 a_1) + \partial_{x_2}(h_1 h_3 a_2) + \partial_{x_3}(h_1 h_2 a_3)]. \quad (2.35)$$

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir  $\partial_i a_i = \operatorname{div} \vec{a}$  in kartesischen Koordinaten auf krummlinige orthogonale Koordinaten transformieren.  $\operatorname{div} \vec{a}$  ist gemäss (2.35) invariant unter Koordinatentransformation und somit ein Skalar. Es gilt das *Gauss-Theorem*

$$\int d^3V \operatorname{div} \vec{a} = \iint d^2\sigma \vec{n} \cdot \vec{a} \quad (2.36)$$

**rot:**

Transformiert ein Vektorfeld  $\vec{a}(\vec{x})$  in ein Vektorfeld  $\operatorname{rot} \vec{a}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{x})$ . Die Rotation misst die Vektorfeldwirbelung, die Wirbelung des Vektorfeldes, um eine Fläche  $d^2\sigma$ , vgl. Abb. 2.12. In kartesischen Koordinaten findet man den folgenden Ausdruck für die Rotation eines Vektorfeldes:

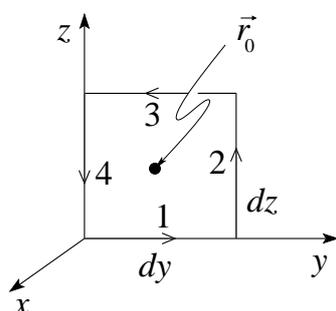


Abb. 2.12: Zur Berechnung der Rotation in kartesischen Koordinaten.

$$\begin{aligned} \oint d\vec{s} \cdot \vec{a} &= \int_1 dy a_y + \int_2 dz a_z - \int_3 dy a_y - \int_4 dz a_z \\ &= (a_y - \partial_z a_y dz/2) dy + \dots = (\partial_y a_z - \partial_z a_y) dy dz, \\ (\operatorname{rot} \vec{a})_i &= \lim_{d\sigma_i \rightarrow 0} \frac{\oint_i d\vec{s} \cdot \vec{a}}{d\sigma_i} = \epsilon_{ijk} \partial_j a_k. \end{aligned}$$

In allgemeinen orthogonalen Koordinaten muss wiederum die Längenänderung entlang des Umfangs berücksichtigt werden, vgl. Abb. 2.13,

$$\begin{aligned} \oint d\vec{s} \cdot \vec{a} &= [h_2 a_2 - \partial_{x_3}(h_2 a_2)/2 dx_3] dx_2 + \dots \\ &= [\partial_{x_2}(h_3 a_3) - \partial_{x_3}(h_2 a_2)] dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

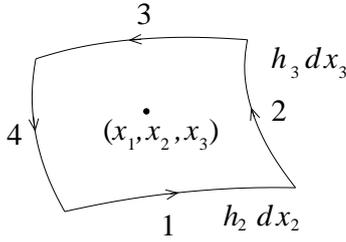


Abb. 2.13: Zur Berechnung der Rotation in allgemeinen orthogonalen Koordinaten.

Damit erhalten wir für die Rotation eines Vektorfeldes den Ausdruck

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \frac{1}{h_2 h_3} [\partial_{x_2} (h_3 a_3) - \partial_{x_3} (h_2 a_2)] \vec{e}_1 \\ &+ \frac{1}{h_1 h_3} [\partial_{x_3} (h_1 a_1) - \partial_{x_1} (h_3 a_3)] \vec{e}_2 \\ &+ \frac{1}{h_2 h_1} [\partial_{x_1} (h_2 a_2) - \partial_{x_2} (h_1 a_1)] \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Rotation  $\vec{\nabla} \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a}$  ist wiederum eine Invariante unter Koordinatentransformationen und es gilt der *Satz von Stokes*

$$\int d^2 \sigma \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{a} = \oint d\vec{s} \cdot \vec{a}. \quad (2.38)$$

### Laplace:

Transformiert ein Skalarfeld in ein Skalarfeld und ein Vektorfeld in ein Vektorfeld.  $\Delta$  misst die 'Dichte' des Feldes. Es ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \Psi &= \Delta \Psi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \Psi) = \text{div grad } \Psi, \\ \vec{\nabla}^2 \vec{a} &= \Delta \vec{a} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \text{rot}(\text{rot } \vec{a}). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Indem wir die Operatoren  $\text{div}$  und  $\text{grad}$  auf krummlinige Koordinaten umschreiben erhalten wir für ein Skalarfeld die Verallgemeinerung auf krummlinige orthogonale Koordinaten in der Form

$$\Delta \Psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \partial_{x_i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \partial_{x_i} \Psi \right). \quad (2.40)$$

Die Verallgemeinerung für das Vektorfeld ist komplizierter,

$$(\Delta \vec{a})_i = \frac{1}{h_i} \sum_j \frac{1}{h_j^2} \mathcal{D}_{x_j} [\mathcal{D}_{x_j} (h_i a_i)] \quad (2.41)$$

mit

$$\mathcal{D}_{x_j} = \partial_{x_j} (h_i a_i) - \sum_n (h_n a_n) \Gamma_{ij}^n,$$

und den Christoffelsymbolen

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{1}{h_n} \begin{cases} \partial_{x_n} h_n, & n = i = j, \\ \partial_{x_i} h_n, & n = j, \\ \partial_{x_j} h_n, & n = i, \\ -(h_i/h_n)\partial_{x_n} h_i, & i = j, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Schliesslich beachte man noch die Beziehungen<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \vec{a} &\neq \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) \\ \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Psi) &= 0, \text{ ein Gradientenfeld ist nicht verwirbelt,} \\ \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= 0, \text{ ein Wirbelfeld hat keine Divergenz,} \\ &\rightarrow \text{die Wirbellinien sind immer geschlossen.} \end{aligned}$$

## 2.5 Kugelkoordinaten

Die Kugelkoordinaten sind in Abb. 2.14 definiert. Aus der Definition der

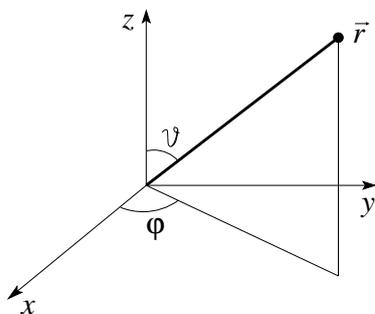


Abb. 2.14: Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ : Die alten Koordinaten ausgedrückt durch die neuen sind:  $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \vartheta$ .

Koordinatentransformation alt  $\rightarrow$  neu findet man die Quadrate der Längen,

$$\begin{aligned} h_\varphi^2 &= (\partial_\varphi x)^2 + (\partial_\varphi y)^2 + (\partial_\varphi z)^2 = r^2 \sin^2 \vartheta, \\ h_\vartheta^2 &= r^2, \\ h_r^2 &= 1. \end{aligned} \tag{2.42}$$

<sup>3</sup>Beachte,  $\vec{\nabla}^2 \vec{a}$  involviert Divergenz und Wirbelung von  $\vec{a}$ ; für eine inkompressible Flüssigkeit ist  $\text{div } \vec{v} = 0$  ( $\vec{v}$  ein Geschwindigkeitsfeld) und  $\vec{\nabla}^2 \vec{v} \neq 0$  nur falls  $\text{rot } \vec{v}$  immer noch verwirbelt ist.

Die Operatoren grad, rot, und Laplace haben die Kugelkoordinaten die Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Psi &= \left(\partial_r \Psi, \frac{1}{r}\partial_\vartheta \Psi, \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \Psi\right), \\ &\quad r - \quad \vartheta - \quad \varphi - \quad \text{Komponenten} \\ \vec{\nabla} \times \vec{a} &= \left(\frac{1}{r\sin\vartheta}(\partial_\vartheta(\sin\vartheta a_\varphi) - \partial_\varphi a_\vartheta), \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi a_r - \frac{1}{r}\partial_r(r a_\varphi), \frac{1}{r}(\partial_r(r a_\vartheta) - \partial_\vartheta a_r)\right), \\ \vec{\nabla}^2\Psi &= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Psi) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta\Psi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2\Psi;\end{aligned}$$

Der Radialteil des Laplaceoperators lässt sich verschieden schreiben,

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r Psi) = \frac{1}{r}\partial_r^2(r Psi) = \partial_r^2 Psi + \underbrace{(2/r)}_{(d-1)/r} \partial_r Psi; \quad (2.43)$$

im letzten Term gibt  $d - 1$  die Anzahl der auf  $\vec{r}$  senkrecht stehenden gekrümmten Koordinaten an.

### 2.5.1 Lösungen des Laplace-Problems $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$

Mit dem Separationsansatz

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{u(r)}{r}P(\vartheta)\chi(\varphi)$$

erhalten wir die drei Differentialgleichungen und zugehörige Lösungen

$$\begin{aligned}\partial_\varphi^2\chi &= -m^2\chi \quad \rightarrow \quad \chi = \exp(im\varphi), \\ r^2\partial_r^2u &= l(l+1)u \quad \rightarrow \quad u = u_{l+1}r^{l+1} + u_{-l}r^{-l}, \\ \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta)P &= \left(-l(l+1) + \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right)P \quad \rightarrow \quad ?. \quad (2.44)\end{aligned}$$

Die azimutale Funktion  $\chi(\varphi)$  muss im Argument  $\varphi$  eindeutig sein, also kommen nur ganzzahlige Eigenwerte  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  in Frage. Für  $m = 0$  hat  $\varphi$  die volle azimutale Symmetrie. Die radiale Funktion  $u(r)$  besteht aus Komponenten  $r^{l+1}$  und  $r^{-l}$  die bei  $0, \infty$  regulär/irregulär sind.

Wir müssen das Eigenwertproblem (2.44) für die Winkelfunktion  $P(\vartheta)$  lösen. Wir betrachten zuerst  $m = 0$ , den azimutal symmetrischen Fall. Mit der Transformation auf  $z = \cos\vartheta$  erhalten wir die *Legendre-Differentialgleichung*

$$\partial_z[(1-z^2)\partial_z P] + l(l+1)P = 0. \quad (2.45)$$

Mit dem Fuchsschen Ansatz

$$P(z) = z^\alpha \sum_j a_j z^j$$

erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} a_0 \neq 0 &\rightarrow \alpha(\alpha - 1) = 0 \rightarrow \alpha = 0 \text{ oder } 1, \\ a_1 \neq 0 &\rightarrow \alpha(\alpha + 1) = 0 \rightarrow \alpha = -1 \text{ oder } 0, \\ &\rightarrow \text{Verschiebung um eine Potenz,} \\ &\rightarrow \text{wir w\u00e4hlen } a_0 \neq 0, a_1 = 0. \\ \frac{a_{j+2}}{a_j} &= \frac{(\alpha + j)(\alpha + j + 1) - l(l + 1)}{(\alpha + j + 1)(\alpha + j + 2)}. \end{aligned}$$

Die Reihe divergiert bei  $z = \pm 1 \rightarrow$  und wir verlangen, dass die Reihe abbricht; statt einer Reihe erhalten wir ein Polynom. Die sich daraus ergebenden Eigenwerte  $l$  sind ganzzahlig,  $\geq 0$   $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

$l$  gerade  $\rightarrow$  w\u00e4hle  $\alpha = 0$ , Polynom mit geraden Potenzen,

$l$  ungerade  $\rightarrow$  w\u00e4hle  $\alpha = 1$ , Polynom mit ungeraden Potenzen;

sonst ist die Reihe divergent.<sup>4</sup> Wir erhalten damit die *Legendre-Polynome*  $P_l(z)$

$$\begin{aligned} P_0(z) &= 1, \\ P_1(z) &= z, \\ P_2(z) &= (3z^2 - 1)/2, \\ P_3(z) &= (5z^3 - 3z)/2, \\ P_4(z) &= (35z^4 - 30z^2 + 3)/8, \quad \dots \end{aligned} \tag{2.46}$$

Die *Rodriguez-Formel* erzeugt die Legendre-Polynome aus Ableitungen von  $(z^2 - 1)^l$ ,

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dz^l} (z^2 - 1)^l, \tag{2.47}$$

und es gelten die *Rekursions-Formeln*

$$\begin{aligned} \partial_z P_{l+1} &= \partial_z P_{l-1} + (2l + 1)P_l, \\ (l + 1)P_{l+1} &= -lP_{l-1} + (2l + 1)zP_l, \\ \partial_z P_{l+1} &= [(l + 1) + z\partial_z]P_l. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Die Legendre-Polynome sind auf  $2/(2l + 1)$  *orthonormiert*

$$\int_{-1}^1 dz P_{l'}(z)P_l(z) = \frac{2}{2l + 1} \delta_{l'l} \tag{2.49}$$

und *vollst\u00e4ndig*,

$$\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) P_l(z) P_l(z') = \delta(z - z'). \tag{2.50}$$

<sup>4</sup>Z.B. ergibt sich f\u00fcr  $l = 0$ ,  $\alpha = 1$  das Resultat  $(1/2) \ln[(1 + z)/(1 - z)] \rightarrow \pm\infty$  f\u00fcr  $z = \pm 1$ .

Eine Funktion  $f(z)$  kann demzufolge nach den Legendre-Polynomen  $P_l(z)$  entwickelt werden,<sup>5</sup>

$$f(z) = \sum_l f_l P_l(z) \quad (2.51)$$

$$\text{mit } f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 dz f(z) P_l(z).$$

Als nächstes gehen wir zum allgemeinen Fall  $m \neq 0$  über. Wir lösen die verallgemeinerte Legendre-Differentialgleichung

$$\partial_z[(1-z^2)\partial_z P] + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right)P = 0$$

durch die assoziierten Legendrefunktionen ( $m > 0$ )

$$P_l^m(z) = (-1)^m (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m}{dz^m} P_l(z), \quad (2.52)$$

welche vollständig in  $l$  für jedes  $m$  sind. Für  $m < 0$  benutze man die Rodriguesformel (2.47) um wohldefinierte Ableitungen zu bekommen. Wiederum ist  $l \geq 0$ , ganz,  $l = 0, 1, 2, \dots$  und die azimutalen Eigenwerte  $m$  sind eingeschränkt auf  $-l \leq m \leq l$ ,  $m$  ganz,  $m = -l, -(l-1), \dots, 0, \dots, l$ . Die  $P_l^m$  sind orthonormiert auf

$$\int_{-1}^1 dz P_l^m(z) P_l^m(z) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{l,l}. \quad (2.53)$$

Indem wir die Lösungen  $P_l^m(z)$  und  $\chi_m$  der polaren und azimutalen Probleme kombinieren, erhalten wir die *Kugelfunktionen*

$$Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi}, \quad (2.54)$$

für  $l = 0, 1, 2, \dots$ , und die  $2l+1$  Werte  $m = -l, -(l-1), \dots, l$ . Die Kugelfunktionen  $Y_{lm}$  definieren ein *orthonormiertes, vollständiges Funktionensystem auf der Kugel*,

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta}_{\int d\Omega} Y_{l'm'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \quad (2.55)$$

<sup>5</sup>Denn

$$\sum_l f_l P_l(z) = \int_{-1}^1 dz' \underbrace{\sum_l \frac{2l+1}{2} P_l(z') P_l(z)}_{\delta(z-z')} f(z') = f(z)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta'). \quad (2.56)$$

Die einfachsten Kugelfunktionen haben die Form

$$\begin{aligned} Y_{00} &= 1/\sqrt{4\pi}, \\ Y_{1\pm 1} &= -\sqrt{3/8\pi} \sin \vartheta \exp(\pm i\varphi), \\ Y_{10} &= \sqrt{3/4\pi} \cos \vartheta, \\ Y_{2\pm 2} &= \sqrt{15/32\pi} \sin^2 \vartheta \exp(\pm 2i\varphi), \\ Y_{2\pm 1} &= -\sqrt{15/8\pi} \sin \vartheta \cos \vartheta \exp(\pm i\varphi), \\ Y_{20} &= \sqrt{5/16\pi} (3 \cos^2 \vartheta - 1). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Der Funktionenraum  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^3)$  zerfällt gemäss

$$\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^3) = \mathbb{L}_2(\mathbb{R}^+) \otimes \mathbb{L}_2(S_1^2), \quad \mathbb{L}_2(S_1^2) = \bigoplus_{l=0}^{\infty} \mathcal{H}_l, \quad (2.58)$$

Der Funktionenraum  $\mathcal{H}_l$  wird aufgespannt durch die  $Y_{lm}$  mit  $\dim \mathcal{H}_l = 2l + 1$ .<sup>6</sup> Mit Hilfe der radialen- und Kugel Funktionen  $R_l(r)$  und  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

<sup>6</sup>Beachte, dass die  $r^l$  und  $r^{-l-1}$  singularär bei  $\infty$  und  $0$  sind; die Radialfunktionen  $r^l$  sind wohldefiniert auf  $[0, R]$  und  $r^l Y_{lm}$  sind harmonische Funktionen ( $\Delta\varphi = 0$ ). Erst das Eigenfunktionensystem von  $\Delta$ ,

$$\Delta\phi_{klm} = -k^2\phi_{klm},$$

mit  $R_{lk} = j_l(kr)$ ,  $k = x_{nl}/R$ , spannt die Räume  $\mathbb{L}_2([0, R] \times S_1^2)$  und  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^3)$  auf: Die Separation

$$\phi_{klm} = R_{lk}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

liefert ein vollständiges (in  $l$ ) Set von Radialfunktionen  $j_l(kr) \propto r^l (k \rightarrow 0)$ , sowie einen vollständigen Satz  $Y_{lm} \propto P_l^m(\vartheta) \exp(im\varphi)$ , mit  $P_l^m(\vartheta)$  vollständig in  $\vartheta, l$  für jedes  $m$  und  $\exp(im\varphi)$  vollständig in  $\varphi, m$ . Die harmonischen Funktionen zu  $k = 0$  spannen nur einen harmonischen Teilraum von  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^3)$  auf, denn  $r^{l'}$  ist mit  $Y_{lm}$  verknüpft, so dass  $l = l'$  ist. Erst das vollständige Eigenfunktionensystem zum Operator (mit allen  $k$ ) spannt den ganzen Funktionenraum auf.

Im allgemeinen definiert ein hermitesches Problem (inklusive Randbedingungen) eine Basis. Betrachte z.B. das Problem  $\Delta\phi = -k^2\phi$  in einer Kugel mit Radius  $R$  und Randbedingungen  $\phi(R\vartheta, \varphi) = 0$ . Die radiale Randbedingung  $j_l(kR) = 0$  determiniert das Spektrum  $k = k_{nl} = x_{nl}/R$ , Eigenfunktionen  $\phi_{klm}$  sind orthogonal und normierbar.  $R \rightarrow \infty \implies \phi_{klm}$  spannen  $\mathbb{L}_2(\mathbb{R}^3)$  auf im verallgemeinerten Sinn (mit Distributionen, Problem mit Normierbarkeit). Keine Randbedingung: Dann ist auch  $-k^2 > 0$  möglich, d.h.  $j_l(ikr) \rightarrow \infty$  bei  $r \rightarrow \infty$  eine Lösung. Wir erhalten dann zu viele Eigenfunktionen und es ergeben sich Probleme mit Normierung. Erst die korrekt formulierten Randbedingungen machen aus einem Operator einen hermiteschen mit reellem Spektrum und einem als Basis verwendbaren Eigenfunktionensystem.

können wir die Lösungen zum *Laplace-Problem*  $\Delta\phi = 0$  schreiben als

$$\Delta = r^{-2}\partial_r r^2\partial_r - L^2/r^2, \quad (2.59)$$

$$\vartheta, \varphi : \begin{cases} -L^2 &= \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_\varphi^2, \\ L^2 Y_{lm} &= l(l+1)Y_{lm}, \end{cases}$$

$$r : \begin{cases} \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r R_l) &= l(l+1)R_l, \\ R_l &= a_l r^l + b_l r^{-l-1}, \end{cases}$$

$$\Delta\phi = 0 \rightarrow \varphi(r, \vartheta, \varphi) = \sum_{l,m} (a_{lm}r^l + b_{lm}r^{-(l+1)}) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.60)$$

### 2.5.2 Anwendungen

Darstellung von  $g(\vec{r}, \vec{r}') = 1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  in Kugelkoordinaten: es ist  $\Delta_{\vec{r}}g(\vec{r}, \vec{r}') = 0$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{r}'\}$ , also ist  $g(\vec{r}, \vec{r}')$  darstellbar durch (2.60). Wir analysieren zuerst den  $m = 0$  symmetrischen Fall mit  $\vec{r}'$  auf der  $z$ -Achse, vgl. Abb. 2.15. Wir schreiben die Entwicklung (2.60) in der Form ( $Y_{l0} \propto P_l$ )

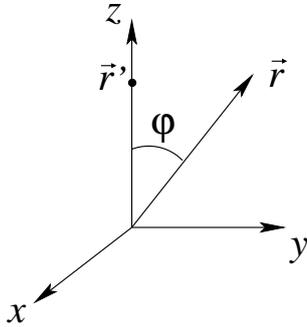


Abb. 2.15: Zur Berechnung der Green-Funktion in Kugelkoordinaten; Lage von  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  und  $\hat{z}$  für den symmetrischen Fall  $m = 0$  mit  $\vec{r}'$  auf der Achse.

$$g(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}) P_l(\cos\vartheta)$$

und schränken das Argument ebenfalls auf die  $z$ -Achse ein,  $\vec{r} \parallel \hat{z}$ , so dass  $\cos\vartheta = 1$ ,

$$g(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}). \quad (2.61)$$

Andererseits können wir für  $\vec{r} \parallel \vec{r}' \parallel \hat{z}$  die Funktion  $g(\vec{r})$  entwickeln,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r^>} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r^<}{r^>}\right)^l, \quad (2.62)$$

wobei  $r^> = \max(\vec{r}, \vec{r}')$ ,  $r^< = \min(\vec{r}, \vec{r}')$ . Der Vergleich von (2.61) und (2.62) liefert uns die Koeffizienten  $a_l$  und  $b_l$  und wir erhalten das Resultat

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(r^<)^l}{(r^>)^{l+1}} P_l(\cos \vartheta). \quad (2.63)$$

In einem nächsten Schritt betrachten wir beliebige Positionen  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$ . Die Lösung des Problem beruht auf dem *Additionstheorem für sphärisch Harmonische*<sup>7</sup>, vgl. Abb. 2.16

$$P_l(\cos \vartheta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (2.64)$$

mit

$$\cos \vartheta = \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'r} = \cos \vartheta \cos \vartheta' + \sin \vartheta \sin \vartheta' \cos(\varphi - \varphi').$$

Ersetzen wir in (2.63) mit Hilfe des Additionstheorems (2.64) die Legendrefunktion  $P_l$  des Zwischenwinkels durch die Kugelfunktionen der Argumente  $\vec{r}$  und  $\vec{r}'$  so erhalten wir das Schlussresultat

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{(r^<)^l}{(r^>)^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (2.65)$$

<sup>7</sup>Der Beweis wird am einfachsten unter Verwendung von Argumenten aus der Theorie der Drehgruppe geführt: aus dieser folgt dass sich sphärische Harmonische unter Drehungen gemäss

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\vartheta', \varphi') &= U_{\vec{\omega}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \\ &= \sum_s D_{sm}^l(\vec{\omega}) Y_{ls}(\vartheta, \varphi), \end{aligned}$$

transformieren, wobei die Matrizen  $D^l(\vec{\omega})$  eine  $2l+1$ -dimensionale Darstellung der Drehung  $U_{\vec{\omega}}$  ergeben. Der Operator  $U_{\vec{\omega}}$  wirkt auf Funktionen auf der Kugel und dreht deren Argumente von  $(\vartheta, \varphi)$  nach  $(\vartheta', \varphi')$ . Die Drehmatrizen sind unitär,

$$[D^l(\vec{\omega})]_{ij}^\dagger = [D^l(\vec{\omega})]_{ji}^* = [D^l(-\vec{\omega})]_{[ij]}. \quad D^l(\vec{\omega}) D^l(-\vec{\omega}) = 1.$$

Der Ausdruck

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

ist invariant unter Drehungen und hängt somit nur vom Zwischenwinkel  $\theta = \angle[(\vartheta', \varphi'); (\vartheta, \varphi)]$  ab, also ist

$$\sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = c_l P_l(\cos \theta).$$

Die Konstante  $c_l = 4\pi/(2l+1)$  ergibt sich aus der Integration obiger Gleichung für  $\vartheta' = \vartheta$ ,  $\varphi' = \varphi$  über die Einheitskugel.

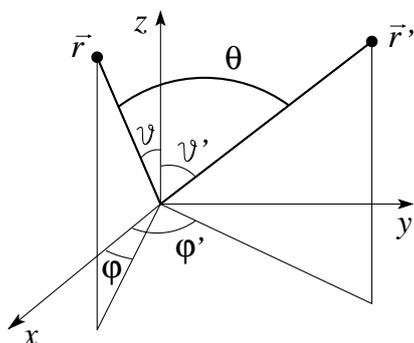


Abb. 2.16: Lage von  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}'$  und Definition der Winkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$  zu  $\vec{r}'$  und  $\vartheta'$ ,  $\varphi'$  zu  $\vec{r}$ , sowie dem Zwischenwinkel  $\theta$ .

Weiter folgt aus dem Additionstheorem für  $\theta = 0$ ,  $P_l(1) = 1$ ,  $\vartheta' = \vartheta$  und  $\varphi' = \varphi$  die Beziehung

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\vartheta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi}. \quad (2.66)$$

### 2.5.3 Physikalische Anwendungen

#### Kapazitive Hemisphären

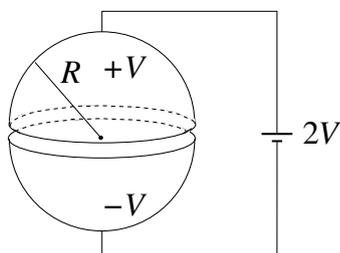


Abb. 2.17: Anordnung der zwei Hemisphären

Das Problem hat azimutale Symmetrie, also können wir uns auf  $m = 0$  beschränken. Im Ansatz

$$\varphi(r, \vartheta) = \sum_l [a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}] \cdot P_l(\cos \vartheta).$$

erwarten wir, dass  $\varphi$  regulär in 0 ist also gilt  $b_l = 0$  im Inneraum. Die Koeffizienten  $a_l$  folgen aus der Randbedingung bei  $R$ ,  $\varphi = \pm V$ , also ist

$$a_l = \frac{2l+1}{2R^l} V \left[ \underbrace{\int_0^1 dz P_l(z)}_{\varphi=V \text{ auf } 0 \leq \vartheta \leq \pi/2} - \underbrace{\int_{-1}^0 dz P_l(z)}_{\varphi=-V \text{ auf } \pi/2 \leq \vartheta \leq \pi} \right]. \quad (2.67)$$

Mit  $l$  ungerade und (2.47) folgt

$$\varphi(r < R, \vartheta) = V \left[ \frac{3}{2} \frac{r}{R} P_1(\cos \vartheta) - \frac{7}{8} \left( \frac{r}{R} \right)^3 P_3(\cos \vartheta) + \dots \right]. \quad (2.68)$$

Für  $\varphi(r > R)$  verlangen wir  $\varphi \rightarrow 0$  im Unendlichen und daher

$$a_l = 0, \quad \left(\frac{r}{R}\right)^l \rightarrow \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1}. \quad (2.69)$$

### Geladener Ring

Zur Lösung dieses Problem nutzen wir einen einfachen Trick für azimuthal symmetrische ( $m = 0$ ) Probleme: Die gesuchte Funktion  $\varphi$  ist eindeutig, also können wir  $\varphi$  erst auf der Achse evaluieren,

$$\varphi(r, 0) = \sum_l [a_l r^l + b_l r^{-(l+1)}] \quad (2.70)$$

und  $a_l, b_l$  finden. Das Resultat in einer Position weg von der Achse erhält man durch Multiplikation jedes Termes mit  $P_l(\cos \vartheta)$ .

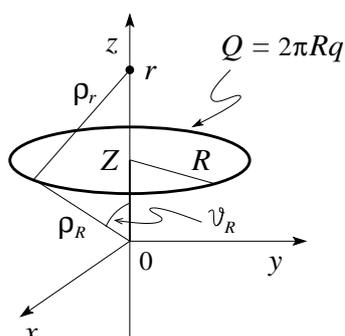


Abb. 2.18: Geometrie und Kenngrößen zum Problem des geladenen Rings: Radius  $R$ , Position symmetrisch in der Höhe  $z = Z$ , Ladung  $Q = 2\pi Rq$ , Linienladung  $q$ .

Wir betrachten den Punkt  $\vec{r} = (0, 0, r)$  auf der Achse; der Abstand vom Ring zum Ursprung beträgt  $\rho_R = \sqrt{Z^2 + R^2}$ , der Abstand  $\rho_r$  zum Ring ist durch den cosinus Satz gegeben,  $\rho_r^2 = r^2 + \rho_R^2 - 2\rho_R r \cos \vartheta_R$  mit  $\vartheta_R = \arctan(R/Z)$ . Dann ist das Potential auf der Achse gegeben durch  $Q/\rho_r$ ,

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{Q}{(r^2 + \rho_R^2 - 2\rho_R r \cos \vartheta_R)^{1/2}} \\ &= Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \vartheta_R), \end{aligned}$$

wo wir in der letzten Gleichung das Resultat (2.63) benutzt haben, wobei  $r_{<} = \min(r, \rho_R)$ ,  $r_{>} = \max(r, \rho_R)$ . Das Resultat weg von der Achse erhält man dann in der Form

$$\varphi(r, \vartheta) = Q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} P_l(\cos \vartheta_R) P_l(\cos \vartheta). \quad (2.71)$$

### Geerdete Spitze

Wir betrachten eine metallische geerdete Spitze mit dem Öffnungswinkel  $\pi - \theta$ , dem Winkel  $\theta$  zur  $z$ -Achse, vgl. Abb. 2.19. Zu lösen ist das Problem  $\Delta\varphi = 0$ , im Bereich  $\vartheta < \theta$  mit der Randbedingung  $\varphi(\vartheta = \theta) = 0$ . Wir erwarten,

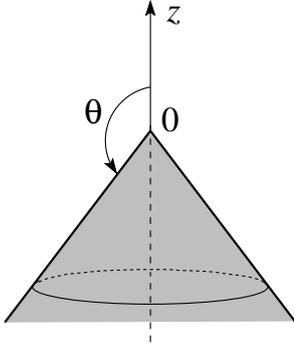


Abb. 2.19: Geerdete Spitze mit Öffnungswinkel  $\pi - \theta$ ; der Winkel  $\theta$  zur  $z$ -Achse definiert den physikalisch zugänglichen Bereich.

dass  $\varphi$  regulär ist für  $\vartheta < \theta$ ; für  $\vartheta > \theta$  darf  $\varphi$  singulär werden ( $\vartheta > \theta$  gehört nicht zum physikalischen Raum). Wir behandeln das Winkelproblem in der neuen Variablen  $\xi = (1 - \cos \vartheta)/2$  so dass das Winkelproblem regulär um  $\xi \approx 0$  ist. Das Laplace-Problem separiert mit

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) R &= \nu(\nu + 1)R \rightarrow R = a_\nu r^\nu + b_\nu r^{-(\nu+1)}, \\ \partial_\xi [\xi(1 - \xi) \partial_\xi P] &= -\nu(\nu + 1)P, \quad \text{vgl. (2.44)}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Lösungen zu (2.72) sind die Legendre-Funktionen erster Art (Ordnung  $\nu$ ),

$$P_\nu(\xi) = 1 + \frac{(-\nu)(\nu + 1)}{1!1!} \xi + \frac{(-\nu)(-\nu + 1)(\nu + 1)(\nu + 2)}{2!2!} \xi^2 + \dots,$$

welche sich auch als *hypergeometrische Funktionen* darstellen lassen (wir gehen zur Variablen  $z = \cos \vartheta$  über)

$$\begin{aligned} P_\nu(z) &= {}_2F_1(-\nu, \nu + 1; 1; \frac{1 - z}{2}), \quad (2.73) \\ {}_2F_1(a, b; c; x) &= 1 + \frac{ab}{c} \frac{x}{1!} + \frac{a(a + 1)b(b + 1)}{c(c + 1)} \frac{x^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist  $P_\nu(z)$  regulär bei  $\vartheta = 0$  und singulär bei  $\vartheta = \pi$ , es sei denn  $\nu = l =$  ganzzahlig: dann ist  $P_\nu = P_l$ , das alte Legendrepolynom, welches überall (inklusive  $\vartheta = \pi$ ) regulär ist. Die Randbedingung  $\varphi(\vartheta = \theta) = 0$  lässt sich erfüllen indem nur Funktionen  $P_\nu(z)$  zugelassen werden für die die Bedingung  $P_\nu(\cos \theta) = 0$  erfüllt wird; entsprechend müssen wir die Nullstellen von  $P_\nu(z)$  untersuchen. Wir erwarten aus Stetigkeitsgründen  $[\nu]$  Nullstellen für  $P_\nu$ :  $\nu < 1$ : eine Nullstelle, welche bei  $\vartheta \approx \pi$  reinkommt und bei  $\nu = 1$  bei  $\vartheta = \pi/2$  liegt.  $\nu \rightarrow \infty$ : Viele Nullstellen, wobei die erste

Nullstelle gegen  $\vartheta \approx 0$  strebt, vgl. Abb. 2.20. Wir definieren die erlaubten  $\nu$ -Werte durch

$$P_{\nu_n}(\cos \theta) = 0, \quad \nu_1 < \nu_2 < \dots, \quad (2.74)$$

Der kleinste Wert  $\nu_1$  gehört zur ersten Nullstelle und determiniert das Verhalten des elektrischen Feldes an der Spitze,

$$\begin{aligned} E_r &= -\partial_r \varphi = -\nu a_\nu r^{\nu-1} P_\nu(\cos \vartheta), \\ E_\vartheta &= -\frac{1}{r} \partial_\vartheta \varphi = a_\nu r^{\nu-1} \sin \vartheta P'_\nu(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (2.75)$$

Die erste Nullstelle von  $P_\nu(\cos \vartheta)$  verhält sich gemäss

$$\begin{aligned} \nu_1 \rightarrow 0: \quad P_\nu(\cos \vartheta) = 0 \quad \text{für} \quad \theta = \pi - 2 \exp(-1/2\nu_1), \\ \nu_1 \rightarrow \infty: \quad P_\nu(\cos \theta) = 0 \quad \text{für} \quad \theta = \frac{2.405}{\nu_1 + 1/2}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Für eine Spitze mit  $\theta > \pi/2$  ist  $\nu_1 < 1$  und das elektrische Feld divergiert

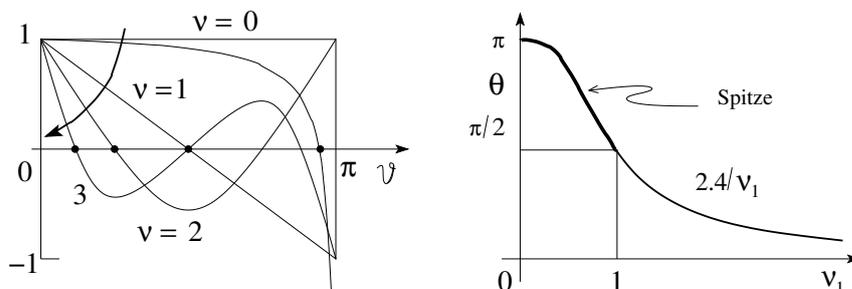


Abb. 2.20: Links: Nullstellen von  $P_\nu(\cos \theta)$ . Rechts: Erste Nullstelle  $\nu_1$  als Funktion des Kegelwinkels  $\theta$ .

gemäss

$$E \propto r^{\nu_1-1} \quad \text{mit} \quad \nu_1 = \frac{1}{2 \ln[2/(\pi - \theta)]}. \quad (2.77)$$

Offensichtlich sind spitze Leiter gute Blitzableiter, da sich an ihnen der Blitz wegen der Feldüberhöhung gut entzünden kann (Durchbruchfeldstärke von Luft  $\sim 10^4 - 10^5$  V/cm).

## 2.6 Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten sind in Abb. 2.21 definiert. indexKoordinaten!Zylinder Aus der Definition der Koordinatentransformation alt  $\rightarrow$  neu findet man die Quadrate der Längen,

$$\begin{aligned} h_\varphi^2 &= (\partial_\varphi x)^2 + (\partial_\varphi y)^2 + (\partial_\varphi z)^2 = \rho^2, \\ h_z^2 &= 1, \\ h_\rho^2 &= 1, \end{aligned} \quad (2.78)$$

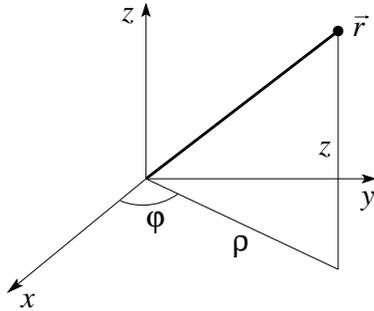


Abb. 2.21: Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\vartheta$ ,  $\varphi$ : Die alten Koordinaten ausgedrückt durch die neuen sind:  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ .

und die Operatoren grad, rot, und Laplace haben die Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\Psi &= (\partial_\rho\Psi, \frac{1}{\rho}\partial_\varphi\Psi, \partial_z\Psi), \\ \vec{\nabla}\times\vec{a} &= \left(\left(\frac{1}{\rho}\partial_\varphi a_z - \partial_z a_\varphi\right), (\partial_z a_\rho - \partial_\rho a_z), \frac{1}{\rho}(\partial_\rho(\rho a_\varphi) - \partial_\varphi a_\rho)\right) \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{a} &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\varphi a_\varphi + \partial_z a_z, \\ \nabla^2\Psi &= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\Psi) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\varphi^2\Psi + \partial_z^2\Psi.\end{aligned}$$

Wiederum lässt sich der radiale Teil umschreiben, diesmal auf (beachte, dass  $d = 2$  da die  $z$ -Achse nicht zählt)

$$\frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\Psi) = \partial_\rho^2\Psi + \underbrace{1/\rho}_{(d-1)/\rho}\partial_\rho\Psi.$$

### 2.6.1 Lösungen des Laplace-Problems $\Delta\varphi(\vec{r}) = 0$

Mit dem Separationsansatz

$$\varphi(\vec{r}) = R(\rho)\chi(\varphi)Z(z)$$

erhalten wir die drei Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\partial_\varphi^2\chi &= -\nu^2\chi \rightarrow \chi = \exp(i\nu\varphi), \\ \partial_z^2Z &= k^2Z \rightarrow Z = \exp(kz), \\ \partial_\rho^2R + \frac{1}{\rho}\partial_\rho R &= \left(-k^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R \rightarrow ?.\end{aligned}\tag{2.79}$$

Die Azimutalfunktion  $\chi$  ist eindeutig und legt damit die Werte  $\nu \in \mathbb{Z}$ ,  $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  fest. Der  $k \in \mathbb{R}$ -Wert für die  $z$ -Funktion ist beliebig, wir wählen  $\pm k$ ,  $k \in \mathbb{R}_+$ . Schliesslich müssen wir das Eigenwertproblem (2.79) für  $R(\rho)$

lösen. Wir wechseln zur dimensionslosen Variablen  $x = k\rho > 0$  und erhalten die *Besselgleichung*

$$\partial_x^2 R + \frac{1}{x} \partial_x R + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0. \quad (2.80)$$

Mit dem Ansatz

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$$

erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm\nu, \\ \frac{a_{2j}}{a_{2j-2}} &= -\frac{1}{4j(j+\alpha)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad a_{2j+1} = 0. \end{aligned}$$

Die Iteration dieser Gleichungen ergibt

$$a_{2j} = (-1)^j \frac{1}{2^{2j} j!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+\alpha+1)} a_0,$$

und mit  $a_0 = 1/2^\alpha \Gamma(\alpha+1)$  ergeben sich die Lösungen

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}, \\ J_{-\nu} &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j}, \end{aligned} \quad (2.81)$$

die Besselfunktionen erster Art der Ordnung  $\pm\nu$ . Für  $\nu \neq$  ganz geben  $J_\nu, J_{-\nu}$  ein Paar von linear unabhängigen Lösungen zur Bessel-Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.80). Für  $\nu = m$  ganz sind  $J_m$  und  $J_{-m}$  linear abhängig,

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x). \quad (2.82)$$

Um eine zweite, linear unabhängige Lösung zu erhalten, wenden wir den folgenden Trick an: Wir definieren die Neumann-Funktion (= Besselfunktion zweiter Art)

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}. \quad (2.83)$$

Für  $\nu \neq$  ganz bilden  $N_\nu$  und  $J_\nu$  wiederum ein linear unabhängiges Lösungspaar von (2.80). Diese Eigenschaft bleibt auch im Limes  $\nu \rightarrow m, m \in \mathbb{N}$  erhalten, d.h.  $N_m$  ist von  $J_m$  linear unabhängig ( $N_m$  involviert  $\ln x$ ). Die Linearkombinationen

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iN_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iN_\nu(x), \end{aligned} \quad (2.84)$$

definieren die Bessel-Funktionen dritter Art, auch Hankel-Funktionen genannt. Es gelten die Rekursionsbeziehungen  $(J, N, H^{(1)}, H^{(2)} \rightarrow \Omega)$

$$\begin{aligned}\Omega_{\nu+1}(x) &= \frac{2\nu}{x}\Omega_\nu(x) - \Omega_{\nu-1}(x), \\ \Omega_{\nu+1}(x) &= -2\partial_x\Omega_\nu(x) + \Omega_{\nu-1}(x).\end{aligned}\quad (2.85)$$

Man findet die Grenzwerte  $(\nu \in \mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned}J_\nu(x \rightarrow 0) &\approx (x/2)^\nu/\Gamma(\nu+1), \\ N_\nu(x \rightarrow 0) &\approx (2/\pi)[\ln x/2 + C], \quad \nu = 0, \\ &\approx -(\Gamma(\nu)/\pi)(2/x)^\nu, \quad \nu \neq 0, \\ J_\nu(x \rightarrow \infty) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos(x - \nu\pi/2 - \pi/4), \\ N_\nu(x \rightarrow \infty) &\approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \nu\pi/2 - \pi/4).\end{aligned}\quad (2.86)$$

$C = 0.5772\dots$  ist die Eulersche Konstante,

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \ln n);$$

der Übergang von kleinen zu grossen  $x$  erfolgt bei  $x \approx \nu$ . Weiter hat jede Besselfunktion  $J_\nu, N_\nu$  unendlich viele Nullstellen  $J_\nu(x_{\nu n}), N_\nu(x_{\nu n}) = 0$ , z.B.

$$\begin{aligned}x_{0n} &= 2.405, 5.520, 8.654, \dots, (n - 1/4)\pi, \\ x_{1n} &= 3.832, 7.016, 10.173, \dots, (n + 1/4)\pi, \\ x_{2n} &= 5.136, 8.417, 11.620, \dots, (n + 3/4)\pi, \dots\end{aligned}\quad (2.87)$$

Die Nullstellen sind zentral für die Definition der Fourier-Bessel-Reihe.

### 2.6.2 Fourier-Bessel-Reihe

Mit dem Eigenwert  $\nu$  können wir die Winkelfunktionen abdecken. Wie erhalten wir ein Funktionensystem in radialer Richtung? Gegeben  $\nu$  haben wir immer noch den Parameter  $k$  frei. Betrachte das Intervall  $\rho \in [0, R]$  mit Dirichlet-Randbedingungen. Mit  $k_{\nu n} = x_{\nu n}/R$ ,  $J_\nu(x_{\nu n}) = 0$ , bilden die Funktionen

$$\frac{1}{R} \frac{\sqrt{2\rho}}{J_{\nu+1}(x_{\nu n})} J_\nu(k_{\nu n}\rho) \quad (2.88)$$

eine Basis auf  $\mathbb{L}_2([0, R])$ .<sup>8</sup> Die Fourier-Bessel Reihe<sup>9</sup> erlaubt dann die Entwicklung jeder Funktion  $f(\rho) \in \mathbb{L}_2([0, R])$  in eine Reihe von Besselfunktionen  $J_\nu(k_{\nu n}\rho)$

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu n} J_\nu(k_{\nu n}\rho), \quad (2.89)$$

$$a_{\nu n} = \frac{2}{R^2 J_{\nu+1}^2(x_{\nu n})} \int_0^R d\rho \rho f(\rho) J_\nu(k_{\nu n}\rho).$$

Für  $R \rightarrow \infty$  geht  $k_{\nu n} \rightarrow k \in \mathbb{R}^+$ ; Orthogonalität und Vollständigkeit drücken sich dann in den Beziehungen

$$\begin{aligned} \text{Orthogonalität:} \quad & \int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k} \delta(k - k'), \\ \text{Vollständigkeitsbedingung:} \quad & \int_0^\infty dk k J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \end{aligned} \quad (2.90)$$

aus.

---

<sup>8</sup> Orthogonalität

Multipliziere die Gleichung

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho J_\nu(k_{\nu n}\rho)) + (k_{\nu n}^2 - \nu^2/\rho^2) J_\nu(k_{\nu n}\rho) = 0,$$

mit  $\rho J_\nu(k_{\nu n'}\rho)$ , integriere  $\int_0^R d\rho$ , und finde nach partieller Integration, dass

$$\int_0^R d\rho \rho [\partial_\rho J_\nu(k_{\nu n'}\rho)] [\partial_\rho J_\nu(k_{\nu n}\rho)] = \int_0^R d\rho (k_{\nu n}^2 - \nu^2/\rho^2) \rho J_\nu(k_{\nu n'}\rho) J_\nu(k_{\nu n}\rho).$$

Vertauschen von  $n$  und  $n'$  vertauschen und Subtraktion ergibt

$$(x_{\nu n}^2 - x_{\nu n'}^2) \int_0^R d\rho \rho J_\nu(k_{\nu n'}\rho) J_\nu(k_{\nu n}\rho) = 0$$

*Normierung* Aus den Rekursionsformeln (2.85) folgt

$$\int_0^R d\rho \rho J_\nu(k_{\nu n'}\rho) J_\nu(k_{\nu n}\rho) = \frac{R^2}{2} J_{\nu+1}^2(x_{\nu n}) = \delta_{nn'}.$$

Die *Vollständigkeit* akzeptieren wir als gegeben.

<sup>9</sup>Eine alternative Reihe ergibt sich für das Neumannproblem  $k_{\nu n} = x_{\nu n}/R \rightarrow k'_{\nu n} = x'_{\nu n}/R$  mit  $\partial_x J_\nu|_{x'_{\nu n}} = 0$ ; alternative Entwicklungen der folgenden Art sind bekannt als

$$\begin{aligned} \text{Neumann-Reihen:} \quad & \sum_n a_n J_{\nu+n}(x), \\ \text{Kapteyn-Reihen:} \quad & \sum_n a_n J_{\nu+n}((\nu+n)x), \\ \text{Schlömlich-Reihen:} \quad & \sum_n a_n J_\nu(nx). \end{aligned}$$

### 2.6.3 Modifizierte Besselfunktionen

Um die modifizierten Besselfunktionen zu finden ersetzen wir in (2.79) die Diffgleichung  $\partial_z^2 Z = k^2 Z$  durch

$$\partial_z^2 Z = -k^2 Z \quad \rightarrow \quad Z = \exp(\pm ikz), \quad k \geq 0;$$

damit wird der Charakter der Lösung entlang  $z$  von gedämpft zu oszillierend verändert. Entsprechend ändert sich der Charakter der radialen Funktionen von oszillierend zu gedämpft: Die Differenzialgleichung

$$\partial_\rho^2 R + \frac{1}{\rho} \partial_\rho R = (k^2 + \nu^2/\rho^2) R \quad (2.91)$$

$$\rightarrow \partial_x^2 R + \frac{1}{x} \partial_x R - (1 + \nu^2/x^2) R = 0, \quad (x = k\rho).$$

hat als Lösungen die modifizierten Bessel-Funktionen

$$\begin{aligned} I_\nu(x) &= i^{-\nu} J_\nu(ix), \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix); \end{aligned}$$

sie sind linear unabhängig und reell für  $\nu, x$  reell. Grenzwerte sind

$$I_\nu(x \rightarrow 0) \approx \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu, \quad (2.92)$$

$$K_\nu(x \rightarrow 0) \approx \begin{cases} -\ln(x/2) - C + \dots, & \nu = 0, \\ (\Gamma(\nu)/2)(2/x)^\nu, & \nu \neq 0. \end{cases}$$

$$I_\nu(x \rightarrow \infty) \approx \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} + \dots, \quad (2.93)$$

$$K_\nu(x \rightarrow \infty) \approx \sqrt{\pi/2x} \exp(-x) + \dots$$

### 2.6.4 Sphärische Besselfunktionen

Betrachte die Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2) \phi = 0$$

in sphärischen  $(r, \vartheta, \varphi)$  Koordinaten. Mit dem Ansatz (beachte den Ansatz  $\propto 1/\sqrt{R}$  anstelle von  $1/r$ ; damit reduzieren wir die Dimensionalität des Radialoperators auf zwei statt auf einer Dimension)

$$\phi = \frac{u_l(r)}{\sqrt{r}} Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

ergibt sich für das Radialproblem die Gleichung

$$\partial_r^2 u_l + \frac{1}{r} \partial_r u_l + \left( k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right) u_l = 0$$

und mit  $x = kr$

$$\partial_x^2 u_l + \frac{1}{x} \partial_x u_l + \left( 1 - \frac{(l+1/2)^2}{x^2} \right) u_l = 0,$$

die Besselgleichung mit  $\nu = l + 1/2$ . Lösungen sind die halbzahligen Besselfunktionen

$$J_{l+1/2}(kr) \quad \text{und} \quad N_{l+1/2}(kr),$$

aus denen man die sphärischen Besselfunktionen als Lösungen des radialen Helmholtzproblems erhält,

$$\begin{aligned} j_l(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr), \\ n_l(kr) &= \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} N_{l+1/2}(kr), \\ h_l^{(1,2)}(kr) &= j_l(kr) \pm i n_l(kr). \end{aligned} \tag{2.94}$$

Grenzwerte sind

$$\begin{aligned} j_l(x \rightarrow 0) &\rightarrow \frac{x^l}{(2l+1)!!} \left( 1 - \frac{x^2}{2(2l+3)} + \dots \right), \\ n_l(x \rightarrow 0) &\rightarrow -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}} \left( 1 - \frac{x^2}{2(1-2l)} + \dots \right), \\ j_l(x \rightarrow \infty) &\rightarrow \frac{1}{x} \sin(x - \pi l/2), \\ n_l(x \rightarrow \infty) &\rightarrow -\frac{1}{x} \cos(x - \pi l/2), \\ h_l^{(1)}(x \rightarrow \infty) &\rightarrow (-i)^{l+1} \frac{\exp(ix)}{x} \quad (\text{Kugelwelle}). \end{aligned}$$

Dabei ist  $(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$ . Es gelten die Rekursionen ( $\mathcal{Z}_l = j_l, n_l, h_l^{1,2}$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{l+1}(x) &= \frac{2l+1}{x} \mathcal{Z}_l(x) - \mathcal{Z}_{l-1}(x), \\ \mathcal{Z}_{l+1}(x) &= -\frac{2l+1}{l+1} \partial_x \mathcal{Z}_l(x) + \frac{l}{l+1} \mathcal{Z}_{l-1}(x). \end{aligned}$$

Die sphärischen Besselfunktionen lassen sich durch trigonometrische Funktionen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}, \\
 j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \\
 j_2(x) &= \left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \sin x - \frac{3 \cos x}{x^2}, \\
 n_0(x) &= -\frac{\cos x}{x}, \\
 n_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}, \\
 n_2(x) &= -\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right) \cos x - \frac{3 \sin x}{x^2}.
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

### 2.6.5 Anwendungen

Ähnlich zum Boxproblem im Abschnitt 2.3 lösen wir hier das Laplace-Problem  $\Delta\phi = 0$  für einen Zylinder, vgl. Abb. 2.22 Mit

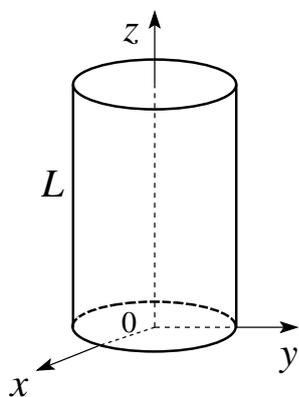


Abb. 2.22: Laplace Problem mit Zylindergeometrie; die Randbedingungen sind  $\phi(\rho = R) = 0$ ,  $\phi(z = 0) = 0$ ,  $\phi(z = L) = \phi_L(\rho, \varphi)$ .

$$\begin{aligned}
 \chi(\varphi) &= A \sin m\varphi + B \cos m\varphi, \\
 Z(z) &= \sinh kz, \\
 R(\rho) &= C J_m(k\rho) + D N_m(k\rho),
 \end{aligned}$$

und den Bedingungen  $\phi$  regulär in  $\rho = 0 \rightarrow D = 0$ ,  $\phi(\rho = R) = 0 \rightarrow k = k_{mn} = x_{mn}/R$ , erhalten wir den Lösungsansatz

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \sum_{m,n} J_m(k_{mn}\rho) \sinh(k_{mn}z) [A_{mn} \sin m\varphi + B_{mn} \cos m\varphi]. \tag{2.96}$$

Die Randbedingung  $\phi(\rho, \varphi, L) = \phi_L(\rho, \varphi)$  legt die Koeffizienten  $A_{mn}$  und  $B_{mn}$  fest,<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \frac{A_{mn}}{B_{mn}} &= \frac{2}{\pi R^2 J_{m+1}^2(k_{mn}R) \sinh(k_{mn}L)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R d\rho \rho \phi_L(\rho, \varphi) \\ &\times J_m(k_{mn}\rho) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich wieder durch Superposition (ersetze  $\phi_0(\rho, \varphi) \rightarrow \sinh(k(L-z))$ , sonst gleich;  $\phi_R(\varphi, z)$ , siehe Übungen.) Beispiele zu weiteren Koordinaten findet man in den Büchern von Abramowitz-Stegun und von Morse-Feshbach.

## 2.7 Green'sche Funktionen

### 2.7.1 Kugelschale $a < r < b$

Wir suchen die Greenfunktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  für das Dirichletproblem in der Kugelschale,

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') &= -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}'), \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= 0 \text{ auf dem Rand } r = a, b. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Wir gehen zu Kugelkoordinaten über,

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \underbrace{\delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta')}_{(2.56) \rightarrow \sum_{m,l} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}, \quad (2.99)$$

und spalten den Winkelanteil in  $G$  ab um die radiale Differentialgleichung zu bekommen,

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l g_l(r, r') Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \\ \frac{1}{r} \partial_r^2 (r g_l(r, r')) - \frac{l(l+1)}{r^2} g_l(r, r') &= -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Lösungen für  $g_l$  setzen sich aus  $r^l$  und  $r^{-(l+1)}$  zusammen; allerdings besagt die  $\delta$ -Funktion, dass  $r g_l$  bei  $r'$  einen Knick hat,

$$\int_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} dr r \text{ (2.100) } |_{\epsilon \rightarrow 0} : \quad \partial_r (r g_l) |_{r'-\epsilon}^{r'+\epsilon} = -4\pi / r'. \quad (2.101)$$

<sup>10</sup>Für  $m = 0$  benutze man  $B_{0n}/2$  in (2.96)

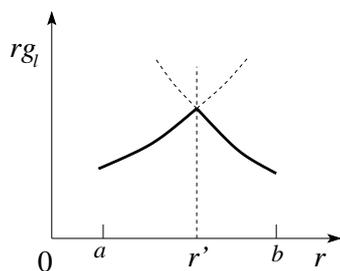


Abb. 2.23: Knick von  $rg_l$  bei  $r'$

Die Stärke des Knicks ist gerade durch  $4\pi/r'$  gegeben. Wir setzen für  $g_l$  deshalb zwei verschiedene Ausdrücke an,

$$g_l(r, r') = \begin{cases} Ar^l + A'r^{-(l+1)}, & a \leq r < r', \\ Br^l + B'r^{-(l+1)}, & r' < r \leq b. \end{cases}$$

$g_l$  soll bei  $r = a, b$  verschwinden:

$$g_l(r, r') = \begin{cases} A(r^l - a^{2l+1}/r^{l+1}), & a \leq r < r', \\ B'(1/r^{l+1} - r^l/b^{2l+1}), & r' < r \leq b. \end{cases}$$

$g_l$  soll in  $r$  und  $r'$  symmetrisch sein:

$$g_l(r, r') = C \left( r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right).$$

$g_l$  soll (2.101) erfüllen. Daraus findet man nach einigen Rechnungen

$$C = \frac{4\pi}{(2l+1)(1 - (a/b)^{2l+1})}.$$

Damit lautet das Schlussresultat:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{(2l+1)[1 - (a/b)^{2l+1}]} \cdot \left( r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{<}^{l+1}} \right) \left( \frac{1}{r_{>}^{l+1}} - \frac{r_{>}^l}{b^{2l+1}} \right). \quad (2.102)$$

Untersuche die Limites  $a \rightarrow 0$  und/oder  $b \rightarrow \infty$ . Hält (2.102) den Checks stand? (benutze (2.7), (2.8) und (2.65))

### 2.7.2 Zylinderschale $a < \rho < b$

Es wird gleich verfahren wie bei der Kugelschale; relevante Gleichungen bei der Lösung des Problems sind

$$\begin{aligned}\delta(z - z') &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \cos[k(z - z')], \\ \delta(\varphi - \varphi') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp(im(\varphi - \varphi')), \\ G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{1}{2\pi^2} \sum_m \int dk \exp(im(\varphi - \varphi')) \cos[k(z - z')] g_m(\rho, \rho')\end{aligned}\tag{2.103}$$

$$\frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho \partial_\rho g_m) - (k^2 + m^2/\rho^2) g_m = -\frac{4\pi}{\rho} \delta(\rho - \rho'),$$

$g_m$  ergibt sich als Linearkombination von  $I_m$  und  $K_m$  (siehe (2.91)).

### 2.7.3 Entwicklung in Eigenfunktionen

Betrachte die (elliptische) Differentialgleichung für ein reelles 'Potential  $V$ ,

$$\begin{aligned}[\Delta + V(\vec{r}') + \lambda]\Psi(\vec{r}') &= 0 \\ \text{und RB an } \Psi(\vec{r}).\end{aligned}\tag{2.104}$$

(2.104) hat üblicherweise Lösungen, welche irgendwo problematisch / singular werden. Regularität, Eindeutigkeit und Randbedingungen sind nur gewährleistet, wenn  $\lambda$  gewisse Werte annimmt. Dann wird (2.104) zu einem Eigenwertproblem mit den Eigenwerten  $\lambda_n$  und den Eigenvektoren  $\Psi_n$ .

$$\begin{aligned}\text{z.B. (2.44), } & \chi \text{ eindeutig} \rightarrow m \in \mathbb{Z}, \\ \text{(2.45), } & P_l \text{ regulär} \rightarrow l = 0, 1, 2, \dots, \\ \text{vgl. (2.72), } & P_\nu \text{ singular bei } \vartheta = \pi \rightarrow \text{alle } \nu, \\ \text{(2.91), } & \exp(ikz) \text{ nicht normierbar.}\end{aligned}$$

Regularität, Eindeutigkeit und Randbedingungen legen üblicherweise einen Funktionenraum fest mit einer Basis  $\{\Psi_n\}$ ,

$$\begin{aligned}\text{orthonormiert: } & \int d^3r \Psi_m^*(\vec{r}) \Psi_n(\vec{r}) = \delta_{nm}, \\ \text{vollständig: } & \sum_n \Psi_n^*(\vec{r}) \Psi_n(\vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}').\end{aligned}\tag{2.105}$$

Wir suchen eine Greensche Funktion  $G(\vec{r}, \vec{r}')$ , so dass

$$[\Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) + \lambda]G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \text{ und RB erfüllt.}\tag{2.106}$$

Mit dem Ansatz

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \sum_n g_n(\vec{r}') \Psi_n(\vec{r})$$

erhalten wir

$$\sum_m g_m(\vec{r}') (\lambda - \lambda_m) \Psi_m(\vec{r}) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}').$$

Multiplikation mit  $\Psi_n^*(\vec{r})$  und Integration  $\int d^3r \dots$  der Gleichung ergibt

$$g_n(\vec{r}') = 4\pi \frac{\Psi_n^*(\vec{r}')}{\lambda_n - \lambda},$$

Damit finden wir sofort den Ausdruck

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \sum_n \frac{\Psi_n^*(\vec{r}') \Psi_n(\vec{r})}{\lambda_n - \lambda} \quad (2.107)$$

für die Greensche Funktion.

Als Beispiel betrachte man den einfachen Fall mit  $V = 0$ ,  $\lambda = 0$ ;  $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) / (2\pi)^{3/2}$ , ( $\lambda_n \rightarrow k^2$ ).

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\exp(i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}'))}{k^2} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.108)$$

Um die letzte Gleichheit zu zeigen, ersetze man  $k^2$  durch  $k^2 + \mu^2$  und nehme  $\mu \rightarrow 0$  am Schluss (man nennt  $\mu^2$  einen 'Massenterm').

## 2.8 Multipol-Entwicklung

Wir betrachten eine kompakte Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$  innerhalb der Kugel  $r < R$ . Durch Messungen im Aussenraum  $r > R$  wollen wir Rückschlüsse auf die Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  ziehen. Was können wir über  $\rho(\vec{r})$  aussagen?

Mit  $\Delta\phi = 0$  für  $r > R$  können wir  $\phi(\vec{r})$  nach den  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  entwickeln. Wir machen den Ansatz

$$\phi(r > R, \vartheta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+1}}. \quad (2.109)$$

Mit

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

erhalten wir durch Vergleich die Koeffizienten

$$q_{lm} = \int d^3 r' Y_{lm}^*(\vartheta', \varphi') r'^l \rho(\vec{r}'), \quad (2.110)$$

die *Multipol-Momente der Ladungsverteilung*  $\rho(\vec{r}')$ . Die  $q_{lm}$  filtern aus  $\rho(\vec{r}')$  jeweils denjenigen Anteil heraus, der die Form  $Y_{lm}$  besitzt und ein entsprechendes Potential erzeugt. Z.B. ist  $(q_{l,-m} = (-1)^m q_{l,m}^*)$

$$\begin{aligned} q_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int d^3 r' \rho(\vec{r}') = \frac{Q}{\sqrt{4\pi}}, \\ &\propto \text{Ladung } Q = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \text{ von } \rho, \\ q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3 r' (x' - iy') \rho(\vec{r}') = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y), \\ q_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3 r' z' \rho(\vec{r}') = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z, \\ &\propto \text{Dipolmoment } \vec{p} = \int d^3 r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') \text{ von } \rho. \\ q_{22} &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int d^3 r' (x' - iy')^2 \rho(\vec{r}') = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}), \\ q_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int d^3 r' z' (x' - iy') \rho(\vec{r}') = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}), \\ q_{20} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \int d^3 r' (3z'^2 - r'^2) \rho(\vec{r}') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} Q_{33}, \\ &\propto \text{Quadrupoltensor } Q_{ij} = \int d^3 r' (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}'). \end{aligned} \quad (2.111)$$

In *rechtwinkligen Koordinaten* ist

$$\phi(|\vec{r}| > R) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} Q_{ij} \frac{x_i x_j}{r^5} + \dots, \quad (2.112)$$

wie man durch Entwicklung von  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  in kartesischen Koordinaten leicht einsieht. Offensichtlich fallen die Signale der höheren Komponenten rasch ab;  $q_{lm}$  erzeugt ein Potential  $\propto 1/r^{l+1}$  und ein  $\vec{E}$ -Feld  $\propto 1/r^{l+2}$ ,

$$\begin{aligned} E_r &= 4\pi \frac{l+1}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+2}}, \\ E_\vartheta &= -4\pi \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{\partial_\vartheta Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{r^{l+2}}, \\ E_\varphi &= -4\pi \frac{1}{2l+1} q_{lm} \frac{im Y_{lm}(\vartheta, \varphi)}{\sin \vartheta r^{l+2}}. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Oft in Erscheinung tritt nebst dem Monopol- das Dipolfeld, vgl. Abb. 2.24

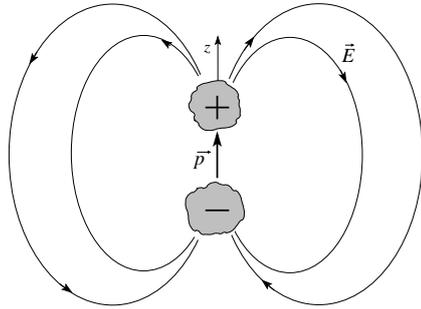


Abb. 2.24: Elektrisches Dipolfeld  $\vec{E}(\vec{r})$  zum Dipol  $\vec{p} \parallel \hat{z}$

$$E_r = \frac{2p \cos \vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p \sin \vartheta}{r^3}, \quad E_\varphi = 0. \quad (2.114)$$

Allgemeiner erzeugt ein Dipol  $\vec{p}$  bei  $\vec{r}_p$  in  $\vec{r}$  ein Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{3\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n})}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^3} \quad \vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_p}{|\vec{r} - \vec{r}_p|};$$

für  $\vec{r}_p = 0$  lässt sich einfach schreiben  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}/r^3)$ . Wenn  $\vec{r}$  sich  $\vec{r}_p$  nähert wird  $\vec{E}$  singular. Man zeigt, dass ein vollständigeres Resultat folgende Form hat:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{\frac{3\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}) - \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^3}}_{\int_V d^3r \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}_p|^3} \equiv 0} - \underbrace{\frac{4\pi}{3} \vec{p} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_p)}_{\int_V d^3r \vec{E}(\vec{r}) = -(4\pi/3)\vec{p}}, \quad (2.115)$$

wenn das Volumen  $V$  um  $\vec{r}_p$  gelegt wird; der erste Term verschwindet aufgrund der Symmetrie der Winkelintegration. Der zweite Term heisst Kontakt-Term. Mit dem Kontakt-Term kann ein Punktdipol korrekt beschrieben werden ohne ihn aufzulösen, beachte auch die Figur zu (2.114),  $\vec{E}_{\text{im Dipol}} \approx -\vec{p}$ .

### 2.8.1 Energie einer Ladungsdichte in Multipolentwicklung

Wir platzieren die Ladung  $\rho(\vec{r})$  ins externe Potential  $\varphi(\vec{r})$ ; dann ist die Energie gegeben durch

$$W = \int d^3r \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \quad (2.116)$$

(m Vergleich mit (1.72) tritt hier kein Faktor 1/2 da wir die Ladung ins 'externe' Feld geben). Wir entwickeln  $\varphi(\vec{r})$  gemäss (beachte, dass  $\rho(\vec{r})$  nicht

die Quelle dieses ‘externen’ Potentials  $\varphi$  ist),

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \varphi(0) + \underbrace{\vec{r} \cdot \vec{\nabla} \varphi|_0}_{-\vec{E}(0)} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} x_i x_j \underbrace{\partial_i \partial_j \varphi|_0}_{-\partial_i E_j|_0} + \dots \\ &= \varphi(0) - \vec{r} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) \partial_i \partial_j \varphi(0) + \dots\end{aligned}$$

Einsetzen in (2.116) ergibt

$$W = Q\varphi(0) - \vec{p} \cdot \vec{E}(0) - \frac{1}{6} \sum_{i,j} Q_{ij} \partial_{x_j} E_i(0) + \dots \quad (2.117)$$

Die Ladung wechselwirkt mit dem Potential, der Dipol mit dem  $\vec{E}$ -Feld, der Quadrupol mit dem  $\vec{E}$ -Feld-Gradienten, ... Als Beispiel betrachten wir zwei Dipole, deren Wechselwirkungsenergie ist gegeben durch

$$W_{12} = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{n} \cdot \vec{p}_1)(\vec{n} \cdot \vec{p}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \quad \text{mit} \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}. \quad (2.118)$$

## Kapitel 3

# Magnetostatik

Der Zugang zur Magnetostatik ist etwas komplizierter als derjenige zur Elektrostatik, vgl. Abschnitt 1.2. Die Ursache ist darin zu finden, dass es *keine magnetischen Monopole* gibt da  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  ist. Elementare Quellen des Magnetfeldes sind deshalb magnetische Dipole oder, wie wir sehen werden, Stromkonfigurationen (deren führendes Moment ein Dipol ist). Ein elektrischer Dipol  $\vec{p}$  richtet sich im elektrischen Feld  $\vec{E}$  gemäss Energieminimierung

$$w = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -p \cdot E \cdot \cos \vartheta \quad (3.1)$$

parallel zum Feld aus. Die rückstellende ‘Kraft’ agiert via dem Drehmoment

$$\tau = -\frac{\partial W}{\partial \vartheta} = -pE \sin \vartheta, \quad (3.2)$$

oder als Vektor,

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}. \quad (3.3)$$

Wir sehen, dass wir Richtung und Grösse von  $\vec{E}$  auch durch Dipole ausmessen können. Analog lässt sich das  $\vec{B}$  Feld via Testdipolmomente  $\vec{m}$  definieren indem das mechanische Drehmomentfeld

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (3.4)$$

ausgemessen wird. Dieser Ansatz entspricht aber der Zeit vor den Entdeckungen von Biot-Savart, Ampère und anderen. Mit der Erkenntnis, dass Magnetfelder durch Ströme erzeugt werden (betrachte dazu die Auslenkung eines Permanentmagneten im Feld eines Stromes) drängt sich eine Definition via Ströme auf, wobei wir Stromdichten  $\vec{j}$  via

$$\vec{j} = \sum_i q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}') \vec{v}_i = qn\vec{v} = \rho\vec{v} \quad (3.5)$$

durch Ladung, Dichte und Geschwindigkeit definieren. Einheiten der Stromdichte sind

$$[j] = \left. \begin{array}{l} \text{statcoulombs/cm}^2 \text{ sec} \\ \text{statamperes/cm}^2 \end{array} \right\} \quad \text{in esu,}$$

$$= \text{As/m}^2 \text{s} = \text{A/m}^2, \quad \text{in MKSA,}$$

Teilchenzahl- und Ladungserhaltung implizieren die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (3.6)$$

In der *Magnetostatik* ist  $\partial_t \rho = 0$  und damit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \quad (3.7)$$

d.h., die Stromlinien haben keine Quellen und Senken sind deshalb geschlossen; entsprechend betrachten wir in der Magnetostatik nur *geschlossene* Leiterkonfigurationen (evtl. im Unendlichen geschlossen). Im folgenden definieren wir die magnetische Induktion via dem Biot-Savart-Gesetz.

### 3.1 Das Ampère Gesetz der Magnetostatik

Wir betrachten ein Leiterelement  $d\vec{\ell}$  durchflossen vom Strom  $I = \int_{\text{qs}} d^2r j$  (qs = Querschnitt des Leiters), vgl. Abb. 3.1. Das Feld  $\vec{B}$  am Ort  $\vec{r}$  kann

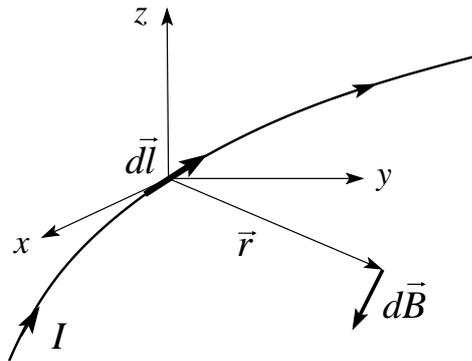


Abb. 3.1: Das vom Strom  $I$  durchflossene Leiterelement  $d\vec{\ell}$  erzeugt im Abstand  $\vec{r}$  ein Feld  $d\vec{B} \propto d\vec{\ell} \times \vec{r}$ .

mit einer Magnetnadel (= kleiner Dipol) ausgemessen werden und ergibt sich zu ( $I d\vec{\ell}$ ,  $\vec{r}$ ,  $\vec{B}$  bilden eine Rechtsschaube)

$$d\vec{B} = k I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3.8)$$

Die Konstante  $k$  legt das Masssystem fest. Mit  $k = 1/\text{Geschwindigkeit}$  hat  $\vec{B}$  die gleiche Einheit wie  $\vec{E}$ ; die einzige universelle Geschwindigkeit in der

Elektrodynamik ist die Lichtgeschwindigkeit  $c = 2.998 \cdot 10^{10}$  cm/s (im Vakuum). Wir führen das *Gauss'sche Masssystem* ein, indem wir die Ströme in esu-Einheiten messen und für

$$k = \frac{1}{c} \quad (3.9)$$

wählen. Die Einheit der magnetischen Induktion ist  $[B] = \text{Gauss}$ . Wenn wir zur speziellen Relativitätstheorie kommen, wird die Wahl gleicher Einheiten für  $E$  und  $B$  besonders einleuchtend sein, da sich  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ -Felder beim Übergang zwischen verschiedenen Inertialsystemen ineinander transformieren. In MKSA Einheiten ist

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{As}}, \quad (3.10)$$

wobei die Koeffizienten  $k_e$  und  $k_m$  verknüpft sind via

$$\frac{k_e}{k_m} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi}{\mu_0} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = \frac{1}{8.854 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}} \frac{\text{Vm Am}}{\text{As Vs}} \quad (3.11)$$

$$= (2.998 \cdot 10^8 \text{m/s})^2 = c^2. \quad (3.12)$$

Für die magnetische Induktion ergibt sich als Einheit

$$[B] = \frac{\text{Vs A}}{\text{Am m}} = \frac{\text{Vs N}}{\text{m}^2 \text{Am}} = T \text{ (Tesla)}. \quad (3.13)$$

Die Umrechnung MKSA  $\leftrightarrow$  Gauss ergibt sich aus

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}. \quad (3.14)$$

Die Umrechnung für die Stromdichten folgt aus

$$\begin{aligned} 1 \text{ A/m}^2 &= 3 \cdot 10^5 \text{ statamperes/cm}^2, \\ 1 \text{ A} &= 3 \cdot 10^9 \text{ statamperes}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ein Beispiel für die Umrechnung vom Magnetfeldern erwähnen wir später. Im folgenden brauchen wir Gauss-Einheiten. Man möchte die Quellen  $\rightarrow$  Feld Beziehung (3.8) in der Magnetostatik mit derjenigen der Elektrostatik (1.37)

$$\vec{E} = \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.37)$$

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} \frac{I}{r^2} \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{r}. \quad (3.8)$$

Beide Quellen erzeugen Felder welche mit einem  $1/r^2$ -Gesetz zerfallen; verschieden sind die vektoriellen Charaktere und die Tatsache, dass wir das Feld  $d\vec{B}$  nur differentiell definieren können: der Strom  $I$  muss zu- und abgeführt werden und diese Zu- und Abführungen erzeugen ihrerseits Feldstärke. Erst wenn wir Schleifen betrachten erhalten wir totale Feldstärken. Als einfachstes Beispiel berechnen wir das Feld eines stromdurchflossenen Drahtes (im Unendlichen geschlossen, vgl. Abb. 3.2):

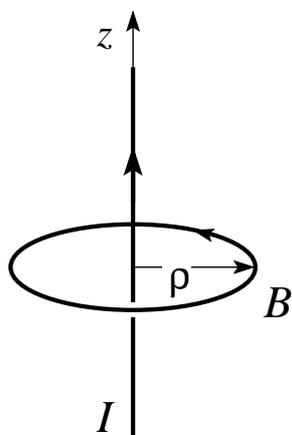


Abb. 3.2: Ein stromdurchflossener Draht (Strom  $I$ ) erzeugt im Abstand  $\rho$  ein Feld der Grösse  $B = 2I/c\rho$ .

Beispiel Aus (3.8) folgt

$$\begin{aligned} B &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2I\rho}{c} \frac{1}{\rho^2} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \Big|_0^{\infty} = \frac{2I}{c\rho}; \end{aligned}$$

alternative gilt gemäss Stokes

$$\begin{aligned} \int_S d^2\vec{\sigma} \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} I = \oint_{\partial S} d\vec{s} \cdot \vec{B} d\vec{s} = 2\pi\rho B \\ \Rightarrow B &= \frac{2I}{c\rho}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Analog zum Kraftgesetz (1.36) der Elektrostatik,

$$\vec{F} = q\vec{E} = \frac{qQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.36)$$

gilt in der Magnetostatik das Kraftgesetz

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= \frac{I_1}{c} [d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}_2(\vec{r}_{12})] \\ &= \frac{I_1}{c} \left[ d\vec{\ell}_1 \times \oint_2 \frac{I_2}{c} \frac{d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3} \right] \\ \vec{F}_{12} &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{\ell}_1 \times d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}. \end{aligned} \quad (3.17) \quad (\text{Ampère})$$

Mit

$$d\vec{\ell}_1 \times d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}_{12} = -(d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2) \vec{r}_{12} + d\vec{\ell}_2 \cdot \underbrace{(d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{r}_{12})}_{\oint_1 \dots = 0}$$

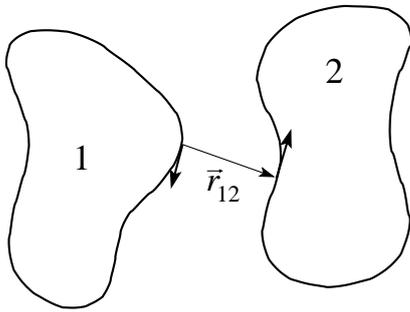


Abb. 3.3: Zwei Stromschleifen 1 und 2 üben die Kraft  $F_{12}$  aufeinander aus.

ergibt sich aus (3.17) (vgl. Abb. 3.3)

$$\vec{F}_{12} = -\frac{I_1 I_2}{c^2} \oint_1 \oint_2 d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2 \frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|^3}. \quad (3.18)$$

Folgende Konfigurationen, vgl. auch Abb. 3.3, zeigen anziehende/keine/abstossende Wechselwirkungen,

|                     |            |                     |               |
|---------------------|------------|---------------------|---------------|
| $I_1 d\vec{\ell}_1$ |            | $I_2 d\vec{\ell}_2$ |               |
| ↑                   | anziehend  | ↑                   | parallel,     |
| ↑                   | 0          | →                   | orthogonal,   |
| ↑                   | abstossend | ↓                   | antiparallel. |

Als Beispiel berechnen wir die Kraft zwischen zwei parallelen Leitern:

$$\begin{aligned} F_{12} &= -\frac{I_1 I_2}{c^2} \int dz_1 \int dz_2 \frac{\sin \theta_{12}}{(z_2 - z_1)^2 + d^2} \\ &= -\frac{I_1 I_2}{c^2} \underbrace{\int dz_1}_L \underbrace{\int dz' \frac{d/\sqrt{z'^2 + d^2}}{z'^2 + d^2}}_{2/d} \\ &= -\frac{I_1 I_2}{c^2} \frac{2L}{d}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nutzt man das Resultat (3.16) für den stromdurchflossenen Leiter vereinfacht sich die Rechnung zu

$$\begin{aligned} dF_{12} &\stackrel{(3.17)}{=} -\frac{I_1}{c} dl_1 B_2(d) \stackrel{(3.16)}{=} \frac{I_1}{c} \frac{2I_2}{cd} dl_1, \\ \frac{F_{12}}{dl_1} &= -\frac{2I_1 I_2}{c^2 d}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

### Ampère Gesetz in differentieller Form

Für eine Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$  verallgemeinert sich

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \oint \frac{d\vec{r}_\ell \times (\vec{r} - \vec{r}_\ell)}{|\vec{r} - \vec{r}_\ell|^3},$$

zu<sup>1</sup>

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (3.21)$$

Der Ausdruck (3.21) entspricht dem Resultat (1.43) der Elektrostatik,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int d^3 r' \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Mit

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}_r^2 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$$

erhalten wir

$$\vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla}_r \times \underbrace{\frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}}_{\vec{A}(\vec{r})} = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r});$$

damit erhalten wir die Maxwell Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{MG I h}) \quad (3.22)$$

für die longitudinale Komponente von  $\vec{B}$  und

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (3.23)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \quad (\text{MG II i}) \quad (3.24)$$

für die transversale Komponente. Dabei haben wir benutzt, dass  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  im statischen Fall verschwindet,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &= -\frac{1}{c} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \vec{\nabla}_{r'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \stackrel{p.i.}{=} 0, \end{aligned}$$

wobei die partielle Integration in der letzten Gleichung auf  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho = 0$  führt. Im zweiten Term von (3.23) benutze man  $\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = c^{-1} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ .

<sup>1</sup>Der Strom  $I$  geht über in die Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}')$  gemäss

$$\vec{j} \leftrightarrow I \frac{d\vec{r}'_\ell}{dz'} \delta^2(\vec{R}' - \vec{R}_\ell)$$

### Analogien zwischen Elektro- und Magnetostatik

Die statischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  und ihre Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  erfüllen die Beziehungen

| Elektrostatik   |                            | Magnetostatik  |
|---|----------------------------|--|
| $\varphi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{ \vec{r}-\vec{r}' }$ |                            | $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{ \vec{r}-\vec{r}' }$ |
| $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  |                            | $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  |
| $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ (Gauss)                           | Diff.form                  | $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}(\vec{r})$ (Ampère)                  |
| $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ <i>vec</i>                              | $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ |  |
| $\oint_S d^2\vec{\sigma} \cdot \vec{E} = 4\pi Q$ (Gauss)                  | Int.form                   | $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c} I$ (Ampère)                          |

## 3.2 Vektorpotential und Eichinvarianz

Analog zum skalaren Potential  $\varphi$  der Elektrostatik definieren wir das Vektorpotential  $\vec{A}$

$$\begin{aligned} \text{Elektrostatik: } \quad & \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \longrightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi, \\ \text{Magnetostatik: } \quad & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \longrightarrow \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \end{aligned}$$

Da die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet,  $\vec{\nabla} \times \vec{\chi} = 0$ , ist  $\vec{A}$  nur bis auf ein Gradientenfeld bestimmt,

$$\vec{A} \text{ und } \vec{A} + \vec{\nabla}\chi \text{ erzeugen dasselbe } \vec{B}\text{-Feld,} \quad (3.25)$$

somit ist nur der transversale Anteil von  $\vec{A}$  relevant. Die Freiheit  $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\chi$  heisst Eichfreiheit, wir werden mehrmals darauf zurückkommen. Die Eichfreiheit erlaubt uns,  $\vec{A}$  transversal zu wählen, denn, sei  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \varkappa \neq 0$  dann transformieren wir  $\vec{A}$  unter Berücksichtigung von (3.25)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A}', \quad (3.26)$$

so dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta\chi = \varkappa + \Delta\chi = 0 \quad (3.27)$$

ist; daraus folgt, dass  $\chi$  eine Lösung des Poissonproblems  $\Delta\chi = -\varkappa$  ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir also

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (\vec{A} \text{ transversal}) \quad (3.28)$$

setzen (Coulombbeziehung). In Analogie zu (1.47),  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$ , erhalten wir in der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})}_0 - \Delta\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

mit der Lösung

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.29)$$

### $\vec{B}$ als Gradientenfeld

Falls der Raum *stromfrei* ist, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad (3.30)$$

und wir können  $\vec{B}$  durch ein *skalares Potential* darstellen,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\vec{\nabla}\Psi \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= -\Delta\Psi = 0; \end{aligned} \quad (3.31)$$

das  $\vec{B}$ -Feld im freien Raum ergibt sich als Lösung eines Laplaceproblems. Ein endliches  $\vec{B}$  wird dann allein durch die Randbedingung erzeugt (Quellen entsprechen Rändern, sie werden von Strömen ausserhalb des betrachteten Gebietes erzeugt). So kann das magnetostatische gleich wie eine elektrostatische Problem behandelt werden. Als nächstes Thema behandeln wir die Stromschleife, die ‘elementare Quelle’ eines Magnetfeldes.

### 3.3 Stromschleife

Gegeben sei ein stromdurchflossener (Strom  $I$ ) Leiter in Kreisgeometrie (in der  $xy$ -Ebene, Radius  $R$ ), vgl. Abb. 3.4. Für einen verschwindenden Quer-

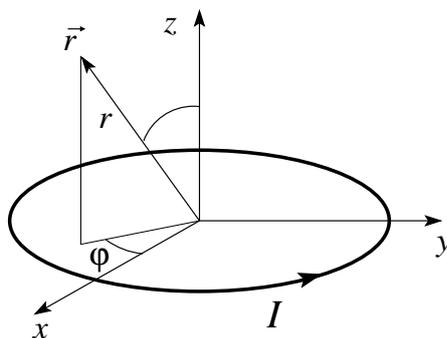


Abb. 3.4: Geometrie zur Berechnung des durch einen Kreisstrom  $I$  erzeugten Magnetfeldes.

schnitt lässt sich die Stromdichte via einer  $\delta$ -Funktion schreiben,

$$\begin{aligned} \vec{j} &= j\varphi (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \\ j\varphi &= I\delta(R\cos\theta)\delta(r-R). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Aus (3.29) erhalten wir das Potential (wir wählen für die Rechnung  $\varphi = 0$  so dass nur die  $y$ Komponente von  $\vec{A} = A_\varphi(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  bleibt,

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \frac{1}{c} \int d\Omega' r'^2 dr' \frac{I \cos \varphi' \delta(R \cos \vartheta') \delta(r' - R)}{(r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi' \sin \vartheta)^{1/2}}; \quad (3.33)$$

wir transformieren  $\varphi' \rightarrow 2\chi$ ; mit  $\cos \varphi' = \cos 2\chi = 2 \cos^2 \chi - 1$  können wir den Nenner umschreiben gemäss  $r^2 + R^2 - 2rR \cos \varphi' \sin \vartheta = (r^2 + R^2 - 2rR \sin \vartheta)(1 - k^2 \cos^2 \chi)$  und erhalten

$$A_\varphi(r, \vartheta) = \frac{IR}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{\cos \varphi'}{(r^2 + R^2 - 2rR \sin \vartheta \cos \varphi')^{1/2}} \quad (3.34)$$

$$= \frac{2IR}{c\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta}} \int_0^\pi d\chi \frac{2 \cos^2 \chi - 1}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \chi}} \quad (3.35)$$

$$= \frac{2IR}{c\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta}} \int_0^\pi d\chi \left[ -\frac{2}{k^2} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \chi} \right. \quad (3.36)$$

$$\left. + \left( \frac{2}{k^2} - 1 \right) \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \chi} \right]. \quad (3.37)$$

Mit den vollständig elliptischen Integralen

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\chi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi}},$$

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} d\chi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \chi},$$

lässt sich das obige Resultat kompakt ausdrücken als

$$= \frac{4IR}{c\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta}} \left[ \frac{(2 - k^2)K(k) - 2E(k)}{k^2} \right]. \quad (3.38)$$

Für kleine  $k$  ist  $[\dots] \approx \pi k^2/16$  und damit

$$A_\varphi(r, \vartheta) \approx \frac{\pi}{c} IR^2 \frac{(r \sin \vartheta)}{(r^2 + R^2 + 2rR \sin \vartheta)^{3/2}}. \quad (3.39)$$

Die Bedingung  $k \ll 1$  impliziert gilt im Nahbereich  $r \ll R$ , im Fernbereich  $r \gg R$ , oder im Winkelbereich  $\sin \vartheta \ll 1$ , vgl. Abb. 3.5. Im Fernbereich  $r \gg R$  ist

$$A_\varphi \sim \frac{\pi}{c} I \sin \vartheta \left( \frac{R}{r} \right)^2$$

und wir erhalten eine Dipolfeld  $B \propto 1/r^3$ ,

$$B_r \approx \frac{\pi R^2 I}{c} \cos \vartheta \frac{2R^2 + 2r^2 + Rr \sin \vartheta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \vartheta)^{5/2}} \quad (3.40)$$

$$B_\vartheta \approx \frac{\pi R^2 I}{c} \sin \vartheta \frac{2R^2 - r^2 + Rr \sin \vartheta}{(R^2 + r^2 + 2Rr \sin \vartheta)^{5/2}}.$$

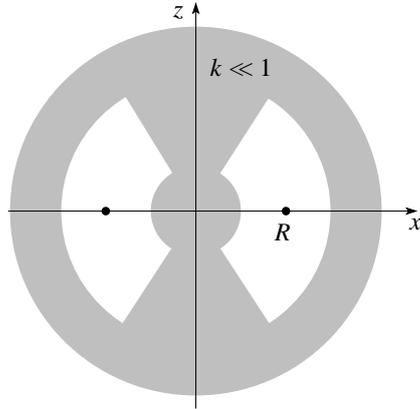


Abb. 3.5: Bereiche mit  $k \ll 1$  wo die Entwicklung der elliptischen Integrale  $K(k)$  und  $E(k)$  Gültigkeit hat.

Weit weg von der Schleife finden dir das Dipolfeld

$$\begin{aligned} B_r &\sim \frac{\pi R^2 I}{c} \frac{2 \cos \vartheta}{r^3}, & \text{vgl.} & & E_r &= \rho \frac{2 \cos \vartheta}{r^3}, & (3.41) \\ B_\vartheta &\sim \frac{\pi R^2 I}{c} \frac{\sin \vartheta}{r^3}, & \text{vgl.} & & E_\varphi &= \rho \frac{\sin \vartheta}{r^3}; \end{aligned}$$

für das magnetische Dipolmoment einer planaren Schleife mit Radius  $R$  und Strom  $I$  finden wir dann

$$\vec{m} = \frac{\pi R^2 I}{c} \hat{z}. \quad (3.42)$$

Tatsächlich erzeugt *jede* Stromverteilung asymptotisch ein Dipolfeld:

Mit

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots \quad (r' \ll r)$$

erhalten wir für das Vektorpotential

$$A_i(\vec{r}) = \frac{1}{rc} \left[ \int d^3 r' j_i(\vec{r}') + \frac{1}{r^2} \int d^3 r' j_i(\vec{r}') \vec{r} \cdot \vec{r}' + \dots \right].$$

Der *Monopolterm*  $\propto 1/r$  verschwindet, da

$$\int d^3 r' \vec{j}_i(\vec{r}') = 0; \quad (3.43)$$

diese Relation folgt aus der allgemeinen Beziehung<sup>2</sup>

$$\int d^3 r' (g(\vec{\nabla}' f) \cdot \vec{j} + f(\vec{\nabla}' g) \cdot \vec{j}) = 0 \quad (3.44)$$

<sup>2</sup>Zum Beweis berechne man

$$\underbrace{\int d^3 r' \vec{\nabla}' \cdot (f \vec{j} g)}_{=0 \text{ für kompaktes } \vec{j}(\vec{r}')} = \int d^3 r' \left[ (\vec{\nabla}' f) \cdot \vec{j} g + (\vec{\nabla}' g) \cdot \vec{j} f + \underbrace{f g \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}}_{-\partial_t \rho = 0} \right]$$

mit  $g = r_i$  und  $f = 1$ . Der zweite Term lässt sich mit Hilfe der Beziehung

$$\int d^3r' [j_i r'_j + j_j r'_i] = 0$$

(folgt aus (3.44) mit  $g = r'_j$  und  $f = r'_i$ ) umformen zu

$$\begin{aligned} \int d^3r' j_i r'_k r_k &= \frac{1}{2} \int d^3r' (j_i r'_k - j_k r'_i) r_k \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r' \underbrace{\epsilon_{ijk} \epsilon_{ljm}}_{\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}} j_l r'_m r_k \\ &= -\frac{1}{2} \left[ \vec{r} \times \int d^3r' \vec{r}' \times \vec{j} \right]_i, \end{aligned}$$

woraus sich folgendes Resultat für das Vektorpotential ergibt,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \left[ \frac{1}{2c} \int d^3r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \right] \times \frac{\vec{r}}{r^3} \equiv \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (3.45)$$

mit dem Dipolmoment der Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r}')$

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] . \quad (3.46)$$

Das zu  $\vec{A}$  gehörige Dipolfeld lässt sich schreiben als

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (3.47)$$

Wiederum zeigt eine genauere Rechnung, dass wir einen Kontaktterm berücksichtigen müssen, so dass das Schlussresultat folgende Form hat (vgl. dazu auch Abb. 3.6)

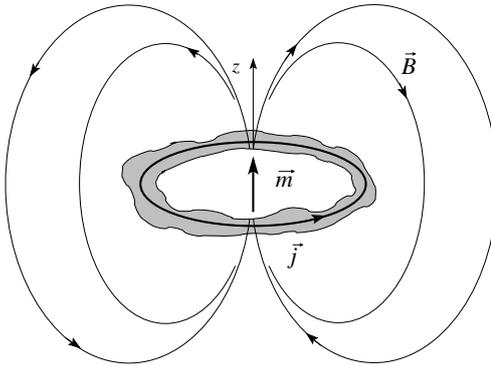


Abb. 3.6: Magnetisches Dipolfeld einer Stromdichteverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$ . Der Dipol  $\vec{m}$  ist als Kontaktterm zu berücksichtigen.

$$\vec{B} = \frac{3\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{|\vec{r} - \vec{r}_m|^3} + \frac{8\pi}{3} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_m), \quad \text{mit } \vec{n} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_m}{|\vec{r} - \vec{r}_m|}. \quad (3.48)$$

Das Dipolmoment eines in einer Kreisbahn (mit Radius  $R$  und Periode  $T$ ) gefangenen geladenen (Ladung  $q$ ) Teilchens lässt sich durch seinen Drehimpuls  $\vec{L}$  ausdrücken,

$$\vec{m} = \frac{1}{c} \underbrace{\frac{q}{T}}_I \underbrace{\pi R^2}_{A} \hat{z} = \frac{q}{2mc} \underbrace{\frac{2\pi R}{T}}_v Rm\hat{z} = \frac{q}{2mc} \underbrace{\vec{p} \times \vec{R}}_{\vec{L}} \quad (3.49)$$

Der Drehimpuls hat die Einheit einer Wirkung; für eine Elektron erhalten wir dann das elementare magnetische Moment

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc} = 1.165 \cdot 10^{-19} \text{ Gcm}^3, \quad (3.50)$$

das Bohrsche Magneton.

### Typische Magnetfelder

Gegeben sei eine Schleife mit einem Radius von 1 cm und einem Strom von 1 A; in der Distanz von 1 cm über dem Zentrum finden wir eine Feld der Stärke (in MKSA und cgs Einheiten)

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{R^3} = 10^{-7} 2\pi \frac{1}{10^{-2}} \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} = \frac{2\pi}{10} \text{ G} \\ &= \frac{2\pi I}{cR} = \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{10} \cdot 1} = \frac{2\pi}{10} \text{ G}, \end{aligned}$$

und das magnetische Moment der Schleife ist

$$m = \frac{\pi R^2 I}{c} = \frac{\pi}{10} \text{ Gcm}^3. \quad (3.51)$$

Eine atomare Bahn mit  $q = e$ ,  $R \sim 1 \text{ \AA}$ , und  $T \sim 10^{-16} \text{ s}$  ergibt ein Moment (vgl. mit  $\mu_B$  in (3.50))

$$m = \frac{\pi R^2 I}{c} = \frac{\pi 10^{-16} \cdot 4.8 \cdot 10^6}{3 \cdot 10^{10}} = 5 \cdot 10^{-20} \text{ Gcm}^3 \quad (3.52)$$

Der zugehörige Strom misst

$$I = \frac{e}{T} = \frac{4.8 \cdot 10^{-10}}{10^{-16}} = 4.8 \cdot 10^6 \text{ statamp} (= 1.6 \cdot 10^{-3} \text{ A}) \quad (3.53)$$

$$(3.54)$$

und das  $B$ -Feld in der Distanz 1  $\text{\AA}$  beträgt

$$B = \frac{2m}{R^3} = \frac{10^{-19}}{10^{-24}} = 10^5 \text{ G} = 10 \text{ T}$$

Typische Laborfelder sind: Saturated Eisen mit atomarer Dichte  $n \sim 10^{22} \text{cm}^3$  erzeugt ein Feld  $B \sim 4\pi\mu_B n \sim 2 \cdot 10^4 \text{ G}$ , mit supraleitenden Magneten erreicht man Feldstärken der Grösse  $2 \cdot 10^5 \text{ G}$  (20T), im Hochfeld Labor lassen sich Felder bis  $\sim 45 \text{ T}$  erzeugen, und gepulste Felder erreichen bis  $\sim 100 \text{ T}$ . Das Erdmagnetfeld ist klein,  $\sim 0.5 \text{ G}$ . Ein  $B$ -Feld von  $1 \text{ G}$  entspricht einem  $E$ -Feld von  $310 \text{ V/cm}$ ; atomare  $B$ -Felder sind viel kleiner als die entsprechenden  $E$ -Felder,  $B_{\text{Atom}} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ V/cm} \ll E_{\text{Atom}} \approx 10^9 \text{ V/cm}$ .

### 3.4 Kraft, Drehmoment und Energie

Betrachte eine Stromverteilung  $\vec{j}(\vec{r})$  im äusseren Feld  $\vec{B}(\vec{r})$ . In Verallgemeinerung von (3.17) wirkt auf diese Stromverteilung die Kraft<sup>3</sup>

$$\vec{F} = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \quad (3.55)$$

und das Drehmoment

$$\vec{\tau} = \frac{1}{c} \int d^3r \vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})).$$

Das führende Moment einer Stromverteilung  $\vec{j}$  ist sein magnetisches Dipolmoment und wir wollen obige Ausdrücke durch  $\vec{m}$  ausdrücken. Dazu entwickeln wir  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(0) + [(\vec{r} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}](0) + \dots$  und finden für die Kraft

$$F_i = \frac{1}{c} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \left[ B_k(0) \int d^3r j_j(\vec{r}) + \int d^3r j_j(\vec{r}) [(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) B_k](0) \right];$$

Der erste Term verschwindet, vgl. (3.43), währenddem der zweite Term mit (3.44) und  $g = x_j \partial_j B_k$ ,  $f = x_i \partial_i B_k$  den Ausdruck  $c[(\vec{m} \times \vec{\nabla})_j B_k](0)$  ergibt. Für die Kraft erhalten wir dann den Ausdruck

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} [(\vec{m} \times \vec{\nabla})_j B_k](0) = [(\vec{m} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B}]_i|_0 = [\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})]_i \\ \vec{F} &= \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Für ein extern angelegtes  $\vec{B}$ -Feld gilt (im Normalfall) im statischen Fall  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$  am Ort der Stromverteilung und mit

$$\vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B}) = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{m} + \vec{m} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{m})$$

gilt

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}, \quad (\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0). \quad (3.57)$$

<sup>3</sup>In der Elektrostatik sind die Ausdrücke für die Kraft  $\vec{F}$  und das Drehmoment  $\vec{\tau}$  trivial,  $\vec{F} = \int d^3r \rho(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \approx Q\vec{E}$  und  $\vec{\tau} = \int d^3r \vec{r} \times [\rho(\vec{r})\vec{E}(\vec{r})] \approx \vec{p} \times \vec{E}$ .

Ähnlich zeigt man für das Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \frac{1}{c} \int d^3r \left[ \vec{r} \times (\vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(0)) \right] && \text{(0-ter Term genügt)} \\ &= \frac{1}{c} \int d^3r \left[ (\vec{r} \cdot \vec{B}) \vec{j} - (\vec{r} \cdot \vec{j}) \vec{B} \right];\end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet (benutze (3.44) mit  $g = f = r_i$ ) und wir finden das Resultat

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}. \quad (3.58)$$

Schliesslich erhalten wir in Analogie zu (2.117) die potentielle Energie

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}, \quad (3.59)$$

womit wir konsistent sofort die Resultate (3.57) und (3.58) finden können,

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}U = (\vec{m} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}, \\ \tau &= -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = mB \sin \vartheta.\end{aligned}$$

Ebenfalls in Analogie zur Elektrostatik gilt für die totale Energie einer Stromkonfiguration (die Äquivalenz der beiden Formeln folgt mit der Substitution  $\vec{j} = (c/4\pi)\vec{\nabla} \times \vec{A}$  und partieller Integration)

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}), && (3.60) \\ &= \frac{1}{8\pi} \int d^3r B^2(\vec{r}).\end{aligned}$$

Wir geben die Herleitung von (3.60) später da sie das Faradaysche Gesetz voraussetzt. Beachte, dass die potentielle Energie  $U$  eines Dipols im externen Feld in (3.59) verschieden von der Energie  $W$  (vgl. (3.60)) einer Stromkonfiguration  $\vec{j}$  ist: Bringen wir die Stromkonfiguration  $\vec{j}$  aus dem Unendlichen so müssen wir Arbeit gegen das sich aufbauende  $\vec{B}$ -Feld leisten.

Eine hübsche Anwendung von (3.56), (3.59) sind die magnetischen Spiegel: Betrachte ein Elektron  $e^-$  im (leicht inhomogenen) Feld  $\vec{B}(\vec{r})$ . Die Lorentzkraft  $\vec{F} = (q/c)\vec{v} \times \vec{B}$  zwingt das Elektron auf eine Kreisbahn. Der entstehende Strom erzeugt ein Moment  $\vec{m}$  antiparallel zu  $\vec{B}$  (diamagnetisch). Die Zunahme der potentiellen Energie  $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$  mit zunehmendem Feld impliziert eine Kraft die das Elektron von hohen Feldstärken wegdrückt und wir können das Elektron durch Feldgradienten einsperren  $\rightarrow$  magnetische Flaschen.

In Analogie zur Elektrostatik betrachten wir kurz die Induktivitäten von Stromkonfigurationen. Mit

$$W = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

und

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (3.61)$$

erhalten wir analog zu (1.71)

$$W = \frac{1}{2c^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Sind die Ströme auf  $n$  Leiter verteilt,  $I_1, \dots, I_n$  so lässt sich diese Energie schreiben als<sup>4</sup>

$$W = \frac{1}{2c^2} \sum_{ij} L_{ij} I_i I_j, \quad L_{ij} = L_{ji} \quad [\leftrightarrow (C^{-1})_{ij}]. \quad (3.62)$$

Die Koeffizienten  $L_{ii}$  beschreiben die Selbstinduktion der Leiter,  $L_{i \neq j}$  die gegenseitige Induktion.<sup>5</sup> Die Induktionsmatrix  $L_{ij}$  ist durch die geometrischen Integrale

$$L_{ij} = \int_{\text{Vol}_i} d^3r_i \int_{\text{Vol}_j} d^3r'_i \frac{\vec{J}_i \cdot \vec{J}'_i}{|\vec{r}_i - \vec{r}'_i|}, \quad (3.64)$$

$$L_{ij} = \int_{\text{Vol}_i} d^3r_i \int_{\text{Vol}_j} d^3r_j \frac{\vec{J}_i \cdot \vec{J}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3.65)$$

$$\approx \int_{q_i, q_j \rightarrow 0} d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2 \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (3.66)$$

bestimmt. Für  $i \neq j$  lässt sich der Grenzwert verschwindender Querschnitte  $q_i, q_j \rightarrow 0$  betrachten; für die Selbstinduktion ( $i = j$ ) führt dieser Grenzwert auf Divergenzen.<sup>6</sup> In (3.64) und (3.66) beschreiben die Vektorfelder  $\vec{J}_i = \vec{j}_i / I_i$  die Stromliniendichte; für einen homogenen Fluss durch den Querschnitt  $q_i$  des Leiters  $i$  gilt (vgl. Abb. 3.7

$$\int_{q_i} d^3r_i \cdot \vec{j}_i = d\vec{l}_i.$$

<sup>4</sup>Z.B. ist für 2 Leiter die Energie einer Stromkonfiguration gegeben durch

$$W = \frac{1}{2c^2} (L_{11}I_1^2 + L_{22}I_2^2 + 2L_{12}I_1I_2).$$

<sup>5</sup>Die Induktionsmatrix  $L_{ij}$  gibt uns auch den Zusammenhang zwischen den induzierten Spannungen  $V_i$  und den zeitlich veränderlichen Strömen  $I_j$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{1}{c^2} \sum_i \left( \sum_j L_{ij} \frac{dI_j}{dt} \right) I_i = \sum_i V_i I_i \\ \rightarrow V_i &= \frac{1}{c^2} \sum_j L_{ij} \partial_t I_j. \end{aligned} \quad (3.63)$$

<sup>6</sup>Das Integral in  $L_{ii}$  wird bei  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i$  singulär; für  $i \neq j$  ist  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  immer verschieden von 0, solange die Leiter sich nicht überschneiden).

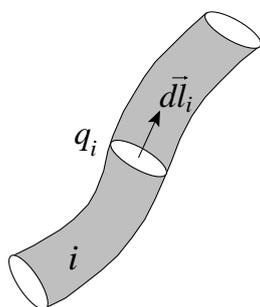


Abb. 3.7: Linienelement  $d\vec{l}_i$  für den Leiter  $i$  mit Querschnitt  $q_i$ .

Wie bei den Kapazitäten in der Elektrostatik ist die Berechnung der Induktivitäten  $L_{ij}$  ein geometrisches Problem<sup>7</sup>. Als Beispiele (siehe Übungen) erwähnen wir die

- Selbstinduktion eines geraden zylindrischen Leiters mit Radius  $r$ , Länge  $\ell$  und homogenem Stromfluss, vgl. Abb. 3.8(a)

$$L = 2\ell \left[ \ln \frac{2\ell}{r} - \frac{3}{4} \right]; \quad (3.67)$$

beachte:  $L/\ell \propto \ln(\ell/r)$  und für  $r \rightarrow 0$  geht  $L \rightarrow \infty$ .

- Gegenseitige Induktion zweier paralleler Leiter der Länge  $\ell$  im Abstand  $R$ ,  $\ell \gg R$  und Querschnitt  $q \rightarrow 0$ , vgl. Abb. 3.8(b)

$$L_{12} = 2\ell \left[ \ln \frac{2\ell}{R} - 1 \right]. \quad (3.68)$$

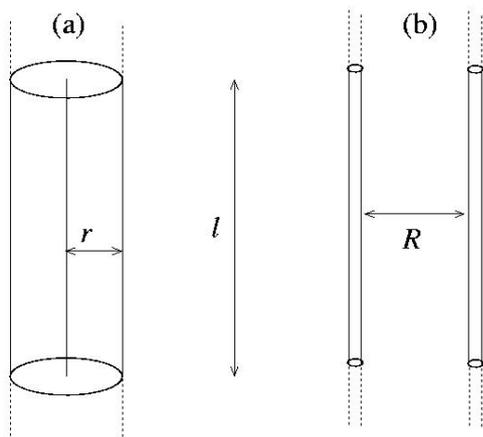


Abb. 3.8: (a) Selbstinduktion eines Leiters, (b) Gegenseitige Induktion eines Doppelleiters.

<sup>7</sup>Die analogen Formeln in der Elektrostatik sind trivial,  $(C^{-1})_{ij} = \int d^3r_i d^3r_j (n_i n_j) / |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$  mit  $n_i = \rho_i(\vec{r})/Q_i$  macht Sinn wenn  $\rho_i = \text{const} \rightarrow n_i =$  charakteristische Funktionen auf  $i \rightarrow (C^{-1})_{ij} \approx 1/|r_i - r_j|$  für separierte Ladungen)

**Einheiten:**

In *cgs*, *Gauss*- Einheiten wird  $L$  in cm gemessen. Benutzen wir MKSA Einheiten so substituieren wir den Faktor  $c^{-2}$  in  $W$  durch den Faktor  $\mu_0/4\pi$  in  $L$ ; als Einheit von  $L$  erhalten wir

$$[L] = [\mu_0] \text{ m} = \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \text{ m} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = 1 \text{ Henry.}$$

Übung: Berechne die Selbstinduktion  $L$  für eine Stromschleife mit Radien  $R$  und  $r$ ,

$$L = 4\pi R \left[ \ln \frac{8R}{r} - \frac{7}{4} \right] \quad (R, r = \text{Radien}). \quad (3.69)$$

**3.5 Ampéresches (magnetisches) Blatt**

Ausserhalb eines Leiter können wir das Magnetfeld als Gradientenfeld ansetzen,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = -\vec{\nabla}\psi. \quad (3.70)$$

Mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  erhalten wir das Laplace-Problem

$$\Delta\psi = 0.$$

Allerdings ist  $\psi$  *nicht eindeutig!* Gehen wir nämlich  $n_k$  mal um die Leiter  $\mathcal{L}_k$  herum so finden wir (benutze den Satz von Stokes)

$$\psi_{\text{start}} - \psi_{\text{end}} = \frac{4\pi}{c} \sum_k n_k I_k, \quad (3.71)$$

wobei  $I_k$  die in den Leitern  $\mathcal{L}_k$  fliessenden Ströme bezeichnen ( $n_k =$  netto Umlauf um  $\mathcal{L}_k$ ,  $n_k = \pm 1$  bei einmaligem Umlauf rechts/links händig).

Um  $\psi$  eindeutig zu definieren schneiden wir den Raum auf. Betrachte eine Stromschleife  $\mathcal{L} = \partial S$  welche die Fläche  $S$  begrenzt. Wir schneiden den Raum entlang  $S$  d.h.,  $\psi$  wird im  $\mathbb{R}^3 \setminus S$  stetig sein und beim Durchgang durch  $S$  springen. Mit Hilfe des Green'schen Satzes lässt sich  $\psi$  berechnen; das Resultat ist (vgl. Abb. 3.9)

$$\psi = -\frac{I}{c} \Omega_{\vec{r}} \quad (3.72)$$

wobei  $\Omega_{\vec{r}}$  den Raumwinkel bezeichnet der durch die Fläche  $S$  aufgespannt wird. Beim Durchgang durch  $S$  springt  $\psi$  gerade um  $\pm 4\pi I/c$ . Das *magnetische Blatt*  $S$  kann physikalisch als Dipolschicht  $\omega_m d = I$ ,  $d =$  Schichtdicke,  $\omega_m =$  magnetische Flächendichte, interpretiert werden.

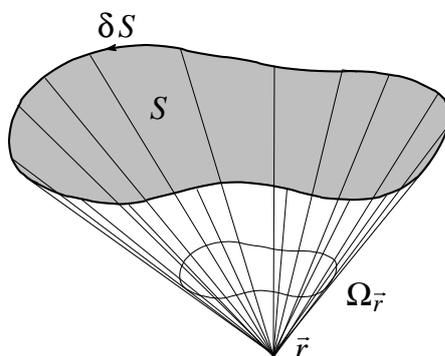


Abb. 3.9: Das Ampèresche Blatt; der Winkel  $\Omega_{\vec{r}}$  unter dem die Fläche  $S$  erscheint bestimmt gerade das skalare Potential  $\psi = -I\Omega_{\vec{r}}/c$  des Magnetfeldes.

### 3.6 Konforme Abbildungen (2D)

Wie in der Elektrostatik lassen sich zweidimensionale magnetostatische Probleme via konformer Abbildungen lösen. Zum Vergleich stellen wir elektrostatische und magnetostatische Probleme gegenüber:

$$\begin{aligned} \text{Elektrostatik: } w(z) &= \phi - iA = A + i\phi & (3.73) \\ \text{mit } E_x &= -\partial_x\phi = \partial_y A, \quad E_y = -\partial_y\phi = -\partial_x A, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Magnetostatik: } w(z) &= \psi - iA = A + i\psi & (3.74) \\ \text{mit } B_x &= -\partial_x\psi = \partial_y A, \quad B_y = -\partial_y\psi = -\partial_x A. \end{aligned}$$

Zur Berechnung *magnetischer Randwertprobleme* lassen sich die in der Elektrostatik eingeführten Techniken adaptieren — wir gehen nicht nochmals darauf ein.

## Kapitel 4

# Elektro- und Magnetostatik im Medium

In den letzten Kapiteln haben wir elektro- und magnetostatische Phänomene im Raum, resp., im Vakuum betrachtet; typische Themen waren geladene und ungeladene Leiter, stromführende Leiter und Randwertprobleme im Vakuum. In diesem Kapitel konzentrieren wir uns auf den materieverfüllten Raum, z.B., ein Gas, eine Flüssigkeit, ein Plasma, oder ein Kristall von Atomen. Greifen wir ein Atom heraus, können wir folgende Aussagen machen:

1. *Atom im  $\vec{E}$ -Feld:* Wir betrachten die Elektronen-Hülle als elastisch an den Kern gebunden. Ein  $\vec{E}$ -Feld wird das Atom polarisieren, vgl. Abb. 4.1 (ein Molekül hat möglicherweise bereits ein Dipolmoment), folglich entsteht ein mikroskopisches Feld welches wir als  $\vec{e}$ -Feld bezeichnen.

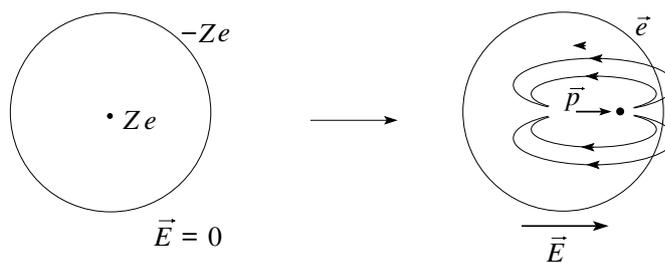


Abb. 4.1: Ein symmetrisches neutrales Atom wird im elektrischen Feld verzerrt (die Elektronenhülle wird gegenüber der symmetrischen Kernposition verschoben) und erzeugt via seiner *elektrischen* Polarisierbarkeit einen elektrischen Dipol  $\vec{p}$ .

2. *Atom im  $\vec{B}$ -Feld:* Atome besitzen üblicherweise ein magnetisches Moment: Die Elektronen zeigen ein Spin-Moment  $m_{\text{Spin}} = \mu_B$  von der

Grösse des Bohr'schen Magnetons; Elektronen auf einer Bahn mit Drehimpuls  $\vec{L}$  erzeugen ein Bahnmoment  $m_{\text{Bahn}} = e\vec{L}/2m_e c$ , vgl. Abb. 4.2. Der *Gesamt*-Dipol  $\vec{m}$  richtet sich im äusseren  $\vec{B}$ -Feld aus und es entsteht ein mikroskopisches  $\vec{b}$ -Feld.

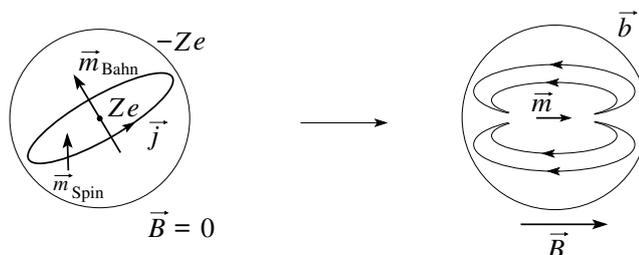


Abb. 4.2: Im Atom besitzen die Elektronen ein Spinmoment  $m_{\text{Spin}}$  sowie ein Bahnmoment  $m_{\text{Bahn}}$  erzeugt durch Kreisströmen  $\vec{j}$ ; beide addieren sich zum Gesamtmoment  $\vec{m}$ ; letzteres richtet sich im äusseren  $\vec{B}$ -Feld aus und verstärkt das Feld. Diese Verstärkung des Feldes ist als 'Para-Magnetismus' bekannt.

Atome zeigen zusätzlich auch einen *Diamagnetismus* der das Feld vermindert; besitzt das Atom netto keinen Gesamtdrehimpuls, so erzeugt das  $\vec{B}$ -Feld dennoch einen Strom in der Elektronen-Hülle dessen Moment  $\vec{m}_{\text{Larmor}}$  dem äusseren Feld entgegengesetzt ist, vgl. Abb. 4.3. Beachte, dass die in-

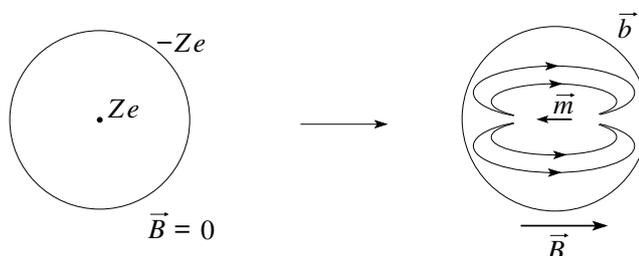


Abb. 4.3: Ein Magnetfeld polarisiert das Atome und erzeugt ein *diamagnetisches* Moment  $\vec{m} = \vec{m}_{\text{Larmor}}$  welches dem äusseren Feld entgegen gerichtet ist.

duzierten diamagnetischen Momente  $m_{\text{Larmor}}$  viel kleiner als typische paramagnetische Bahnmomente  $m_{\text{Bahn}}0$  bei endlichem Drehimpuls sind; die Kernmomente  $\mu_{\text{Kern}} \sim e\hbar/2Mc$  sind ("üblicherweise vernachlässigbar) klein da  $M \sim 10^3 m_e$ .

Die Arbeit mit mikroskopischen  $\vec{e}$ - und  $\vec{b}$ -Feldern ist unangebracht, sowohl im Aufwand als auch was den Gewinn an Erkenntnis betrifft. Vielmehr möchten wir die Wirkung der Felder im Mittel beschreiben und die Elektro- und Magnetostatik in Medien neu definieren, so dass wir uns wieder auf die

wirklichen Quellen konzentrieren können. Dies wollen wir im Folgenden tun. Die Mittelung der mikroskopischen  $\vec{e}$ - und  $\vec{b}$ -Felder soll dabei über zahlreiche Atome/Moleküle erfolgen,  $\delta V > n^{-1}$ ,  $n$  die atomare Dichte des Mediums, wobei die Volumina  $\delta V$  klein gegenüber makroskopischen Dimensionen  $V_{\text{Makro}}$  bleiben auf denen die mittleren Felder variieren,  $\delta V \ll V_{\text{Makro}}$ .

## 4.1 Elektrostatik im linear polarisierbaren Medium

Mit  $\vec{\nabla} \times \vec{e} = 0$  gilt auch für das gemittelte Feld  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$  und entsprechend können wir ein erzeugendes Potential  $\varphi$  definieren, so dass  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  ist. Das Feld  $\vec{E}$  polarisiert die Konstituenten des Mediums und erzeugt das Polarisationsfeld,

$$\vec{P}(\vec{r}) = \sum_i \langle n_i(\vec{r}) \vec{p}_i(\vec{r}) \rangle, \quad (4.1)$$

mit  $n_i$  den Dichten,  $\vec{p}_i$  den Dipolmomenten der  $i$ -ten Spezies und  $\langle \dots \rangle$  bezeichnet die Mittelung über  $\delta V > n^{-1}$ . Nebst der *Polarisation*  $\vec{P}$  des Mediums betrachten wir die gemittelte Ladung

$$\rho(\vec{r}) = \sum_i \langle n_i(\vec{r}) q_i \rangle + \rho_{\text{ext}}(\vec{r}), \quad (4.2)$$

mit  $q_i$  die Ladung der  $i$ -ten Spezies und  $\rho_{\text{ext}}$  die externen Ladungen welche nicht zum Medium gehören. Üblicherweise sind die Konstituenten neutral,  $q_i = 0$ . Wir berechnen das durch die beiden Momente<sup>1</sup>  $\rho(\vec{r}')$  und  $\vec{P}(\vec{r}')$  erzeugte Potential am Ort  $\vec{r}$ , ( $\vec{r}' \in \delta V$ ),

$$\delta\varphi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{\rho(\vec{r}')\delta V}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{P}(\vec{r}')\delta V \cdot |\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.3)$$

Die Integration über  $\vec{r}'$  liefert

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int d^3r' \left[ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{P}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &= \int d^3r' \left[ \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - [\vec{\nabla}' \cdot \vec{P}(\vec{r}')] \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right]. \end{aligned}$$

Das makroskopische elektrische Feld  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  wird demnach durch die Gesamtladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r})$$

erzeugt,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho - 4\pi\vec{\nabla} \cdot \vec{P}(\vec{r}). \quad (4.4)$$

<sup>1</sup>Wir nehmen an, dass  $\vec{E}$  keine höheren Momente erzeugt.

Indem wir die elektrische Verschiebung

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \quad (4.5)$$

definieren erhalten wir (vgl. (4.4) und (4.5)) die erste inhomogene Maxwellgleichung MG I.i im Medium,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho(\vec{r}). \quad (4.6)$$

Üblicherweise ist  $q_i = 0$  und  $\rho = \rho_{\text{ext}}$  die vorgegebene Ladungsdichte im Problem.

Um das elektrische Feld  $\vec{E}$  zu finden, brauchen wir einen Zusammenhang zwischen  $\vec{D}$  (oder  $\vec{P}$ ) und  $\vec{E}$ . Üblicherweise nehmen wir an, dass das Medium eine *lineare Antwort* gibt,

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}, \quad \chi_e > 0. \quad (4.7)$$

$\chi_e$  heisst *elektrische Suszeptibilität* des Mediums. Mit

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad (4.8)$$

der *Dielektrizitätskonstanten* des Mediums, gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho/\varepsilon. \quad (4.9)$$

Da  $\varepsilon > 1$  ist, wird die Ladung  $\rho$  im Medium effektiv reduziert; gemäss (4.9) können wir die Resultate der Elektrostatik im Vakuum übernehmen können, indem wir im homogenen, isotropen Medium die Quellen abschirmen,

$$\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho(\vec{r})/\varepsilon. \quad (4.10)$$

Im *anisotropen* Medium gilt allgemeiner

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad \varepsilon_{ik} = \text{dielektrischer Tensor.} \quad (4.11)$$

Ein Medium kann auch nichtlokal (in Ort und Zeit) auf eine Störung reagieren, so dass sich das Feld  $\vec{D}(\vec{r}, t)$  aus  $\vec{E}(\vec{r}', t')$  durch eine Faltung ergibt,

$$D_i(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt \varepsilon_{ik}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') E_k(\vec{r}', t'). \quad (4.12)$$

Ein interessantes klassisches Problem ergibt sich, wenn der Raum verschiedene Medien enthält, z.B. ein dielektrisches Medium im Vakuum oder eingebettet in einem anderen Medium. Wir wollen verstehen, was an den Grenzflächen zwischen den Medien geschieht. Dazu betrachten wir die Grenzschicht zwischen zwei Medien und analysieren die Konsequenzen der Sätze von Gauss und Stokes, vgl. Abb. 4.4 Der Satz von Gauss gibt uns Informa-

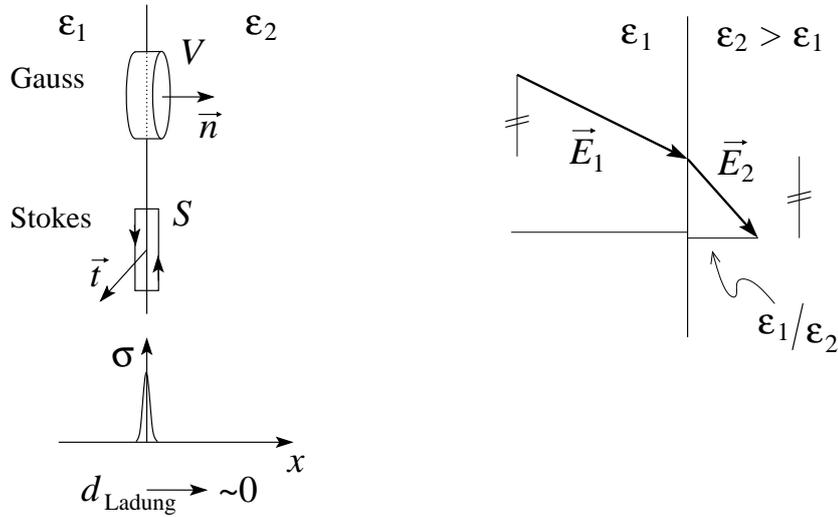


Abb. 4.4: Links: Zur Berechnung der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika untersuchen wir eine Gauss Box (Zylinder  $V$  über der Grenzfläche) und einen Stokesloop  $S$ . Die Flächenladungsdichte  $\sigma$  lebt auf einer atomaren Skala. Rechts: Das elektrische Feld  $\vec{E}$  an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika springt, wobei die parallele Komponente  $\vec{E}_{\parallel}$  stetig ist und die orthogonale Komponente  $\vec{E}_{\perp}$  um den Faktor  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$  springt.

tionen über die orthogonale Komponente der dielektrischen Verschiebung,

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \mathcal{A} = 4\pi\sigma \mathcal{A} \\ \longrightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} &= 4\pi\sigma. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Der Satz von Stokes gibt uns Informationen über die parallele Komponente des elektrischen Feldes,

$$\begin{aligned} \int_S d^2\sigma \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \vec{t} &= (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) \mathcal{L} \\ \longrightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \times \vec{n} &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Für eine ungeladene Grenzschicht mit  $\sigma = 0$  gilt (vgl. Abb. 4.4)

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\perp} \text{ stetig, } \vec{E}_{\perp} \text{ springt,} \\ \vec{D}_{\parallel} \text{ springt, } \vec{E}_{\parallel} \text{ stetig.} \end{aligned}$$

Das  $\vec{D}$ -Feld wird von einem dichteren Medium mit  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  angezogen aber daraus verdrängt und von einem dünneren Medium weggedrängt aber eingelassen, vgl. Abb. 4.5.

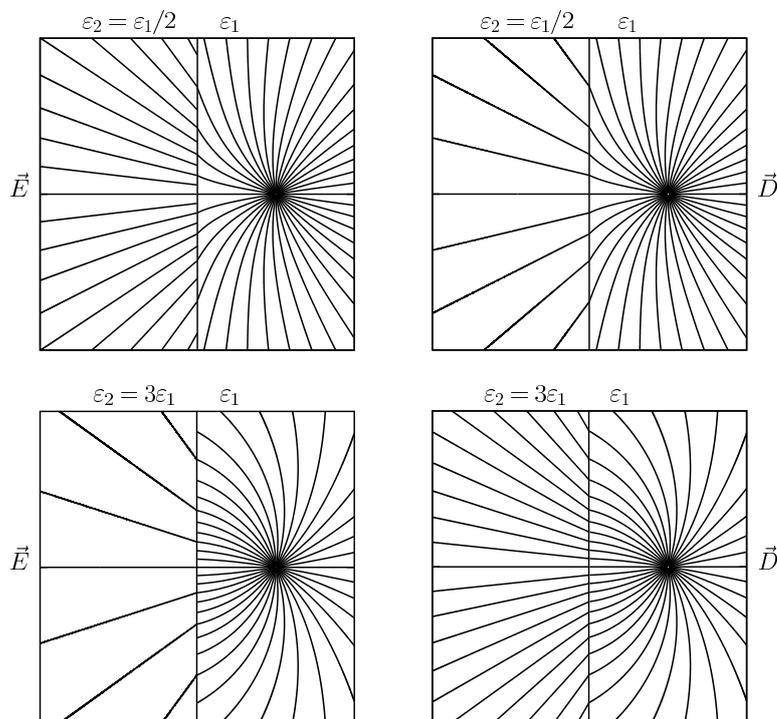


Abb. 4.5:  $\vec{E}$ -Felder (links) und  $\vec{D}$ -Felder (rechts) für die Konfiguration mit einer Linienladung in einem Dielektrikum mit  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  (oben: das Gebiet 2 ist dünner/isolierender) und  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  (unten: das Gebiet 2 ist dichter/metallischer). Im Fall  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$  stösst das Gebiet 2 die Feldlinien weg, und lässt sie rein; im Fall  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$  zieht das Gebiet 2 die Feldlinien an die Oberfläche, lässt sie aber nicht rein. Die Dichte der Feldlinien gibt ein Mass für die Stärke des Feldes (entsprechend haben wir ein 2D Problem gewählt).

Schliesslich leiten wir noch einen Ausdruck für die *elektrostatische Energie* im Medium her. Wir betrachten eine Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r})$ , welche ein elektrisches Potential  $\varphi(\vec{r})$  erzeugt,  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ . Die Erhöhung der Ladung um  $\delta\rho$  vergrössert die Energie um

$$\delta W = \int d^3r \delta\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}). \quad (4.15)$$

Die Ladung  $\delta\rho$  ändert das  $\vec{D}$ -Feld (und indirekt das  $\vec{E}$ -Feld) um den Betrag

$$\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{D} = 4\pi\rho(\vec{r}) \quad (4.16)$$

und Einsetzen in (4.15) ergibt nach partieller Integration

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \vec{E} \cdot \delta\vec{D}. \quad (4.17)$$

#### 4.1. ELEKTROSTATIK IM LINEAR POLARISIERBAREN MEDIUM 99

Die Integration liefert schliesslich die totale Energie

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_0^D \int d^3r (\vec{E} \cdot \delta\vec{D}). \quad (4.18)$$

Für ein *lineares* Medium gilt

$$\vec{E} \cdot \delta\vec{D} = \frac{1}{2} \delta(\vec{E} \cdot \vec{D}) \quad (4.19)$$

und (4.18) vereinfacht sich zu

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (\text{lineares Medium}). \quad (4.20)$$

Mit  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$  und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho$  ist (4.20) äquivalent zu

$$W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) \quad (\text{lineares Medium}). \quad (4.21)$$

In der obigen Betrachtung haben wir die Konfiguration durch Änderung von Ladung in einem fixierten dielektrischen Medium erzeugt. Neu können wir auch Energieänderungen infolge Veränderung des dielektrischen Mediums betrachten. Wir betrachten ein lineares Medium und ändern die Dielektrizitätskonstante

$$\varepsilon(\vec{r}) \rightarrow \varepsilon(\vec{r}) + \delta\varepsilon(\vec{r}), \quad (4.22)$$

z.B. via Verschiebung eines Dielektrikums im Vakuum. Dabei können wir die äusseren Parameter verschieden fixieren:

Q: Wir halten die externen Ladungen  $\rho$  konstant,  $\delta\rho = 0$ .

$\varphi$ : Wir halten das externe Potential  $\varphi$  konstant,  $\delta\varphi = 0$ , z.B. indem wir die das Feld erzeugende Elektroden mit Batterien auf konstantem Potential halten; entsprechend ist die Ladungsdichte  $\rho$  nicht mehr konstant.

Ziel unserer Analyse ist, die in beiden Fällen geleistete/erbrachte Arbeit aufgrund der Änderung von  $\varepsilon$  zu vergleichen. Der Ausdruck (4.21) gibt uns die Energieänderung

$$\delta W = \frac{1}{2} \int d^3r (\rho\delta\varphi + \varphi\delta\rho). \quad (4.23)$$

Halten wir die Ladung  $\rho$  fixiert, so finden wir

$$\delta W_Q = \frac{1}{2} \int d^3r \rho \delta\varphi_Q, \quad (4.24)$$

mit  $\delta\varphi_Q$  die durch  $\delta\varepsilon$  induzierte Potentialänderung. Um die Energieänderung bei fixem Potential zu finden starten wir mit dem gleichen ersten Schritt und machen anschliessend die Potentialänderung rückgängig. Dazu schliessen wir im zweiten Schritt die Batterie an (welche  $\varphi$  fixiert); selbige liefert eine Ladung  $\delta\rho_V$ , welche gerade die Änderung  $\delta\varphi_Q$  im Potential kompensiert,  $\delta\varphi = -\delta\varphi_Q$ . In diesem zweiten Schritt ändert sich die Energie um

$$\begin{aligned}\delta W &= \frac{1}{2} \int d^3r (\rho \delta\varphi + \delta\rho_V \varphi) \\ &\stackrel{(4.15)}{=} \int d^3r (\delta\rho_V \varphi).\end{aligned}\quad (4.25)$$

wobei wir (4.15), Energieänderung auf Grund von Ladungsänderung bei fixem  $\varepsilon(\vec{r})$ , benutzt haben. Aus (4.25) folgt

$$\begin{aligned}\delta W &= \int d^3r (\rho \delta\varphi) \stackrel{\delta\varphi = -\delta\varphi_Q}{=} - \int d^3r (\rho \delta\varphi_Q) \stackrel{(4.24)}{=} -2\delta W_Q \\ \delta W_v &= \delta W_Q + \delta W = -\delta W_Q.\end{aligned}\quad (4.26)$$

Wir sehen, dass bei Änderungen der Dielektrizitätskonstanten die Spezifikation der Randbedingung von vorrangiger Bedeutung ist: Die gleiche Änderung  $\delta\varepsilon$  kann eine Zunahme wie auch eine Abnahme der Systemenergie implizieren, je nachdem, ob die das Feld erzeugenden Ladungen oder Potentiale fixiert werden. Der Energieunterschied wird durch die Batterien erbracht, welche die Ladung  $\delta\rho_V$  im Potentialfeld  $\varphi$  verschieben müssen.

### Dielektrizitätskonstante $\varepsilon$

In diesem Abschnitt wollen wir typische Werte der Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon$  verstehen und berechnen. Die Polarisation  $\vec{P}$  ist via Suszeptibilität  $\chi_e$  mit dem *makroskopischen Feld*  $\vec{E}$  verknüpft,

$$\vec{P} = \chi_e \vec{E}. \quad (4.27)$$

Andererseits wird das einzelne Atom oder Molekül durch das lokale Feld  $\vec{E}^{\text{lokal}} (\neq \vec{e})$  polarisiert,

$$\vec{p} = \gamma \vec{E}^{\text{lokal}}. \quad (4.28)$$

Das lokale Feld  $\vec{E}^{\text{lokal}}$  am Ort eines Atoms erhalten wir, indem wir in einer Kugel mit Radius  $R$  um das Atom herum alle Atome entfernen. Diese Operation lässt das Feld am Ort des Atoms in einer symmetrischen Situation unverändert, z.B., wenn die Atome zufällig oder auf einem kubischen Gitter verteilt sind. Durch das Herausschälen der Kugel bleibt aber an deren Rand eine Polarisationsladung

$$\sigma_{\text{pol}} = \int_{\text{Box}} \frac{d^3V}{A} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = -(\vec{P}_a - \vec{P}_i) \cdot \vec{n} = -\vec{P} \cdot \vec{n} = -P \cos \vartheta$$

#### 4.1. ELEKTROSTATIK IM LINEAR POLARISIERBAREN MEDIUM 101

bestehen. Diese erzeugt am Ort des Atoms das zusätzliche Feld

$$E_p = \int d\Omega \frac{R^2 \sigma_{\text{pol}} \cos(\pi - \vartheta)}{R^2} = \frac{4\pi}{3} P,$$

und wir erhalten das totale Feld als Summe

$$\vec{E}^{\text{lokal}} = \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P}; \quad (4.29)$$

das Resultat ist unabhängig vom Radius  $R$  der Kugel, eine Folge des  $1/R^2$  Coulombgesetzes. Mit der Dichte  $n$  und der Definition  $\vec{P} = n\vec{p}$  erhalten wir

$$\vec{P} = n\gamma_{\text{pol}} \left( \vec{E} + \frac{4\pi}{3} \vec{P} \right) \quad (4.30)$$

und mit  $\vec{P} = \chi_e \vec{E}$ ,  $\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e$  resultiert daraus die Gleichung von Clausius-Mosotti

$$\gamma_{\text{pol}} = \frac{3}{4\pi n} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}. \quad (4.31)$$

Sie verbindet die mikroskopische Polarisierbarkeit  $\gamma_{\text{pol}}$  mit der makroskopischen Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$ .

Für eine Abschätzung von  $\gamma_{\text{pol}}$  (zusammen mit der Dichte  $n$  ergibt sich daraus eine Abschätzung für  $\varepsilon$ ) betrachten wir ein Atom oder Molekül in der harmonischen Approximation,

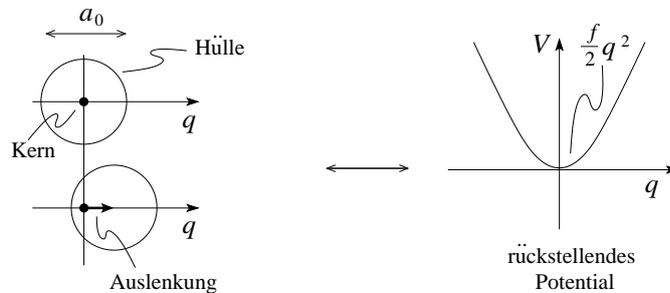


Abb. 4.6: Zur Abschätzung von  $\gamma_{\text{pol}}$  betrachten wir die durch ein elektrisches Feld erzeugte Verschiebung der Elektronenhülle gegenüber dem Atomkern in einer harmonischen Approximation.

$$V(q) \approx \frac{1}{2} \partial_q^2 V q^2 \equiv (f/2) q^2.$$

Die rüctreibende Kraft wird durch die Coulombwechselwirkung zwischen Kern und Hülle erzeugt; wenn die Deformation  $q$  den Radius  $a_0 \sim 1$  Å des Atoms erreicht, so wird die erzeugte Deformationsenergie von der Grösse

der Coulombenergie  $e^2/a_0$ , also ist  $f \sim e^2/a_0^3$ . Im  $\vec{E}$ -Feld wird das Atom polarisiert,  $f q_{\text{pol}} \approx eE$ , und mit  $p = e q_{\text{pol}} = \gamma_{\text{pol}} E$  erhalten wir

$$\gamma_{\text{pol}} \approx \frac{e^2}{f} \approx a_0^3 \approx 10^{-24} \text{cm}^3. \quad (4.32)$$

Für ein Gas mit  $n \approx 10^{19} \text{cm}^{-3}$  ergibt sich  $(4\pi/3)\gamma_{\text{pol}}n \sim 10^{-4}$  und demnach

$$\varepsilon_{\text{Gas}} \approx 1. \quad (4.33)$$

Im Festkörper ist  $n \approx 10^{23} \text{cm}^{-3}$  und  $(4\pi/3)\gamma_{\text{pol}}n \sim 1$ . Die Dielektrizitätskonstante von Festkörpern ist daher grösser als 1,

$$\varepsilon_{\text{Festkörper}} > 1. \quad (4.34)$$

Genaue Werte erfordern präzisere und auch aufwändigere Verfahren als unsere einfachen Abschätzungen. Typische Werte für Isolatoren und Halbleiter sind  $\varepsilon_{\text{Iso,HL}} \sim 1 - 20$  (z.B. NaCl: 5.9; Si: 12; Ge: 16; ZnO: 4.6; MgO: 3.0; SiO<sub>2</sub>: 4.5). In Metallen produzieren die freien Elektronen eine unendlich grosse Polarisierbarkeit im statischen Limes,

$$\varepsilon_{\text{Metall}}^{\text{statisch}} \rightarrow \infty. \quad (4.35)$$

## 4.2 Magnetostatik im linear polarisierbaren Medium

Wir folgen Schritt für Schritt der Herleitung in vorigen Kapitel. Mit der Maxwellgleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0$  für das mikroskopische  $\vec{b}$ -Feld gilt auch für die gemittelte magnetische Induktion  $\vec{B}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  und es existiert ein erzeugendes Vektorpotential  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Das  $\vec{B}$ -Feld polarisiert das Medium,

$$\vec{M}(\vec{r}) = \sum_i \langle n_i(\vec{r}) \vec{m}_i(\vec{r}) \rangle. \quad (4.36)$$

Nebst der *Magnetisierung*  $\vec{M}$  des Mediums betrachten wir die makroskopische Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$ , erzeugt durch bewegliche (freie) Ladungsträger im Medium. Zusammen erzeugen  $\vec{j}(\vec{r}')$  und  $\vec{M}(\vec{r}')$ ,  $\vec{r}' \in \delta V$ , am Ort  $\vec{r}$  das Potential

$$\delta \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(\vec{r}') \delta V}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\vec{M}(\vec{r}') \delta V \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (4.37)$$

Integration und partielle Integration liefert

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\vec{j}(\vec{r}') + c \vec{\nabla}' \times \vec{M}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (4.38)$$

## 4.2. MAGNETOSTATIK IM LINEAR POLARISIERBAREN MEDIUM 103

so dass das makroskopische Feld  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  durch die Gesamtstromdichte

$$\vec{j}(\vec{r}) + \underbrace{c \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r})}_{\vec{j}_M} \quad (4.39)$$

( $\vec{j}_M$  ist die durch  $\vec{M}$  erzeugte effektive Stromdichte) erzeugt wird,

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}) + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}). \quad (4.40)$$

Wir definieren das neue Feld  $\vec{H}$  (Magnetfeld)

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \quad (4.41)$$

und erhalten die Maxwellgleichungen I<sub>h</sub> und II<sub>i</sub> im statischen Limes,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & (\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0), \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, & (\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Um die magnetische Induktion  $\vec{B}$  zu finden, brauchen wir einen Zusammenhang zwischen  $\vec{H}$  (oder  $\vec{M}$ ) und  $\vec{B}$ . Gibt das Medium eine *lineare* Antwort, so gilt

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}. \quad (4.43)$$

$\chi_m$  heisst *magnetische Suszeptibilität* des Mediums. Mit

$$\mu = (1 + 4\pi\chi_m), \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (4.44)$$

$\mu =$  magnetische Permeabilität, gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \vec{j}. \quad (4.45)$$

In anisotropen Materialien gilt

$$B_i = \mu_{ik} H_k \quad (4.46)$$

und eine zusätzliche nichtlokalität impliziert den Zusammenhang

$$B_i(\vec{r}, t) = \int d^3r' \int dt' \mu_{ik}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') H_k(\vec{r}', t'). \quad (4.47)$$

An der Grenze zweier Medien verschiedener Permeabilität sind folgende Randbedingungen zu erfüllen:

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} A = 0 \\ \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

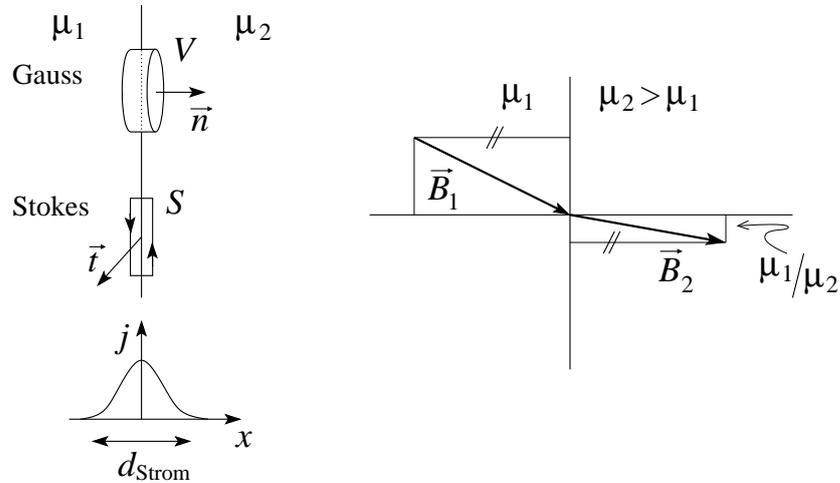


Abb. 4.7: Links: Zur Berechnung der Felder an der Grenzfläche zwischen zwei magnetisch aktiven Medien mit Permeabilitäten  $\mu_1$  und  $\mu_2$  untersuchen wir eine Gauss Box (Zylinder  $V$  über der Grenzfläche) und einen Stokesloop  $S$ . Die Flächenstromdichte  $K$  lebt je nach Ursprung auf einer mikro- oder makroskopischen Skala. Rechts: Die magnetische Induktion  $\vec{B}$  an der Grenzfläche zwischen zwei Medien springt, wobei die orthogonale Komponente  $\vec{B}_\perp$  stetig ist und die parallel Komponente  $\vec{B}_\parallel$  um den Faktor  $\mu_1/\mu_2$  springt.

$$\begin{aligned} \int_S d^2\sigma \vec{\nabla} \times \vec{H} \cdot \vec{t} &= (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \cdot (\vec{t} \times \vec{n}) \mathcal{L} = \frac{4\pi}{c} \vec{K} \cdot \vec{t} \mathcal{L} \\ \Rightarrow \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \frac{4\pi}{c} \vec{K}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Dabei bezeichnet  $\vec{K}$  die Flächenstromdichte  $\vec{j}_{\text{Fläche}} d_{\text{Strom}}$  [A/cm]. Für  $K = 0$  ist

$$\begin{aligned} \vec{B}_\perp \text{ stetig,} & \quad \vec{H}_\perp \text{ springt,} \\ \vec{B}_\parallel \text{ springt,} & \quad \vec{H}_\parallel \text{ stetig.} \end{aligned}$$

Für die Energie einer Feldverteilung erhält man analog zu (4.20) und (4.21)

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int d^3r (\vec{H} \cdot \delta \vec{B}), \quad W = \frac{1}{4\pi} \int_0^B \int d^3r (\vec{H} \cdot \delta \vec{B}), \quad (4.50)$$

und für ein *lineares Medium*

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H} \cdot \vec{B}, \quad W = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \vec{A}(\vec{r}).$$

Zur Abschätzung magnetischer Polarisierungseffekte machen wir wiederum einige dimensionelle Betrachtungen. Wir haben gesehen, dass Elektronen

#### 4.2. MAGNETOSTATIK IM LINEAR POLARISIERBAREN MEDIUM 105

typischerweise Momente der Grösse  $m \sim \mu_B = e\hbar/2mc \sim 10^{-19} \text{ G cm}^3$  erzeugen. Ein Moment  $\vec{m}$  wird im Feld  $\vec{H}$  ausgerichtet, mit dem Energiegewinn gegeben durch  $\mathcal{U} = -\vec{m} \cdot \vec{H}$ ; dieser Ausrichtung wirkt die Temperatur entgegen, so dass im Mittel ein Moment  $m\mathcal{U}/T \sim (\mu_B^2/T) H$  überlegt. Die resultierende Magnetisierungsdichte ist

$$M \sim \mu_B^2 n H/T \rightarrow \chi_m \sim \mu_B^2 n/T.$$

Mit  $\vec{m} \parallel \vec{H}$  ist  $\chi_m > 0$  und das Material ist paramagnetisch. Zur numerischen Abschätzung von  $\chi_m$  bemerken wir, dass  $1 \text{ G}^2 = 7.244 \cdot 10^{-9} \text{ K/\AA}^3$  und mit  $n \lesssim 10^{23} \text{ cm}^{-3}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \chi_m^{\text{para}} &\lesssim \frac{(10^{-19})^2 \text{ cm}^6 \cdot 7.244 \cdot 10^{-9} \text{ K} \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}}{10^{-24} \text{ cm}^3 \text{ cm}^3 T} \\ &\sim \text{K}/T. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Bei Raumtemperatur ist  $\chi_m \sim 10^{-2}$ . Dieser Wert gilt für Festkörper mit endlichen Momenten  $\vec{m}$  pro Atom, welche erst durch das Feld ausgerichtet werden. In Gasen ist  $\chi_m$  nochmals um einen Faktor  $10^{-4}$  kleiner. Haben die Atome keine endlichen Momente, so polarisiert das Magnetfeld dennoch die Atome; der Ursprung dieses Effektes ist quantenmechanisch, das Moment ist diamagnetisch. Im Hamiltonian (mit  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} \left( \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + \dots \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2} A^2 + \dots \end{aligned}$$

ist der zweite Term für den Bahnanteil des Paramagnetismus verantwortlich ( $\rightarrow \chi_m \sim \mu_B^2 n/T$ ), während der dritte Term den (Lamor-) Diamagnetismus  $\chi_m^{\text{dia}}$  erzeugt. Für eine Abschätzung von  $\chi_m^{\text{dia}}$  ersetzen wir in der Energie  $(e^2/mc^2)A^2$  das Vektorpotential  $A$  durch das Feld  $H \sim A/r$ ; die relevante Länge ist der atomare Radius  $r \sim a_0$ , welcher sich aus dem Vergleich zwischen kinetischer Energie  $\hbar^2/ma_0^2$  und potentieller Energie  $e^2/a_0$  ergibt  $\rightarrow a_0 \approx \hbar^2/me^2 \sim 0.5 \text{ \AA}$ . Damit erhalten wir  $\chi_m^{\text{dia}} \sim \mu_B^2 n/(e^2/a_0)$ ; im Vergleich mit dem paramagnetischen Ausdruck in (4.51) ist der diamagnetische Koeffizient um den Faktor  $T/(e^2/a_0) \sim T/10^5 \text{ K}$  reduziert,

$$\chi_m^{\text{dia}} \sim -10^{-5}. \quad (4.52)$$

Schliesslich erwähnen wir den (Pauli Spin-Para) Magnetismus freier Elektronen in Metallen: deren Spins werden wiederum durch das Feld ausgerichtet und wir können auf den Ausdruck (4.51) für  $\chi_m^{\text{para}}$  zurückgreifen, wobei die relevante Temperatur der Energie der Elektronen entspricht, welche sich (aufgrund des Pauli Prinzips / der Fermi Statistik) mit hohen Geschwindigkeiten durch das Metall bewegen. Diese 'heissen' Elektronen haben eine

kinetische Energie der Grössenordnung  $E_{\text{kin}} \approx E_{\text{pot}} \sim e^2/a_0$  und liegt im Elektron-Volt Bereich, d.h.,  $T = T_{\text{Fermi}} \sim 10^5$  K. Entsprechend finden wir die Suszeptibilität freier Elektronen im Bereich

$$\chi_m^{\text{freie } e^-} \sim 10^{-5}. \quad (4.53)$$

Freie Elektronen zeigen auch einen (Landau-) Diamagnetismus; er ist um den Faktor  $1/3$  schwächer als obiger Pauli-Spin-Paramagnetismus).

Ein interessantes Phänomen ist der Ferromagnetismus bei dem sich alle mikroskopischen Momente ausrichten: Aus (4.51) sehen wir, dass  $\chi_m \rightarrow \infty$  für  $T \rightarrow 0$ . Mit

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (4.54)$$

besagt  $\chi_m \rightarrow \infty$ , dass bereits ein Feld  $H \rightarrow 0$  eine endliche Magnetisierungsdichte  $\vec{M} > 0$  erzeugt. Tatsächlich zeigen gewisse Materialien bereits bei endlichen Temperaturen (unterhalb der kritischen Temperatur  $T_c$ ) ein Ordnungsphänomen: Die atomaren magnetischen Dipole richten sich spontan aus und wir erhalten einen *Ferromagneten*:

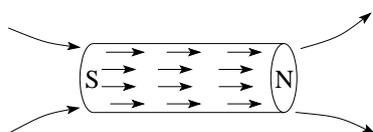


Abb. 4.8: Spontane Ausrichtung der atomaren magnetischen Dipole in einem Ferromagneten (schematisch, ohne Berücksichtigung von Domänen, siehe später).

$$\chi_m^F \sim \frac{1}{T - T_c}, T_c < T, \quad (4.55)$$

$$\vec{M}(\vec{H} = 0) \neq 0, T < T_c.$$

Typische Werte für kritische Temperaturen sind  $T_c \sim 627$  K,  $1043$  K,  $1388$  K für Ni, Fe, Co. Die durch einen Ferromagneten erzeugte maximale Magnetisierungsdichte (Sättigungsmagnetisierung) ist von der Grössenordnung<sup>2</sup>

$$M_{\text{Sätt}} \sim n\mu_B \sim 10^{22} \cdot 10^{-19} \sim 10^3 \text{ Oe} \sim 10^3 \text{ G für } M,$$

$$\Rightarrow B_{\text{Sätt}} = 4\pi M_{\text{Sätt}} \sim 10^4 \text{ G}. \quad (4.56)$$

Ferromagnetismus ist ein quantenmechanisches Phänomen — wir erwähnen hier lediglich einige grundsätzliche Zusammenhänge: Die Ausrichtung der atomaren Momente im Feld leuchtet ein. Ein endliches  $T_c$  mit  $\chi_m \rightarrow \infty$  für  $T \rightarrow T_c$  besagt, dass sich die Momente *spontan*, d.h. bei  $H = 0$ , bereits ausrichten. Diese Ausrichtung beruht auf dem quantenmechanischen Phänomen

<sup>2</sup> $M$  in ‘Gauss für  $M$ ’ oder Oersted gemessen, 1 ‘Gauss für  $M$ ’ entspricht  $4\pi$  ‘Gauss für  $B$ ’, denn  $B = H + 4\pi M$ . Am besten gibt man  $4\pi M$  in Gauss an.

#### 4.2. MAGNETOSTATIK IM LINEAR POLARISIERBAREN MEDIUM 107

der Austauschwechselwirkung; in ferromagnetischen Materialien ordnen sich die Momente parallel, in anti-ferromagnetischen Materialien ordnen sich benachbarte Momente antiparallel. Unterhalb von  $T_c$  richten sich die Momente aus und gewinnen die Austauschenergie

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{m}_i \cdot \vec{m}_j, \quad J > 0,$$

wobei sich die Austauschenergie im sub eV Bereich bewegt. Es ist aber ungünstig, den ganzen Körper in eine Richtung zu magnetisieren: das entstehende Magnetfeld *kostet* die Energie  $\mathcal{H} = \int dB H/4\pi$ . Als Kompromiss bilden sich Domänen aus (Weissche Bezirke/Domänen). Deren Grösse hängt von der Geometrie und Beschaffenheit des Körpers ab, typischerweise  $\sim 5 \cdot 10^8$  Fe-Atome im Volumen  $(10^3 \text{ \AA})^3$  für Eisen. Man kann sich diese Domänen als Supermomente vorstellen, welche sich durch ein äusseres Feld ausrichten lassen. Die Suszeptibilität involviert dann die Ausrichtung dieser ‘Supermomente’. Typische  $M(H)$  Beziehungen einer Einzeldomäne und eines reversiblen Ferromagneten haben die in Abb. 4.9 skizzierte Form. In Realität sieht die Magnetisierungskurve  $M(H)$  nochmals verschieden aus:

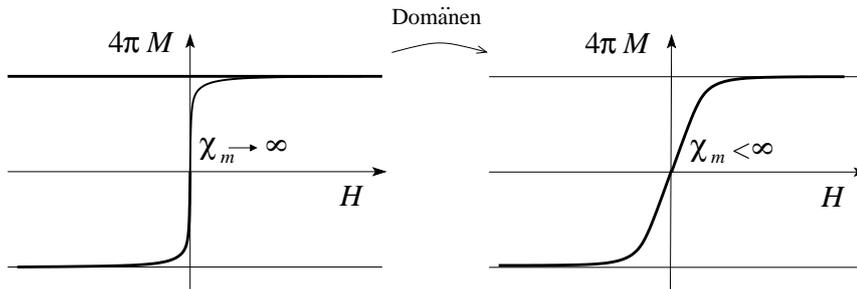


Abb. 4.9:  $M(H)$  einer individuellen Domäne (links) und eines reversiblen Ferromagneten (rechts). Die Suszeptibilität hängt von der Grösse der ‘Supermomente’ resp. Domänen ab.

Die Domänen können sich nicht ungehindert im Feld drehen; kristalline Anisotropie und Pinningeffekte halten die Domänen über Bereiche  $\delta H$  fest und lassen sie erst bei genügend grossen Feldüberhöhungen  $\delta H$  flippen<sup>3</sup>. Es ergibt sich eine irreversible, hysteretische  $M(H)$ -Beziehung wie in Abb. 4.10 skizziert, welche von der Vergangenheit des Körpers abhängt. Der Punkt  $(H, M) = (0, M_r)$  definiert die Stärke des resultierenden Permanentmagneten, der Punkt  $(H, M) = (H_c, 0)$  seine magnetische Stabilität. Oberhalb des Curiepunktes  $T_c$  verschwindet das Ordnungsphänomen und der Ferromagnet wird zum Paramagneten,  $M(H=0) = 0$ ,  $\chi_m \sim 1/(T - T_c)$  nimmt rasch normale Werte an, da die Supermomente verschwinden,  $\mu_{\text{super}}^2 n_{\text{super}} \rightarrow \mu_B^2 n$ .

<sup>3</sup>Barkhausen-Rauschen beim Ummagnetisieren eines Magneten.

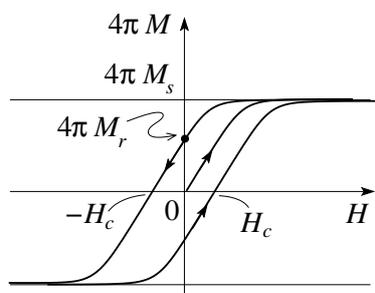


Abb. 4.10:  $M(H)$  für einen realen Magneten: die jungfräuliche Kurve startet im Ursprung. Die Remanenz  $M_r \sim M_s/2$  typischerweise gibt das gefangene Moment im Nullfeld nach der Sätturierung des Magneten im hohen Feld. Die Koerzitivität  $H_c \sim 10 - 1000$  Oersted gibt den Widerstand des Magneten gegen eine Ummagnetisierung im Feld. Die saturierte Magnetisierung misst etwa  $4\pi M_s \sim 10000$  Gauss, entsprechend ist  $\chi_m \sim 10 - 10^3$ .

Es stellt sich natürlich unmittelbar die Frage, ob es ein elektrisches Analogon zum Ferromagneten gibt. Tatsächlich gibt es Materialien, welche ein spontanes elektrisches Dipolmoment erzeugen. Sie heissen *Ferroelektrika*, die geordnete Phase heisst die *pyroelektrische Phase*. Allerdings generieren solche pyroelektrischen Phasen *kein langzeitstabiles* elektrisches Dipolmoment. Ein solches Moment würde im Körperinnern ein *elektrisches Feld* erzeugen, in welchem Ladungsträger *Kriechströme* fließen, welche das Moment abbauen. Ebenso werden *Ladungsträger aus der Umgebung* (elektrische Monopole) sich so an den Oberflächen anlagern, dass das Moment verschwindet. Beispiel eines Ferroelektrikums ist Turmalin — frisch gebrochenes Turmalin zeigt ein Moment.

Schliesslich noch zwei Worte zu  $\varepsilon$  und  $\mu$ . Der Vergleich von

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu \vec{H} = \vec{H} + 4\pi \vec{M} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} \end{aligned} \quad (4.57)$$

zeigt, dass  $\varepsilon \leftrightarrow 1/\mu$

$$\varepsilon > 1 \quad \leftrightarrow \quad \mu < 1$$

Dielektrizität  $\leftrightarrow$  Diamagnetismus.

Betrachte aber die Momente  $\vec{p}$  und  $\vec{m}$  in den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Während  $\langle \vec{E} - n\vec{p} \rangle < \vec{E}$  ist, wird  $\vec{B}$  durch  $\vec{m}$  verstärkt,  $\langle \vec{B} + n\vec{m} \rangle > \vec{B}$ ; warum?

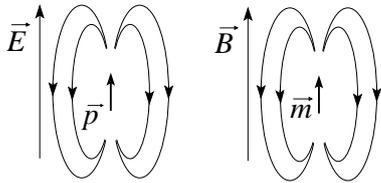


Abb. 4.11: Momente  $\vec{p}$  und  $\vec{m}$  in den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , die einmal abgeschwächt ( $\vec{E}$ ) und ein ander mal verstärkt ( $\vec{B}$ ) werden.

### 4.3 Beispiele zur Elektro- und Magnetostatik

Ein typisches Beispiel ist die

$$\left. \begin{array}{l} \text{dielektrische} \\ \text{dia-/paramagnetische} \end{array} \right\} \text{Kugel im Feld.} \quad (4.58)$$

Hier diskutieren wir kurz die dielektrische Kugel ( $\epsilon$ , Radius  $R$ ) im Vakuum ( $\epsilon_v = 1$ ). Das äussere Feld erfülle  $\vec{E} \sim \vec{E}_0 \parallel \hat{z}$  asymptotisch. Wir wählen Kugelkoordinaten,  $m = 0$  (azimutale Symmetrie). Das Potential  $\varphi$  erfüllt

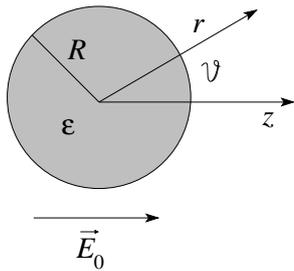


Abb. 4.12: Dielektrische Kugel im äusseren elektrischen Feld.

die Poissongleichung  $\Delta\varphi = 0$  und wir machen wir den Ansatz

$$\varphi_{\text{innen}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} r^{\ell} P_{\ell}(\cos \vartheta), \quad r < R, \quad (4.59)$$

$$\varphi_{\text{ausseren}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (b_{\ell} r^{\ell} + c_{\ell} r^{-\ell-1}) P_{\ell}(\cos \vartheta), \quad r > R. \quad (4.60)$$

Asymptotisch ist  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = (0, 0, E_0) \sim (0, 0, -\partial_z\varphi) \Rightarrow \varphi^{\infty} = -zE_0 = -E_0 r \cos \vartheta$  und wir erhalten die Koeffizienten  $b_{\ell} = -E_0 \delta_{\ell 1}$ . Die  $a_{\ell}$  und  $c_{\ell}$  folgen aus den Randbedingungen bei  $r = R$ ,

$\vec{E} \parallel$  stetig:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \vartheta} \Big|_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_a}{\partial \vartheta} \Big|_R, \\ \Rightarrow a_1 &= -E_0 + \frac{c_1}{R^3}, \\ a_{\ell} &= \frac{c_{\ell}}{R^{2\ell+1}}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

$\vec{D}_\perp$  stetig:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \Big|_R &= -\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} \Big|_R, \\ \Rightarrow \varepsilon a_1 &= -E_0 - 2 \frac{c_1}{R^3}, \\ \varepsilon \ell a_\ell &= -(\ell + 1) \frac{c_\ell}{R^{2\ell+1}}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Damit erhalten wir die Koeffizienten  $a_\ell = -(3/2 + \varepsilon) E_0 \delta_{\ell 1}$  und  $c_\ell = [(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)] \vec{E}_0 \delta_{\ell 1}$  und die Potentiale und Felder (benutze, dass  $r \cos \vartheta = z$ )

$$\begin{aligned} \varphi_i &= -\frac{3}{\varepsilon + 2} E_0 z \\ \vec{E}_i &= \frac{3}{\varepsilon + 2} \vec{E}_0 = \text{const} < \vec{E}_0, \\ \varphi_a &= E_0 z + \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \frac{R^3}{r^2} \cos \vartheta. \\ \vec{E}_a &= \vec{E}_0 + \vec{E}_p \end{aligned} \quad (4.64)$$

mit  $\vec{E}_p =$  Dipolfeld eines Dipols  $\vec{p} = [(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)] R^3 \vec{E}_0$  im Ursprung (alternativ einer Polarisation  $\vec{P} = (3/4\pi R^3) \vec{p} = (3/4\pi)[(\varepsilon - 1)/(\varepsilon + 2)] \vec{E}_0$  in  $V_R$ ,

$$\vec{E}_i = \frac{3}{2 + \varepsilon} \vec{E}_0 = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3} \vec{P}. \quad (4.65)$$

Die Ladung auf der Oberfläche reduziert das  $\vec{E}$ -Feld im Innern, vgl. Abb. 4.13. Die Oberflächenpolarisationsladung ist

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{pol}} &= \int_{\text{Box}} \frac{d^3V}{A} (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) = -(\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \cdot \vec{n}_{21} \\ &= \vec{P} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} E_0 \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Die Resultate für eine Kavität (Kugel mit  $\varepsilon = 1$ ) im Medium  $\varepsilon$  erhält man durch die Substitution  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon^{-1}$ . Es resultiert das Innenfeld<sup>4</sup>

$$\vec{E}_i = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \vec{E}_0 = \vec{E}_0 - \frac{4\pi}{3} \vec{P} > \vec{E}_0 \quad \text{mit} \quad \vec{P} = -\frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon - 1}{1 + 2\varepsilon} \vec{E}_0. \quad (4.67)$$

<sup>4</sup>Die 'Polarisation'  $\vec{P}$  wird durch die Oberflächenladung erzeugt und entspricht nicht einer materiellen 'Dipoldichte'. Beachte, dass dieses Resultat verschieden von demjenigen von Clausius-Mosotti ist: In der Herleitung zur Clausius-Mosotti Gleichung wurden Dipole in einer Kugel entfernt ohne eine Relaxation zu berücksichtigen, währenddem hier die Stetigkeitsbedingungen korrekt am Rand der Kugel erfüllt werden.

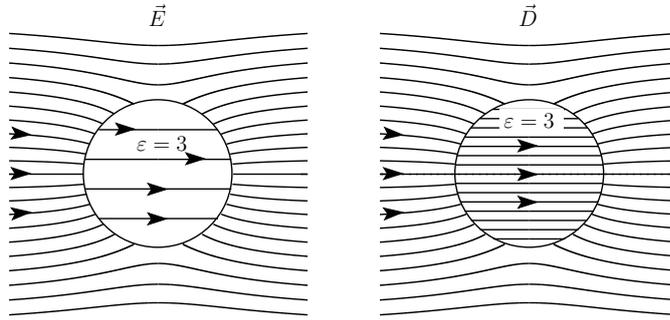


Abb. 4.13: Verlauf der Feldlinien von  $\vec{E}$  und  $\vec{D}$  in einem dielektrischen Zylinder im homogenen externen Feld  $E_0$  (dieses Beispiel dient der Illustration des Falles einer Kugel). Im Aussenraum ist  $\vec{D} = \vec{E} \sim E_0 \hat{z}$ , im Zylinder ist  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = 2\varepsilon/(1 + \varepsilon)$ ; mit  $\varepsilon = 3$  ergibt sich eine Feldüberhöhung um einen Faktor  $3/2$  im  $\vec{D}$ -Feld und eine Verminderung um  $1/2$  im  $\vec{E}$ -Feld. In der Zeichnung gibt die Feldliniendichte die Stärke des Feldes an.

Das Resultat  $\vec{E}_{\text{innen}} = \text{konstant}$  ist sehr interessant und nicht trivial. Es gilt für homogene, ellipsoid-förmige Körper. Im allgemeinen ist weder  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{P}$  noch  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$ , einfach konstant im Körper. Dies führt uns ganz natürlich auf folgende Fragestellung: Gegeben ein Körper im äusseren Feld  $\vec{F}_{\text{aussen}}$ , wie hängt das innere Feld  $\vec{F}_{\text{innen}}$  mit  $\vec{F}_{\text{aussen}}$  zusammen? Dabei ist  $\vec{F}$  entweder  $\vec{E}$  oder  $\vec{H}$ . Die Antwort ist einfach für homogene, lineare Materialien in der Form eines Ellipsoides, und besonders einfach für Rotationsellipsoide mit  $\vec{F}$  parallel zur Rotationsachse. Offensichtlich erfüllt das obige Beispiel all diese Bedingungen. Für den symmetrischen Fall gilt,

$$\begin{aligned}
 E_i + n \overbrace{(D_i - E_i)}^{4\pi P_i} &= E_a, & H_i + n \overbrace{(B_i - H_i)}^{4\pi M_i} &= H_a, \\
 E_i &= \frac{1}{1 - n(1 - \varepsilon)} E_a, & H_i &= \frac{1}{1 - n(1 - \mu)} H_a,
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

wobei  $D_i = \varepsilon E_i$  und  $B_i = \mu H_i$  benutzt wurde. Für die Kugel ist der *Depolarisationsfaktor*  $n = \frac{1}{3}$ . Für einen zigarrenförmigen Körper, vgl. Abb. 4.14, ist  $n \approx \frac{d^2}{w^2} \ln \frac{w}{d}$  (entspricht ungefähr einem Zylinder<sup>5</sup>). Für einen Ufoförmigen Körper ist  $n \approx 1 - \frac{\pi}{2} \frac{d}{w}$  (entspricht ungefähr einer Scheibe). Für  $\vec{F}_a$  nicht parallel zur Achse wird der Zusammenhang  $\vec{F}_{(i)} \leftrightarrow \vec{F}_{(a)}$  durch den Dipoltensor  $n_{jk}$  beschrieben,

$$\begin{aligned}
 F_j^{(i)} + n_{ik} \left( \mathcal{F}_k^{(i)} - F_k^{(i)} \right) &= F_j^{(a)}, \\
 \vec{F} \leftrightarrow \vec{E}, \vec{H}; \quad \vec{\mathcal{F}} \leftrightarrow \vec{D}, \vec{B}.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

<sup>5</sup>  $\vec{H}$  senkrecht zur Achse:  $n = \frac{1}{2}$

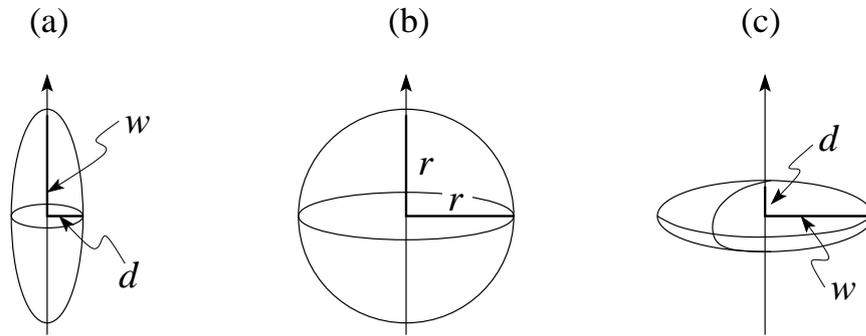


Abb. 4.14: Geometrien der prolaten, sphärischen und oblaten Körper.

#### 4.4 Strom-Feld Beziehung in Medien

Die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  erzeugen in Medien Polarisationsfelder  $\vec{P}$  (via Ladungsverschiebung) und  $\vec{M}$  (via Ströme). Diese Felder können auch *Ströme*  $\vec{j}$  in den Medien erzeugen, wenn *freie Ladungsträger* vorhanden sind. Wie sieht dann die konstitutive Gleichung  $\vec{j}(\vec{E}, \vec{B})$  aus? Die Frage nach  $\rho(\vec{E}, \vec{B})$  ist eher unüblich (in Spezialfällen aber relevant), da die Felder keine statischen Ladungen erzeugen (aber Ladungsverschiebungen  $\vec{P}$ ).

Im *Metall* werden die freien Ladungsträger (Elektronen, Ladung  $-e$ ) durch ein elektrisches Feld  $\vec{E}$  beschleunigt<sup>6</sup>

$$m_e \dot{\vec{v}} = -e\vec{E}, \quad (4.70)$$

und es ergibt sich kein stationärer Zustand, wenn die Teilchen nicht durch Verunreinigungen, Kristallschwingungen gestreut werden. Mit der Streuzeit  $\tau$ , deren Berechnung ein quantenmechanisches Problem ist, erhalten wir eine mittlere Geschwindigkeit

$$\langle \vec{v} \rangle = -e\vec{E} \frac{\tau}{m_e}$$

und damit das *Ohm'sche Gesetz*

$$\begin{aligned} \vec{j} &= -en\langle \vec{v} \rangle = \sigma \vec{E}, \\ \sigma &= \frac{e^2 n \tau}{m_e}, \quad \text{die Leitfähigkeit.} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Einheiten, in MKSA:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \frac{1}{\Omega \text{ m}} \\ \Omega &= \text{Ohm} = \frac{\text{V}}{\text{A}}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

<sup>6</sup>Dieses Phänomen ist nichttrivial und nur quantenmechanische Betrachtungen liefern ein volles Verständnis.

in cgs:

$$\begin{aligned} [\sigma] &= \text{sec}^{-1}, \\ \frac{1}{\Omega \text{ m}} &= 9 \cdot 10^9 \text{sec}^{-1}. \end{aligned}$$

Im Metall vermag ein  $\vec{B}$ -Feld keine Ströme zu generieren, wohl aber im *Supraleiter*.

Im Supraleiter gilt das *London-Gesetz*

$$\vec{j} = -\rho_s \vec{A} = -\frac{c}{4\pi} \frac{1}{\lambda^2} \vec{A}, \quad (4.73)$$

mit der London-Eindringtiefe

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{4\pi n e^2}{m c^2}. \quad (4.74)$$

Die Grösse  $\rho_s$  heisst ‘superleitende Dichte’ (ist dimensionell keine Dichte). In (4.73) ist  $\vec{A}$  transversal zu nehmen,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Wieder ist ein Verständnis von (4.73) nur mit Hilfe der Quantenmechanik möglich - einige hübsche Eigenschaften von Supraleitern können wir aber mit (4.73) herleiten, z.B. der Meissner-Ochsenfeldeffekt, siehe Übungen.

Beachte, dass der metallische Strom  $j = \sigma E$  die Energie  $\vec{j} \cdot \vec{E} > 0$  dissipiert, der supraleitende diamagnetische Strom  $\vec{j} = -\rho_s \vec{A}$  aber widerstandsfrei fliesst.



# Kapitel 5

## Elektrodynamik

In diesem Kapitel wenden wir uns den *dynamischen Aspekten* des Elektromagnetismus zu und entwickeln die volle dynamische Form der Maxwellgleichungen. Dabei starten wir von den Vakuumverhältnissen und gehen dann zu Medien über. Schliesslich diskutieren wir die energetischen Aspekte der Theorie, Erhaltung von Impuls und Energie.

### 5.1 Elektrodynamik im Vakuum und im Medium

Wiederum steht ein Experimentalphysiker am Anfang der Entwicklung: Michael Faraday (1831). Betrachte eine Schleife  $\partial S$ , materiell ( $\partial S = \mathcal{L}$  ein Leiter) oder immateriell. In einer materiellen Schleife wird ein (transienter) Strom induziert, falls:

1. in einer benachbarten Schleife der Strom verändert wird,
2. die benachbarte Schleife (bei fixem Strom) relativ zur ersten Schleife bewegt wird,
3. ein Permanentmagnet relativ zur ersten Schleife bewegt wird.

Offensichtlich wird durch alle diese Aktionen das  $\vec{B}$ -Feld am Ort der ersten Schleife verändert. Man findet (experimentell), dass die relevante Grösse der durch die Schleife fliessende Induktionsfluss  $\Phi(s)$  ist,

$$\begin{aligned}\Phi(S) &= \int_S d^2\sigma \vec{B} \cdot \vec{n} = \int_S d^2\sigma \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot \vec{n} \\ &= \int_{\partial S} d\vec{\ell} \cdot \vec{A},\end{aligned}\tag{5.1}$$

wobei der Umlauf  $\partial S$  und  $\vec{n}$  eine Rechtsschraube definieren, vgl. Abb. 5.1.

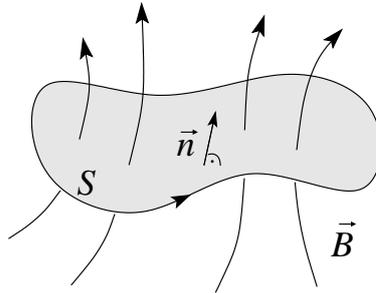


Abb. 5.1: Schleife  $\partial S$  und Induktionsfluss; der Umlauf  $\partial S$  und die Normale  $\vec{n}$  definieren eine Rechtsschraube.

Der in der Schleife induzierte Strom wird durch ein elektrisches Feld  $E'$  angeworfen, die elektromotorische Kraft ist  $\mathcal{E}$ . Via  $I = j\mathcal{A} = \sigma\mathcal{A}E'$ , wobei  $\mathcal{A}$  der Leiterquerschnitt und  $\sigma$  die Leitfähigkeit bezeichnet, skaliert  $I$  mit  $E'$ ; damit kann  $I$  und auch  $E'$  als Funktion von  $d\Phi/dt$  angegeben werden<sup>1</sup>. Faradays Resultate ergeben, dass die elektromotorische Kraft wie folgt von der Zeitableitung des Flusses abhängt,

$$\mathcal{E} = \int_{\partial S} d\vec{\ell} \cdot \vec{E}' = -k \frac{d}{dt} \int_S d^2\sigma \vec{B} \cdot \vec{n} = -k \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5.2)$$

Die totale Zeitableitung weist darauf hin, dass sich sowohl  $\vec{B}$  wie auch  $S$  ändern können. Das Vorzeichen in (5.2) definiert die Lenz'sche Regel: Der durch  $\partial_t\Phi$  induzierte Strom  $I$  in der Schlaufe wirkt der Änderung des Induktionsflusses entgegen. Es bleibt die Konstante  $k$  zu finden. Dimensionell gilt

$$\begin{aligned} [E] \cdot \text{Länge} &= k \cdot [B] \cdot \frac{\text{Länge}^2}{\text{Zeit}} \\ k &= \frac{1}{\text{Geschwindigkeit}} \stackrel{?}{=} \frac{1}{c}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dass  $k$  wirklich  $\frac{1}{c}$  ist, folgt aus der Galileiinvarianz von (5.2): Es ist irrelevant, welcher der beiden Leiter in 2 bewegt wird. (5.2) drückt diesen Sachverhalt aus, indem die totale Ableitung  $d/dt$  in Erscheinung tritt; man kann  $\vec{B}$  oder  $S$  ändern und erhält gleichermassen eine elektromotorische Kraft  $\mathcal{E}$ . Auch braucht  $\partial S$  nicht materiell zu sein; (5.2) gilt als Beziehung zwischen Feldern im Raum. Zu beachten ist aber, dass  $\vec{E}'$  im Ruhesystem des Leiters gemessen wird. Was, wenn der Leiter sich bewegt? Die totale Ableitung in (5.2) nimmt diesen Effekt mit: wir schreiben die totale Ableitung in der Form

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}), \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>Durch 1,2,3 wird  $\Phi$  zeitlich verändert, folglich ist  $d\Phi/dt$  die relevante Grösse

wo  $\partial_t$  ist die zeitliche Veränderung der Felder und  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$  die Bewegung der Schleife im Feld berücksichtigen. Damit erhalten wir

$$\frac{d\vec{B}(\vec{r} - \vec{v}t)}{dt} = \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = \partial_t\vec{B} + \vec{\nabla} \times (\vec{B} \times \vec{v}) + \vec{v}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}).$$

Anstelle von (5.2) finden wir

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} d\vec{\ell} [\vec{E}' - k(\vec{v} \times \vec{B})] &= -k \int_S d^2\sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} \\ &= \oint_{\partial S} d\vec{\ell} \cdot \vec{E}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Hier bezeichnet  $\vec{E}'$  das Feld im System der Schleife und  $\vec{E}$  das Feld im Laborsystem. Wir finden zwei Resultate:

1. das  $\vec{E}$ -Feld im Laborsystem hängt mit dem  $\vec{E}'$ -Feld im System der Schleife zusammen gemäss

$$\vec{E}' = \vec{E} + k(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (5.6)$$

2. Eine im Feld  $\vec{B}$  bewegte Ladung  $q$  erfährt die Kraft  $\vec{F}_L = (q/c) \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ : Wir prüfen dies via der Konsistenz der Kräfte ( $\vec{v}' = 0$  im System der Schleife),

$$\begin{aligned} \vec{F}' &= q\vec{E}' = q\vec{E} + qk(\vec{v} \times \vec{B}) = q\vec{E} + \vec{F}_L = \vec{F} \\ \Rightarrow k &= 1/c. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Mit Hilfe des Satzes von Stokes erhalten wir aus dem experimentellen Befund

$$\oint_{\partial S} d\vec{\ell} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{c} \int_S d^2\sigma \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n}, \quad \forall S,$$

das Faraday'sche Gesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0 \quad (\text{MG IIh})$$

in differentieller Form<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Beachte: Die Maxwellgleichungen sind Lorentz-invariant, nicht Galilei-invariant. Im Limes  $v \rightarrow 0$  ( $v \ll c$ ) geht die Lorentz-Invarianz in die Galilei-Invarianz über. Die Beziehung (5.6) ändert sich für grosse  $v$ , nicht aber das Faraday'sche Induktionsgesetz. Die obige Diskussion brauchten wir lediglich um den Wert  $k = 1/c$  zu finden ( $k = 1/c$  im Limes  $v \rightarrow 0$  genügt).

### 5.1.1 Magnetische Energie

Mit dem Faraday'schen Gesetz (MG IIIh) können wir die Herleitung von (3.60) und (4.17),

$$\delta W = \frac{1}{c} \int d^3r \delta \vec{A} \cdot \vec{j}, \quad \text{magnetische Feldenergie,} \quad (5.8)$$

nachholen. Betrachte eine Schleife  $\partial S$  mit Strom  $I$ . Deren Bewegung im Feld erzeugt eine elektromotorische Kraft  $\mathcal{E} = -(1/c)d\Phi/dt$ . Um den Strom  $I$  zu halten, muss diese elektromotorische Kraft kompensiert werden, was mit dem Arbeitsaufwand

$$\delta W = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} = \frac{I}{c} \delta \Phi \quad (5.9)$$

verbunden ist<sup>3</sup> Wir betrachten den Aufbau einer Stromdichte–Feld Konfiguration. Der Aufbau erfolge adiabatisch (unendlich langsam), somit ist  $\partial_t \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  und  $\vec{j}$  kann als Superposition von Schleifen betrachtet werden. Betrachte eine elementare Schleife, vgl. Abb. 5.2, Die Änderung der

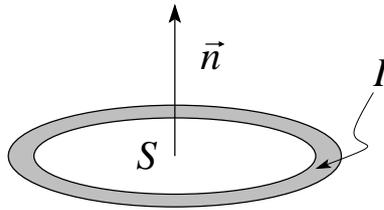


Abb. 5.2: Elementare Schleife zum Aufbau einer Stromdichtekonfiguration.  $I = j \Delta \sigma$

magnetischen Induktion um  $\delta \vec{B}$  erfordert die Arbeit

$$\Delta(\delta W) = \frac{j \Delta \sigma}{c} \int_S d^2 \sigma \vec{n} \cdot \delta \vec{B}. \quad (5.10)$$

Mit  $\delta \vec{B} = \vec{\nabla} \times \delta \vec{A}$  ergibt sich unter Verwendung des Satzes von Stokes

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W) &= \frac{j}{c} \oint_{\partial S} \underbrace{d\vec{\ell} \Delta \sigma}_{d^3r \vec{\ell}} \cdot \delta \vec{A} \\ \Rightarrow \delta W &= \frac{1}{c} \int d^3r \vec{j}(\vec{r}) \cdot \delta \vec{A}(\vec{r}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

<sup>3</sup>Betrachte dazu die Umformung

$$\begin{aligned} \delta W &= F dx = F v dt \\ &= qE \left( \frac{v}{\mathcal{L}_{\partial S}} \right) \mathcal{L}_{\partial S} dt \\ &= I \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} dt = \frac{I}{c} \delta \Phi. \end{aligned}$$

Das Ampère Gesetz  $\vec{\nabla} \times \vec{H} = (4\pi/c)\vec{j}(\vec{r})$  liefert mit  $\delta\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \delta\vec{A}) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{H} \times \delta\vec{A})$  für eine lokalisierte Stromdichteverteilung

$$\delta W = \frac{1}{4\pi} \int d^3r \vec{H} \cdot \delta\vec{B}. \quad (5.12)$$

Für das Vakuum und das lineare Medium folgt sofort

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r B^2(\vec{r}) \quad (\text{Vakuum}) \quad (5.13)$$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int d^3r \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (\text{lineares Medium})$$

$$W = \frac{1}{2c} \int d^3r \vec{j} \cdot \vec{A} \quad (\text{Vakuum/lineares Medium}).$$

Damit haben wir die Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{B}, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

gefunden. Sie bestimmen Divergenz und Rotation von  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  aus  $\rho$  und  $\vec{j}$  und sind somit vollständig. Aber nicht konsistent! Denn die Divergenz der letzten Gleichung (Ampère) gibt

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (5.15)$$

Das ist für die Statik in Ordnung, nicht aber für den dynamischen Fall, wo die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$\partial_t\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

erfüllt sein muss. Wir schaffen Abhilfe, indem wir mit  $\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}/4\pi$  die Kontinuitätsgleichung in die Form

$$\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\partial_t\vec{E}}{4\pi} + \vec{j} \right) = 0 \quad (5.16)$$

bringen. Im Ampère'schen Gesetz ist dann der Quellterm  $(4\pi/c) \cdot \vec{j}$  durch

$$\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} \quad (5.17)$$

zu ersetzen. Damit erhalten wir die nunmehr konsistenten *Maxwellgleichungen*

gen

$$\begin{array}{ll}
 \text{im Vakuum} & \text{im Medium} \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\rho, \\
 \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\
 \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = 0, \\
 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}. & \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{D} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}.
 \end{array} \quad (\text{MG})$$

Die Komplettierung der Arbeit von Coulomb, Gauss, Biot-Savart, Ampère und Faraday durch Maxwell mittels Hinzufügen des Termes  $(1/c)\partial_t\vec{E}$ ,  $(1/c)\partial_t\vec{D}$  mag unbedeutend aussehen, ist es aber nicht! Erst dieser Term lässt die Maxwellgleichungen elektromagnetische Wellen als Lösung generieren und unifiziert Elektromagnetismus und Optik. Man sagt, Maxwell habe den Term  $(1/c)\partial_t\vec{E}$  wegen der Inkonsistenz mit der Kontinuitätsgleichung gefunden, entsprechend obiger Herleitung. Das ist nicht korrekt, siehe später einige Worte dazu.

### 5.1.2 Maxwellgleichungen in Medien

Einige Bemerkungen zu den Maxwellgleichungen in Medien; deren Herleitung folgt dem Schema im Kapitel 4. Es gelten die mikroskopischen Gleichungen

$$\begin{array}{ll}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = 4\pi\eta, & \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0, \\
 \vec{\nabla} \times \vec{e} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{b} = 0, & \vec{\nabla} \times \vec{b} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{e} = \frac{4\pi}{c}\vec{i};
 \end{array} \quad (5.18)$$

dabei bezeichnen  $\eta$  und  $\vec{i}$  die mikroskopischen Ladungs- und Stromdichteverteilungen. Mittelung über Distanzen  $L \approx 10^{-6}\text{cm} \approx 10^2$  atomare Distanzen wäscht räumliche *und* zeitliche Fluktuationen aus und wir erhalten die makroskopischen Maxwellgleichungen im Medium. Mit  $\vec{E} = \langle \vec{e} \rangle$  und  $\vec{B} = \langle \vec{b} \rangle$  folgt sofort

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\partial_t\vec{B} = 0. \quad (5.19)$$

Die inhomogenen Gleichungen sind mühsamer,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\langle\eta\rangle, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\partial_t\vec{E} = \frac{4\pi}{c}\langle\vec{i}\rangle. \quad (5.20)$$

Durch Multipolentwicklung erhält man

$$\begin{aligned}
 \langle\eta\rangle &= \rho - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} + \dots \Rightarrow \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} + \dots, \\
 \langle\vec{i}\rangle &= \vec{j} + \partial_t\vec{P} + c\vec{\nabla} \times \left[ \vec{M} + \vec{P} \times \frac{\vec{v}}{c} \right] + \dots, \\
 \Rightarrow \vec{H} &= \vec{B} - 4\pi \left( \vec{M} + \vec{P} \times \frac{\vec{v}}{c} \right) + \dots.
 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dabei bezeichnet  $\vec{v}$  die globale Bewegung des Mediums. Einsetzen von (5.20) ergibt die Maxwellgleichungen im Medium. Der Mittelungsprozess ist eine (triviale) Rechnerei, sauber ausgeführt im Buch von J.D. Jackson. Wir lernen nicht viel Neues dabei.

## 5.2 Skalar- und Vektor-Potentiale

Im Prinzip können wir die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{H}$  aus den Maxwellgleichungen und den konstitutiven Gleichungen für  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  finden. Das Einführen von Potentialen  $\varphi$  und  $\vec{A}$  ist nicht obligatorisch, aber praktisch (in der Quantenmechanik obligatorisch). Erstens reduzieren wir dadurch die Anzahl der Freiheitsgrade, indem wir (zweitens) die homogenen Gleichungen identisch lösen. Aus  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  (im ganzen Raum!) folgt  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  und Einsetzen in MG III gibt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E} + c^{-1} \partial_t \vec{A}) = 0$$

(auch im ganzen Raum) und es folgt

$$\vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (5.22)$$

Zusammen erhalten wir die Felder aus den Potentialen gemäss

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}, \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \varphi. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Wir sehen, dass jetzt das elektrische Feld auch eine transversale Komponente  $\partial_t \vec{A}$  haben kann: Erzeugt  $\vec{A}(t)$  ein zeitlich veränderliches  $\vec{B}$ -Feld, so ist  $\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$ , folglich hat  $\vec{A}$  eine transversale Komponente und somit auch  $\vec{E}$ .

Mit (5.23) haben wir die homogenen Maxwellgleichungen gelöst; die inhomogenen Gleichungen bestimmen dann die Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  gemäss

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho &\Rightarrow \Delta\varphi + \frac{1}{c} \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} &\Rightarrow \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \varphi \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Die Gleichungen (5.24) sind nicht unabhängig:  $(1/c)\partial_t(5.24a) + \vec{\nabla} \cdot (5.24b)$  ergibt

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}] &= -\vec{\nabla} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})] \\ &= -(4\pi/c) [\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Wir erhalten konsistent, dass  $\vec{\nabla} \cdot (\text{Wirbelfeld}) = 0$  und  $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ , die Ladung erhalten ist.

### Eichtransformation

Wir können (5.24) weiter vereinfachen, indem wir die Eichfreiheit benutzen: Die Analyse von (5.23) zeigt, dass  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  unter der Eichtransformation

$$\begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi, \\ \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\partial_t\chi,\end{aligned}\quad (5.26)$$

unverändert bleiben,

$$\begin{aligned}\vec{B}' &= \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}, \\ \vec{E}' &= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A}' - \vec{\nabla}\varphi' = -\frac{1}{c}\partial_t(\vec{A} + \vec{\nabla}\chi) - \vec{\nabla}\left(\varphi - \frac{1}{c}\partial_t\chi\right) \\ &= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\varphi = \vec{E}.\end{aligned}$$

Die Eichfreiheit (5.26) erlaubt uns, eine zusätzliche Bedingung an die Potentiale zu stellen, z.B. können wir die *Coulomb-, Strahlungs-, oder Transversale Eichung*<sup>4</sup>

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5.27)$$

wählen. Dann erhalten wir aus (5.25) die *Poissongleichung für  $\varphi$*  und eine *Wellengleichung für  $\vec{A}$* ,

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= -4\pi\rho, \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\vec{A} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\partial_t\varphi.\end{aligned}\quad (5.28)$$

In der Coulombeichung hat das Skalarfeld keine eigene Dynamik; das skalare Potential  $\varphi$  folgt der Evolution von  $\rho$  *instantan*,

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5.29)$$

Andererseits hat das  $\vec{A}$ -Feld eine eigene Dynamik und wird durch den rein transversalen Anteil

$$\vec{j}_t = \vec{j} - \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\partial_t\varphi \quad (5.30)$$

der Gesamtstromdichte  $\vec{j}$  getrieben;  $\vec{A}$  muss also transversal sein, wie durch (5.27) vorgegeben. Dass  $\vec{j}_t$  transversal ist, ergibt sich aus folgenden Manipulationen:

$$\begin{aligned}\vec{j}_t &= \vec{j} - \frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\partial_t\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left[\Delta \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \vec{\nabla} \int d^3r' \frac{\partial_t\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi}\left[(\Delta - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right].\end{aligned}$$

<sup>4</sup>Umeichen auf die Coulombgleichung ist durch Lösen von  $\Delta\chi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  immer möglich.

Der Operator

$$\Delta - \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times$$

filtert gerade die transversale Komponente  $\vec{j}_t$  aus der Stromdichte  $\vec{j}$  heraus,

$$\vec{j}_t = \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \int d^3r' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (5.31)$$

oder<sup>5</sup> in Fourierdarstellung,

$$\vec{j}_\perp(\vec{k}) = -\vec{k} \times \vec{k} \times \frac{\vec{j}(\vec{k})}{k^2}.$$

Der longitudinale Strom  $\vec{j}_l = (1/4\pi) \vec{\nabla} \int d^3r' \partial_t \rho(\vec{r}')/|\vec{r} - \vec{r}'|$  folgt aus der Evolution der Dichte  $\rho$  und wird bereits durch  $\varphi$  berücksichtigt, weshalb er aus der Gleichung für  $\vec{A}$  rausfällt. Für das  $\vec{A}$ -Feld erhalten wir schliesslich

$$\left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_t, \quad \vec{A} = \vec{A}_t. \quad (5.32)$$

Die Bezeichnung Coulomb- und Transversaleichung sind klar; sie stammen von  $\Delta\varphi = -4\pi\rho$  (Coulombproblem) und  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , d.h.  $\vec{A}$  ist rein transversal. Da das Strahlungsfeld nur  $\vec{A}$  involviert, erklärt sich auch der Name Strahlungseichung. Eine weitere praktische Eichung ist die *Lorentzeichung*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \varphi = 0. \quad (5.33)$$

Durch Lösen von  $[\Delta - c^{-2} \partial_t^2] \chi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + c^{-1} \partial_t \varphi$  können wir immer auf die Lorentzeichung transformieren. Einsetzen in (5.24) gibt uns zwei Wellengleichungen für  $\varphi$  und  $\vec{A}$ ,

$$\begin{aligned} \left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \varphi &= -4\pi\rho, \\ \left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] \vec{A} &= -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Die Lösungen von (5.34) sind retardiert, im Einklang mit Kausalität und Endlichkeit von  $c$ . Wie kann dann das instantane Verhalten von  $\varphi$  in der Coulomb-eichung richtig sein? Betrachte z.B. zwei Teilchen. Deren Wechselwirkung wird von beiden Feldern  $\varphi$  und  $\vec{A}$  erzeugt. Welcher Anteil in der Wechselwirkung von welchem Feld stammt, hängt von der physikalischen Situation ab: In dynamischen Situationen ( $\omega > 0$ ) mit grossen Distanzen  $\gtrsim c/\omega$  erzeugt das  $\vec{A}$ -Feld einen Beitrag, der die instantane Komponente von  $\varphi$  in  $\vec{E}$  aufhebt,  $\vec{E}$  wird dann retardiert. In quasi-stationären Situationen ist andererseits das Coulomb-Feld  $\varphi(\vec{r})$  dominant und Retardationseffekte sind vernachlässigbar.

<sup>5</sup>einfacher:  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_t = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} - \partial_t \Delta\varphi/4\pi = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial_t \rho = 0$

Schliesslich erwähnen wir noch die Eichung

$$\varphi = 0. \quad (5.35)$$

In diesem Fall übernimmt die longitudinale Komponente von  $\vec{A}$  gerade die Rolle von  $\varphi$  in der Coulombgleichung.

### Zu James Clark Maxwell und den Potentialen

Das Konzept eines  $\vec{A}$ -Feldes war bereits Michael Faraday bekannt (elektrotonische Intensität). William Thomson, der spätere Lord Kelvin, führte die Beziehung  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  ein. Dieser Idee folgend schrieb Maxwell für das elektrische Feld  $\vec{E} \sim -\dot{\vec{A}}$ , daraus folgte das Faraday'sche Induktionsgesetz. Später fand er die Verschiebungsströme im Ampéregesetz (Term  $\partial_t \vec{E}/c$ ), aber nicht via direkter Folgerung aus der Ladungserhaltung, sondern durch eher konfuse Argumente basierend auf elastischen Eigenschaften des elektrischen Feldes. Maxwell interpretierte  $\vec{A}$  später als eine Art Impuls, der Analogie

$$\begin{aligned} \vec{E} &\sim \dot{\vec{A}} \\ \vec{F} &\sim \dot{p} \end{aligned}$$

folgend. Heaviside (ein Elektroneur, bekannt von der Heavisidefunktion  $\Theta(x)$  und der Heaviside Schicht<sup>6</sup> verbannte die Potentiale als unphysikalisch aus den Maxwellgleichungen. Mit der Quantenmechanik reetablierten sich die Potentiale, zuerst im Zusammenhang mit Teilchen im  $\vec{A}$ -Feld<sup>7</sup>, der Etablierung der Quantenelektrodynamik als Eich-Feldtheorie und der Verallgemeinerung dieser Konzepte auf nicht-Abelsche Eichfeldtheorien (Yang und Mills). Beachte, dass die Londoneichung  $\vec{j} = -\rho_s \vec{A}$ , (4.73), dem  $\vec{A}$ -Feld ebenfalls direkte physikalische Bedeutung zuschreibt (1935).

## 5.3 Lösung der Wellengleichung

Die getriebenen Wellengleichungen (5.32) und (5.34) sind alle vom Typ

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Psi = -4\pi f(\vec{r}, t) \quad (5.36)$$

(es genügt, eine skalare Gleichung zu betrachten). Unsere Aufgabe besteht darin, die zugehörige Greensche Funktion zu finden,

$$\left[ \Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right] G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 4\pi \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'); \quad (5.37)$$

<sup>6</sup>Ionosphäre: Die Schicht der Atmosphäre, welche elektromagnetische Strahlung reflektiert und Radioverbindungen um den Erdball herum ermöglicht, zum Beispiel im die Verbindung zwischen England und Neufundland im Jahre 1902

<sup>7</sup>Aharonov-Bohm Effekt (1959); viel früher (193\*) von Walter Frank, ein Sommerfeldschüler, erwähnt.

wir wählen freie Randbedingen. Die Lösung zu (5.36) ergibt sich dann zu

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_0(\vec{r}, t) + \int d^3 r' dt' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t'), \quad (5.38)$$

wobei  $\Psi_0$  eine Lösung des homogenen Problems ist. Isotropie und Translationsinvarianz in Raum und Zeit implizieren, dass  $G$  nur von  $|\vec{r} - \vec{r}'|$  und  $t - t'$  abhängt. O.B.d.A setzen wir  $\vec{r}' = 0, t' = 0$ . Mit dem Fourieransatz

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} G(\vec{k}, \omega) \\ \delta^3(\vec{r}) \delta(t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned} \quad (5.39)$$

erhalten wir aus (5.37)

$$\begin{aligned} \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) G(\vec{k}, \omega) &= -4\pi \\ \Rightarrow G(k, \omega) &= \frac{-4\pi c^2}{\omega^2 - c^2 k^2}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Die Rücktransformation  $\vec{k} \rightarrow \vec{r}$  ergibt

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \omega) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \frac{4\pi}{8\pi^3} e^{-i\omega t} \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\int_{-1}^1 dz \frac{e^{ikrz}}{k^2 - \omega^2/c^2}}_{\frac{1}{kr} \frac{2 \sin kr}{k^2 - \omega^2/c^2}} \\ &= \frac{1}{i\pi r} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^\infty dk \frac{k e^{ikr}}{k^2 - \omega^2/c^2}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Das letzte Integral lösen wir mit dem Residuensatz. Der Integrand hat Pole bei  $k = \pm\omega/c$ . Der Pol bei  $k = +\omega/c$  erzeugt eine auslaufende Welle

$$\propto e^{i\omega(r-ct)/c},$$

währenddem der Pol bei  $k = -\omega/c$  eine einlaufende Welle erzeugt,

$$\propto e^{-i(\omega/c)(r+ct)}.$$

Den Integrationsweg müssen wir nun so wählen, dass wir nach Massgabe der Randbedingung, einlaufende oder auslaufende Welle, den richtigen Pol einfangen. Berücksichtigen wir, dass wir mit  $r > 0$  den Integrationsweg oben schliessen müssen,  $i(k_r + ik_i)r = ik_r r - k_i r$ ,  $k_i > 0$ , so erzeugt der Integrationsweg  $\gamma_r$  ( $\gamma_a$ , vgl. Abb. 5.3) gerade eine auslaufende/retardierte

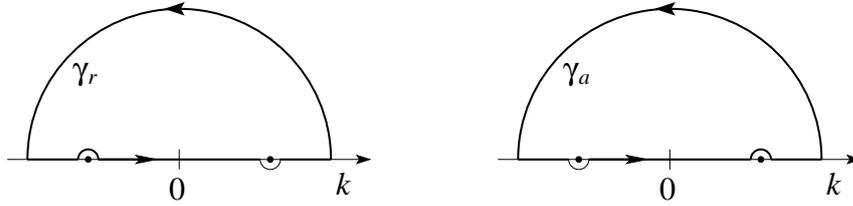


Abb. 5.3: Integrationskonturen für die avancierte und retardierte Welle.

(einlaufende/avancierte) Welle. Wir erhalten schliesslich

$$\begin{aligned}
 G^r(r, \omega) &= \frac{1}{i\pi r} e^{-i\omega t} \frac{2\pi i (\omega/c) e^{i\omega/c r}}{2\omega/c}, \\
 &= \frac{1}{r} e^{i(\omega/c)(r-ct)} \quad \text{und genauso} \quad (5.42) \\
 G^a(r, \omega) &= \frac{1}{r} e^{-i(\omega/c)(r+ct)}.
 \end{aligned}$$

Mit folgendem Trick können wir sofort eine Beziehung zwischen der in der komplexen  $\omega \in \mathbb{C}$  Ebene fortgesetzten Funktion  $G(r, \omega \in \mathbb{C})$  und den Randbedingungen aufstellen: Es ist

$$\begin{aligned}
 G^r(r, \omega \in \mathbb{R}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} G(r, \omega + i\delta), \\
 G^a(r, \omega \in \mathbb{R}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0^+} G(r, \omega - i\delta). \quad (5.43)
 \end{aligned}$$

Diese Zusammenhänge folgen sofort aus obiger Diskussion und Betrachten der Pole des Integranden, vgl. Abb. 5.4.

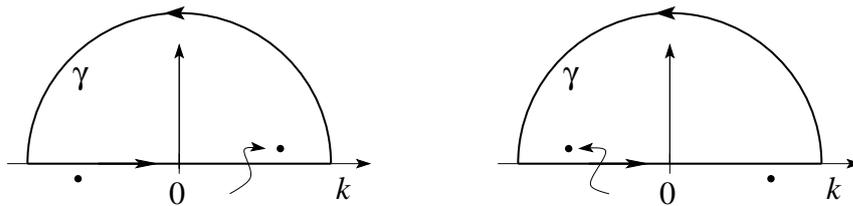


Abb. 5.4: Lage der Pole der Green-Funktion. Links: retardierte Welle,  $\omega + i\delta$  erzeugt Pole bei  $k = \pm(\omega + i\delta)/c$ . Rechts: avancierte Welle,  $\omega - i\delta$ , erzeugt Pole bei  $k = \pm(\omega - i\delta)/c$ .

Die zweite Transformation  $\omega \rightarrow t$  ergibt

$$G^{r,a}(r, t) = \frac{1}{r} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{\pm i\omega(r \mp ct)/c} \quad (5.44)$$

$$= \frac{1}{r} \delta(t \mp r/c). \quad (5.45)$$

Gehen wir auf die Koordinaten  $\vec{r}, \vec{r}', t, t'$  zurück, so lautet das Resultat

$$G^{r,a}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{\delta[t - (t' \pm |\vec{r} - \vec{r}'|/c)]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} : \quad (5.46)$$

Die retardierte und avancierte Green Funktion erfüllen folgende Aufgaben:

$G^r$ : gibt das Signal erzeugt am Ort  $\vec{r}'$  zur Zeit  $t'$  zu einer späteren Zeit  $t = t' + |\vec{r} - \vec{r}'|/c$  am Ort  $\vec{r}$ . Das Signal bewegt sich kausal mit Geschwindigkeit  $c$ .

$G^a$ : gibt das Signal erzeugt am Ort  $\vec{r}'$  zur Zeit  $t'$  zu einer früheren Zeit  $t = t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$  am Ort  $\vec{r}$ , wobei das Signal rückwärts in der Zeit propagiert.

Folgende Problemstellungen sind generisch:

1. Zu einer aus  $t = -\infty$  einfallenden freien Welle

$$\Psi_{\text{in}}(\vec{r}, t), \quad \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \Psi_{\text{in}} = 0,$$

gesellt sich bei  $t > 0$  ein durch eine Quelle  $f(\vec{r}', t') \sim 0$  erzeugtes Signal. Die Lösung bei  $t > 0$  lautet

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_{\text{in}}(\vec{r}, t) + \int d^3r' dt' G^r(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t'). \quad (5.47)$$

das durch  $\Psi_{\text{in}}$  erzeugte Signal manifestiert sich zu allen Zeiten, das Integral gibt den durch die Quelle  $f$  erzeugten Beitrag bei  $t > 0$ .

2. Zu einer späteren Zeit  $t \rightarrow \infty$  ist die freie Lösung  $\Psi_{\text{out}}(\vec{r}, t)$  bekannt. Die Lösung

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi_{\text{out}}(\vec{r}, t) + \int d^3r' dt' G^a(\vec{r}, t; \vec{r}', t') f(\vec{r}', t') \quad (5.48)$$

garantiert, dass nach Ausschalten der Quelle  $f$  kein Signal mehr die Lösung  $\Psi_{\text{out}}$  im Limes langer Zeiten stört.

Das zumeist angetroffene Problem hat die Form 1) mit  $\Psi_{\text{in}} = 0$ . Der Ausdruck (5.47) zeigt besonders eindrucklich, wie sich die Lösung aus der Superposition von Kugelwellen zusammensetzt, welche durch die Quelle am Ort  $\vec{r}'$  zur Zeit  $t'$  erzeugt werden und mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  propagieren, vgl. Abb. 5.5.

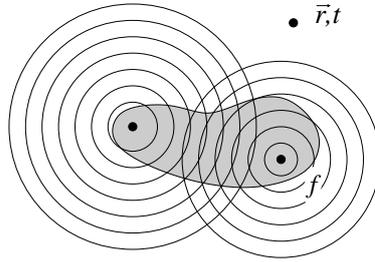


Abb. 5.5: Superposition von Kugelwellen, die sich mit Geschwindigkeit  $c$  von einer Störung ausbreiten (Huyghens Prinzip).

## 5.4 Energie- und Impulserhaltung eines Materiefeld Systems

Elektromagnetische Felder tragen Energie, transportieren dieselbe in Energiestromdichten, haben Impulsdichte, welche wiederum in Impulsstromdichten fließt; Ziel dieses Abschnittes ist es, die vier Größen, Energiedichte, Energiestromdichten, Impulsdichte, und Impulsstromdichte zu finden. Dazu betrachten wir die durch die elektromagnetischen Felder geleistete Arbeit an einer bewegten Ladung  $q$ ,

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F} \cdot \vec{v} \delta t \\ &= q \left( \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \cdot \vec{v} \delta t \\ &= q \vec{E} \cdot \vec{v} \delta t;\end{aligned}$$

das Magnetfeld leistet keine Arbeit, da  $\vec{F}_{\vec{B}} \perp \vec{v}$ . Gehen wir zu kontinuierlichen Ladungs- und Stromdichteverteilungen über, so wird im Volumen  $V$  die Leistung

$$P = \int_V d^3r \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (5.49)$$

von den Feldern auf die Materie übertragen. Diese Leistung muss irgendwoher kommen: Wir setzen

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi} \left( \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} \right),$$

benutzen die Identität

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{H}),$$

und finden, dass

$$\int_V d^3r \vec{j} \cdot \vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r \left( c \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} \right). \quad (5.50)$$

Für ein lineares Medium beschreiben die beiden letzten Terme gerade die zeitliche Änderung der Energie im Volumen  $V$ ,

$$\frac{1}{4\pi} \int_V d^3r (\vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} + \vec{H} \cdot \partial_t \vec{B}) = \partial_t \int_V d^3r \frac{\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}}{8\pi}; \quad (5.51)$$

der Ausdruck  $u = [\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}]/8\pi$  ist gerade die *Energiedichte* des elektromagnetischen Feldes. Den ersten Term in (5.50) schreiben wir auf ein Oberflächenintegral um,

$$\frac{c}{4\pi} \int_V d^3r \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \frac{c}{4\pi} \int_{\partial S} d^2r (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot \vec{n}. \quad (5.52)$$

Der Ausdruck  $\vec{S} = (c/4\pi)(\vec{E} \times \vec{H})$  ist die *Energieflussdichte* durch eine Fläche.  $\vec{S}$  heisst *Poynting-Vektor* und hat die Dimension Energiedichte  $\cdot$  Geschwindigkeit = Energie/(Fläche  $\cdot$  Zeit). Die Kombination von (5.50), (5.51), und (5.52) ergibt das Resultat

$$\int_V d^3r (\vec{j} \cdot \vec{E} + \partial_t u) = - \int_{\partial V} d^2r \vec{S} \cdot \vec{n}, \quad (5.53)$$

d.h. die Energieänderung von Materie und Feldern in  $V$  ist gleich der in  $V$  hineinfließenden elektromagnetischen Energie. In differentieller Form hat diese Energieerhaltung die Form

$$\partial_t u + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0; \quad (5.54)$$

die Summe der Änderungen der elektromagnetischen und der mechanischen Energie ist 0. Beachte, dass die mechanische Energie in eine gerichtete oder ungerichtete Bewegung der Materie resultieren kann. Im letzten Fall wird die (thermische) Energie dissipiert (und via Strahlung wieder ins elektromagnetische Feld zurückgeführt). Vorsicht ist auch geboten, wenn dissipative Medien, z.B. Ferromagnete mit hysteretischer Charakteristik, vgl. Abb. 5.6, im Spiel sind. Z.B. können wir die Magnetisierungs Schleife  $M(H)$  durchlaufen und dabei die Energie  $\oint \vec{H} \cdot d\vec{M}$  dissipieren; solche Terme müssen in

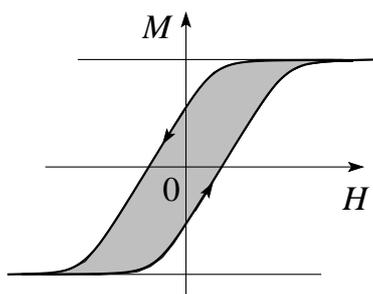


Abb. 5.6: Hysterese: Das Flächenintegral  $\oint d\vec{M} \cdot \vec{H}$  widerspiegelt die dissipierte magnetische Energie.

(5.53) und (5.54) zusätzlich berücksichtigt werden. Besonders einfach ist der Sachverhalt bei *Teilchen-Feld Konfigurationen* im Vakuum mit

$$\underbrace{\partial_t \int_V d^3r \frac{E^2 + B^2}{8\pi}}_{E_{\text{Feld}}} + \underbrace{\int_V d^3r \vec{j} \cdot \vec{E}}_{E_{\text{Teilchen}}} = - \oint_S d^2r \vec{n} \cdot \vec{S}. \quad (5.55)$$

Zur Herleitung der Impulsdichte und des assoziierten Stromes betrachten wir den Impuls des Teilchen–Feld Systems: Mit  $\vec{p} = \vec{F} = q(\vec{E} + (\vec{v}/c) \times \vec{B})$  ist die zeitliche Veränderung des mechanischen Impulses gegeben durch

$$\partial_t \vec{P} = \int_V d^3r (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}/c). \quad (5.56)$$

Eliminieren von  $\rho$  und  $\vec{j}$  mit Hilfe von

$$\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}/4\pi \quad \text{und} \quad \vec{j} = [c\vec{\nabla} \times \vec{B} - \partial_t \vec{E}]/4\pi$$

ergibt die Beziehung

$$\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}/c = [\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) + c^{-1} \vec{B} \times \partial_t \vec{E} - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})]/4\pi.$$

Wir ersetzen

$$\begin{aligned} \vec{B} \times \partial_t \vec{E} &= -\partial_t(\vec{E} \times \vec{B}) + \vec{E} \times \partial_t \vec{B}, \\ \partial_t \vec{B} &= -c\vec{\nabla} \times \vec{E} \end{aligned}$$

und addieren (aus Symmetriegründen) den Term

$$\vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) = 0.$$

Damit erhalten wir den in  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  symmetrischen Ausdruck

$$\begin{aligned} \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}/c &= [\vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \\ &\quad + \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B})]/4\pi - \partial_t(\vec{E} \times \vec{B})/4\pi c \end{aligned} \quad (5.57)$$

Die Ausdrücke der Form

$$\vec{z}(\vec{\nabla} \cdot \vec{z}) - \vec{z} \times (\vec{\nabla} \times \vec{z})$$

lassen sich als Divergenz eines Tensors (=Vektor) schreiben: Mit

$$\begin{aligned} \zeta_{\alpha\beta} &= z_\alpha z_\beta - \delta_{\alpha\beta} \vec{z} \cdot \vec{z}/2 \quad \text{ist} \\ \sum_\beta \partial_\beta \zeta_{\alpha\beta} &= [\vec{z}(\vec{\nabla} \cdot \vec{z}) - \vec{z} \times (\vec{\nabla} \times \vec{z})]_\alpha. \end{aligned}$$

Wir definieren den *Maxwellschen Spannungstensor*

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left[ E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B}) \right] \quad (5.58)$$

und erhalten aus (5.56), (5.57) und (5.58) die Beziehung

$$\begin{aligned} \int_V d^3r \left[ \left( \rho \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right) + \frac{1}{4\pi c} \partial_t (\vec{E} \times \vec{B}) \right] &= \oint_{\partial V} d^2r T_{\alpha\beta} n_\beta \quad (5.59) \\ \partial_t \vec{P}_{\text{Teilchen}} + \partial_t \vec{P}_{\text{Feld}} &= \text{Impulsfluss aus } V. \end{aligned}$$

Damit identifizieren wir

$$\vec{P}_{\text{Feld}} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{4\pi c} \quad (5.60)$$

als elektromagnetische Impulsdichte der Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  und den Maxwellschen Spannungstensor als Tensor der Impulsstromdichte —  $T_{\alpha\beta}$  ist der Strom der Impulsdichte  $\alpha$  in Richtung  $\beta$ . Somit haben wir folgende Grössen gefunden:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2), & \text{Energiedichte (Skalar),} & (5.61) \\ \vec{P} &= \frac{1}{4\pi c}(\vec{E} \times \vec{B}), & \text{Impulsdichte (Vektor),} \\ \vec{S} &= \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{B}), & \text{Energiestromdichte} \\ & & \text{(Fluss eines Skalars = Vektor)} \end{aligned}$$

und schliesslich

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} (E_\alpha E_\beta + B_\alpha B_\beta - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} (\vec{E} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{B})),$$

Impulsstromdichte (Fluss eines Vektors = Tensor).

Die Verallgemeinerung obiger Resultate auf Medien ist nichttrivial. Das Problem besteht darin, wie die Energien auf Felder und Materie zu verteilen sind. Mit der *Definition* der elektromagnetischen Grössen als Differenz zwischen dem Gesamtsystem Materie & Feld bei Temperatur  $T$  und dem Materiesystem gleicher Temperatur ohne Feld ergibt sich für ein lineares isotropes Medium charakterisiert durch die Dielektrizitätskonstante  $\varepsilon$  und die Permeabilität  $\mu$  ( $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ ) sowie der Dichte  $\rho$

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{8\pi} [E^2(\varepsilon + T\partial_T\varepsilon|_\rho) + H^2(\mu + T\partial_T\mu|_\rho)], \\ \vec{P} &= \frac{1}{4\pi c}(\vec{E} \times \vec{H}), \\ \vec{S} &= \frac{c}{4\pi}(\vec{E} \times \vec{H}), \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} [\varepsilon E_\alpha E_\beta + \mu B_\alpha B_\beta \quad (5.63)$$

$$- \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} [E^2(\varepsilon - \rho\partial_\rho\varepsilon|_T) + H^2(\mu - \rho\partial_\rho\mu|_T)]. \quad (5.64)$$

Eine ausführlichere Diskussion findet man in Landau und Lifschitz.

## 5.5 Struktur der Maxwell-Gleichungen

Wir untersuchen die Symmetrien der Maxwell-Gleichungen und diskutieren die konsistente Wahl von Einheiten.

### 5.5.1 Symmetrien

Wir untersuchen die Transformationseigenschaften der Maxwell-Gleichungen unter Rotationen  $R$ , Spiegelungen  $S$ , Inversionen  $I$  und unter der Zeitumkehr  $T$ . Dazu definieren wir folgende Typen von (Tensor-)Feldern

Skalarfeld: Transformiert unter Rotationen und Inversion gemäss

$$\begin{aligned}\varphi'(\vec{r}') &= \varphi(\vec{r}), & \vec{r}' &= R\vec{r}, \\ \varphi'(\vec{r}') &= \varphi(\vec{r}), & \vec{r}' &= I\vec{r}.\end{aligned}$$

Pseudoskalarfeld:

$$\varphi'(\vec{r}') = -\varphi(\vec{r}), \quad \vec{r}' = I\vec{r}.$$

Vektorfeld<sup>8</sup>:

$$\begin{aligned}\vec{A}' &= R\vec{A}(\vec{r}), & \vec{r}' &= R\vec{r}, \\ \vec{A}'(\vec{r}') &= -\vec{A}(\vec{r}), & \vec{r}' &= I\vec{r}.\end{aligned}$$

Pseudovektorfeld<sup>9</sup>:

$$\vec{A}'(\vec{r}') = \vec{A}(\vec{r}), \quad \vec{r}' = I\vec{r}.$$

Die Ladungsdichte  $\rho$  ist ein Skalarfeld, gerade unter  $T$ ; die Stromdichte  $\vec{j}$  ist ein Vektorfeld, ungerade unter  $T$ .  $\vec{E}$  = Kraft/Ladung ist ein Vektorfeld, gerade unter  $T$ ; konsistent damit ist  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$ , denn  $\vec{\nabla} \cdot$  transformiert ein Vektorfeld in ein Skalarfeld.

$\vec{B}$  ist ein axiales Vektorfeld (siehe Definition), ungerade unter  $T$ . Damit ist  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$  ein Vektorfeld, ungerade unter  $T$ . Die Grösse  $\vec{\nabla} \times \vec{E}$  ist ein Pseudovektorfeld, gerade unter  $T$ , ebenso  $\partial_t \vec{B}$ , während  $\partial_t \vec{E}$  ein Vektorfeld, ungerade unter  $T$  ist. Die Gleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, & \text{Vektoren, ungerade unter } T, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} &= 0, & \text{Pseudovektoren, gerade unter } T,\end{aligned}$$

sind somit konsistent. Die Gleichung  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  ist trivial konsistent (0 ist sowohl ein Skalar wie auch ein Pseudoskalar).

<sup>8</sup> auch *polares* Vektorfeld genannt.

<sup>9</sup> auch *axiales* Vektorfeld genannt.

### 5.5.2 Einheiten

Wir definieren den Strom  $I$  als zeitliche Veränderung der Ladung,

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{oder} \\ -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_t \rho. \quad (\rho j)$$

Folgende Konstanten sind einzuführen:

*Kraft*  $\leftrightarrow$  *Ladungs* Beziehung:

$$F_1 = k_1 \frac{qq'}{r^2} \quad (k_1)$$

*Kraft*  $\leftrightarrow$  *Strom* Beziehung:

$$\frac{dF_2}{dt} = k_2 \frac{2II'}{d}. \quad (k_2)$$

Aus  $(k_1)$  folgt  $[k_1 qq'] = \text{Kraft} \cdot \text{Länge}^2 = m\ell^3/t^2$ ,  $m = \text{Masse}$ ,  $\ell = \text{Länge}$ ,  $t = \text{Zeit}$ . Wir können  $k_1$  festlegen und damit die Einheit der Ladung definieren ( $\rightarrow$  Gauss) oder die Ladungseinheit festlegen und damit  $k_1$  finden. Ströme und Ladung sind gemäss  $(\rho j)$  verknüpft und aus  $(k_1)/(k_2)$  ergibt sich

$$[k_1]/[k_2] = (\text{Geschwindigkeit})^2 = \frac{\ell^2}{t^2}$$

Das Experiment liefert

$$\frac{k_1}{k_2} = c^2 \quad (c)$$

im Vakuum.

Wir definieren die Felder via (vgl. Abb. 5.7

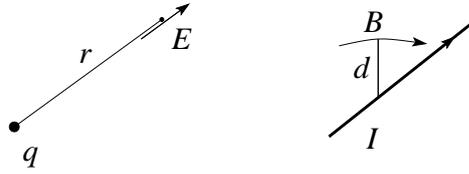
$$E = \alpha' k_1 \frac{q}{r^2}, \\ B = 2\alpha k_2 \frac{I}{d}, \quad (E)$$

O.B.d.A können wir  $\alpha' = 1$  wählen, d.h.,  $[E] = \text{Kraft/Ladung}$ . Für die Einheit von  $B$  ergibt sich dann

$$[B] = [E] \cdot \alpha / \text{Geschwindigkeit} = [E] \frac{\alpha t}{\ell}. \quad (B)$$

Als dritte Konstante führen wir im Faraday Gesetz  $k_3$  ein,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + k_3 \partial_t \vec{B} = 0. \quad (k_3)$$

Abb. 5.7: Zur Definition der Felder  $\vec{E}$  (links) und  $\vec{B}$  (rechts).

$k_3$  hat die Einheiten von  $1/\alpha$ ; aus der Galilei-Invarianz (kleine Geschwindigkeiten) folgt  $k_3 = 1/\alpha$ . Damit erhalten wir die Maxwellgleichungen in der Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi k_1 \rho, && \text{aus } (k_1) \text{ und } (E), \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= 4\pi k_2 \alpha \vec{j} + \frac{k_2 \alpha}{k_1} \partial_t \vec{E}, && \text{aus } (\rho j), (k_2), (B), \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -k_3 \partial_t \vec{B}, && \text{aus } (k_3) \text{ und } (B), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{k_2} &= c^2 && \text{(experimentell),} \\ k_3 &= \frac{1}{\alpha} && \text{(Galilei Invarianz).}\end{aligned}$$

Die *Gauss-Einheiten* ergeben sich aus der Wahl

$$\begin{aligned}k_1 &= 1 && (\rightarrow \text{Definiere Ladung in statcoulombs}), \\ k_2 &= \frac{1}{c^2} && (\leftarrow \text{experimentell}), \quad (G) \\ \alpha &= c && (\rightarrow [E] = [B]).\end{aligned}$$

In *MKSA* definiert man das *Ampère* als denjenigen Strom zwischen 2 Leitern im Abstand 1m der pro Meter m eine Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$ N produziert. Aus  $(k_2)$  folgt dann

$$k_2 = 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}. \quad (\text{MKSA})$$

Mit der Definition von  $\mu_0 = 4\pi k_2$  und  $(c)$  folgt

$$\begin{aligned}k_1 &\equiv \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = c^2 \frac{\mu_0}{4\pi}, \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{V s}}{\text{A m}}, && (\text{MKSA}) \\ \epsilon_0 &= 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A s}}{\text{V m}}.\end{aligned}$$

Die Ladungseinheit folgt aus  $(\rho j)$  und wir wählen  $\alpha = 1$ . Damit haben wir konsistente Einheiten hergeleitet.

### 5.5.3 Dualität und magnetische Monopole

Dualität ist eine Symmetrie in den Maxwellgleichungen die mit der Existenz von magnetischen Monopolen verknüpft ist. Würden magnetische Monopole existieren, so hätten die Maxwellgleichungen die Form<sup>10</sup>

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}' &= 4\pi\rho'_e, & \vec{\nabla} \vec{H}' &= \frac{1}{c} \partial_t \vec{D}' + \frac{4\pi}{c} \vec{j}'_e, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}' &= 4\pi\rho'_m, & -\vec{\nabla} \times \vec{E}' &= \frac{1}{c} \partial_t \vec{B}' + \frac{4\pi}{c} \vec{j}'_m.\end{aligned}\quad (\text{MGm})$$

Hätten alle Teilchen *dasselbe* Verhältnis  $q'_e/q'_m$  von elektrischer und magnetischer Ladung, so könnten wir obige Gleichung mit Hilfe der Dualitätstransformation

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{D} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix},$$

$$(u, v) : (\vec{E}, \vec{H}); (\vec{D}, \vec{B}); (\rho_e, \rho_m); (\vec{j}_e, \vec{j}_m),$$

auf die übliche Form bringen, d.h. es gibt einen Winkel  $\phi$ , so dass  $(\rho_m, \vec{j}_m) = 0$ . Die Frage nach der Existenz magnetischer Monopole ist tatsächlich die Frage nach der Existenz zweier Teilchen mit verschiedenem Verhältnis von elektrischer und magnetischer Ladung,

$$\frac{q_{e1}}{q_{m1}} \stackrel{?}{\neq} \frac{q_{e2}}{q_{m2}}.$$

Würde ein magnetischer Monopol existieren, würde zufolge eines Argumentes von Dirac sofort die Quantisierung der Ladung folgen: Betrachte ein Teilchen der Masse  $m$  und mit Ladung  $e$ , welches im Abstand  $b$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  am Monopol der Ladung  $g$ , positioniert im Ursprung unseres Koordinatensystems, vorbeifliegt. - Im Magnetfeld  $g\vec{r}/r^3$  erhält das Teilchen im Vorbeiflug am Monopol einen Impulsübertrag  $\Delta p_y$ . Für  $\Delta p_y$  klein können wir die Bahn als gerade betrachten und erhalten für

$$\begin{aligned}\Delta p_y &= \int dt F_y = \int dt \frac{ev}{c} B_x \\ &= \frac{egvb}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(b^2 + v^2 t^2)^{3/2}} = \frac{2eg}{cb}.\end{aligned}$$

Durch den transversalen Impulsübertrag ändert sich der Drehimpuls  $L_z$  des Teilchens,

$$\Delta L_z = b\Delta p_y = \frac{2eg}{c}.$$

<sup>10</sup>Wir nehmen an, dass elektrische und magnetische Ladungen für sich erhalten sind,  $\partial_t \rho_e + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0 = \partial_t \rho_m + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_m$  gilt.

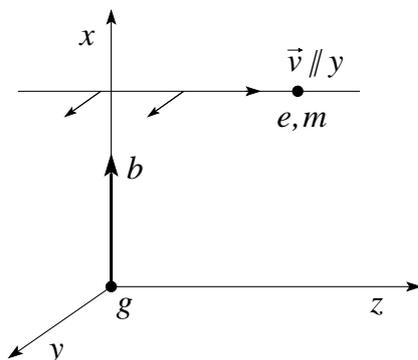


Abb. 5.8: Zur Quantisierung der Ladung: Bahn eines Teilchens in der Nähe des magnetischen Monopols

Die Quantenmechanik verlangt, dass periodische Bahnen, respektive Drehimpulse  $\Delta L_z = n\hbar$ , quantisiert sind, also ist

$$\frac{ge}{\hbar c} = \frac{n}{2}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

und Ladungen sind quantisiert. Zusätzlich finden wir, dass eine inverse Relation in der Kopplungsstärke zu elektrischen und magnetischen Ladungen: die kleine Kopplung zur elektrischen Ladung  $e^2/\hbar c = 1/137$  (Feinstrukturkonstante) impliziert, dass magnetische Monopole stark koppeln

$$\frac{g^2}{\hbar c} = \frac{n^2}{4} \left( \frac{\hbar c}{e^2} \right) = \frac{137}{4} n^2 \gg 1.$$

## Kapitel 6

# Ebene Wellen und ihre Ausbreitung

Wir betrachten ein homogenes Medium und schreiben die Maxwellgleichungen in der Form

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D}_0 &= 4\pi(\rho_e + \rho), \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + c^{-1}\partial_t\vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - c^{-1}\partial_t\vec{D} &= (4\pi/c)\vec{j}_e, \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} - c^{-1}\partial_t\vec{D}_0 &= (4\pi/c)(\vec{j}_e + \vec{j}).\end{aligned}\tag{6.1}$$

Die Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  berücksichtigen alle Materieladungen und Ströme. Zusätzlich haben wir das Feld  $\vec{D}_0$  eingeführt, welches nur die Polarisation der gebundenen Ladungsträger berücksichtigt. Das Verhalten der freien Ladungsträger wird durch  $\rho$  und  $\vec{j}$  beschrieben.  $\rho_e$  und  $\vec{j}_e$  sind die extern aufgeprägten Ladungen und Ströme. Es gelten die separaten Kontinuitätsgleichungen  $\partial_t\rho_e + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0$  und  $\partial_t\rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ . Als konstitutive Gleichungen gehen wir im allgemeinen in Ort und Zeit nichtlokale Zusammenhänge vor,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \int d^3r' dt' \chi(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \vec{T}(\vec{r}', t').\tag{6.2}$$

Die Treiber  $\vec{T}$  – Antwort  $\vec{A}$  Paare mit Antwortfunktion  $\chi$  sind  $(\vec{A}, \vec{T}, \chi) = (\vec{D}, \vec{E}, \varepsilon), (\vec{D}_0, \vec{E}, \varepsilon_0), (\vec{B}, \vec{H}, \mu), (\vec{j}, \vec{E}, \sigma)$ . Die Ladungsdichte  $\rho$  folgt aus  $\vec{j}$  via der Kontinuitätsgleichung,  $\rho_e$  und  $\vec{j}_e$  sind extern. Gehen wir zur Fourierdar-

stellung über, so vereinfachen sich die Verhältnisse drastisch: Mit

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{k}, \omega) &= \int d^3r dt \vec{A}(\vec{r}, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)}, \\ \vec{A}(\vec{r}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d\omega}{2\pi} \vec{A}(\vec{k}, \omega) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)},\end{aligned}\quad (6.3)$$

können wir die Operatoren ersetzen,  $\vec{\nabla} \rightarrow i\vec{k}$ ,  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ , und die Faltungen vereinfachen sich zu Multiplikationen,  $\chi * \vec{T}(\vec{r}, t) \rightarrow \chi \vec{T}(\vec{k}, \omega)$ :

$$\begin{aligned}i\vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{k}, \omega) &= 4\pi\rho_e(\vec{k}, \omega) \\ i\vec{k} \cdot \vec{D}_0(\vec{k}, \omega) &= 4\pi[\rho_e(\vec{k}, \omega) + \rho(\vec{k}, \omega)], \\ i\vec{k} \cdot \vec{B}(\vec{k}, \omega) &= 0, \\ i\vec{k} \times \vec{E}(\vec{k}, \omega) - \frac{i\omega}{c} \vec{B}(\vec{k}, \omega) &= 0 \\ i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{D}(\vec{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e(\vec{k}, \omega), \\ i\vec{k} \times \vec{H}(\vec{k}, \omega) + \frac{i\omega}{c} \vec{D}_0(\vec{k}, \omega) &= \frac{4\pi}{c} [\vec{j}_e(\vec{k}, \omega) + \vec{j}(\vec{k}, \omega)], \\ \omega\rho(\vec{k}, \omega) &= \vec{k} \cdot \vec{j}(\vec{k}, \omega), \\ \vec{D}(\vec{k}, \omega) &= \varepsilon(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega), \quad \vec{D}_0(\vec{k}, \omega) = \varepsilon_0(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega), \\ \vec{B}(\vec{k}, \omega) &= \mu(\vec{k}, \omega) \vec{H}(\vec{k}, \omega), \quad \vec{j}(\vec{k}, \omega) = \chi(\vec{k}, \omega) \vec{E}(\vec{k}, \omega).\end{aligned}\quad (6.4)$$

Oft sind magnetische Polarisierungseffekte klein,  $\mu(\vec{k}, \omega) \approx \mu \approx 1$  (wir behalten  $\mu$  um seine zu  $\varepsilon$  symmetrische Rolle aufzuzeigen). Trotz Isotropie sind  $\varepsilon(\vec{k}, \omega)$ ,  $\varepsilon_0(\vec{k}, \omega)$ ,  $\sigma(\vec{k}, \omega)$  üblicherweise Tensorielle Größen da  $\vec{k}$  eine Raumrichtung auszeichnet und das Medium auf longitudinale und transversale Felder verschieden reagiert:

$$\begin{pmatrix} A_{\parallel} \\ A_{\perp}^{(1)} \\ A_{\perp}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\perp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{\parallel} \\ T_{\perp}^{(1)} \\ T_{\perp}^{(2)} \end{pmatrix}.\quad (6.6)$$

Aus (6.4) und (6.5) ergeben sich die folgenden Zusammenhänge für die longitudinalen und transversalen Komponenten der Dielektrizitätskonstanten und der Leitfähigkeit:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\parallel}(\vec{k}, \omega) &= \varepsilon_{0\parallel}(\vec{k}, \omega) + 4\pi i \sigma_{\parallel}(\vec{k}, \omega) / \omega, \\ \varepsilon_{\perp}(\vec{k}, \omega) &= \varepsilon_{0\perp}(\vec{k}, \omega) + 4\pi i \sigma(\vec{k}, \omega) / \omega.\end{aligned}\quad (6.7)$$

Im Limes  $\vec{k} \rightarrow 0$  ist keine Richtung ausgezeichnet und  $\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon_{\perp} = \varepsilon$  und  $\sigma_{\parallel} = \sigma_{\perp} = \sigma$ . Die Separation der Polarisierungseffekte im Medium lässt sich in (6.7) gut erkennen: Die gebundenen Ladungen werden durch  $\varepsilon_0$  beschrieben,

im Nichtleiter ist  $\varepsilon = \varepsilon_0$ . Im Leiter kommt der Term  $4\pi i\sigma/\omega$  dazu. Für  $\omega \rightarrow 0$  wird  $\varepsilon$  singularär da die freien Ladungsträger ‘unendlich gut polarisierbar’ sind. Oft ist in Metallen  $\varepsilon_0$  durch 1 ersetzt wenn nur die Leitungselektronen betrachtet werden.

Für *elektromagnetische Wellen* ist der relevante Bereich im Festkörper der Bereich  $(\vec{k}, \omega) \approx (0, \omega)$ . Endliche  $\vec{k}$ -Werte treten im Zusammenhang mit Abschirmeffekten, Phononen, Plasmonen, ... auf. Zu beachten ist, dass die Limites  $\vec{k} \rightarrow 0$ , dann  $\omega \rightarrow 0$  und  $\omega \rightarrow 0$ , dann  $\vec{k} \rightarrow 0$  völlig verschieden sind. Insbesondere geben die Grenzwerte  $\sigma(0, \omega)$  (und  $\varepsilon(0, \omega)$ ) Informationen über die Transporteigenschaften, währenddem  $\varepsilon(\vec{k}, 0)$  die Abschirmeigenschaft beschreibt. Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall eines dispersionslosen, nichtleitenden Mediums.

## 6.1 Dispersionsloses, nichtleitendes Medium

Für das dispersionslose nichtleitene Medium gilt  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = \text{const.}$ ,  $\mu = \text{const.}$  Daraus folgt  $\vec{j} = 0$  und  $\rho = 0$ ,

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{k} = 0 &\quad \rightarrow \quad \vec{E} \perp \vec{k}, & (6.8) \\ \vec{B} \cdot \vec{k} = 0 &\quad \rightarrow \quad \vec{B} \perp \vec{k}, \\ \vec{k} \times \vec{E} = (\omega/c) \vec{B} &\quad \rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} = -k^2 \vec{E} = -(\omega^2 \mu \varepsilon / c^2) \vec{E}, \\ \vec{k} \times \vec{B} = -(\omega \mu \varepsilon / c) \vec{E} &\quad \rightarrow \quad \vec{k} \times \vec{k} \times \vec{B} = -k^2 \vec{B} = -(\omega^2 \mu \varepsilon / c^2) \vec{B}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir als Lösung der Maxwellgleichungen die *transversalen ebenen Wellen*, vgl. Abb. 6.1

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)}, \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)}, & (6.9) \\ \vec{B}_0 = \sqrt{\mu \varepsilon} \hat{k} \times \vec{E}_0, \quad \vec{E}_0 \perp \vec{k}, \quad \vec{B}_0 \perp \vec{k}, \end{aligned}$$

mit der *Dispersionsrelation* für die elektromagnetische Strahlung

$$\omega_k = (c/\sqrt{\varepsilon \mu}) k. \quad (6.10)$$

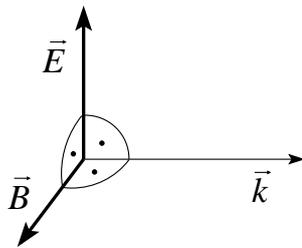


Abb. 6.1: Geometrie der transversalen elektromagnetischen Wellen mit  $\vec{k}$ ,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  paarweise orthogonal.

Das Frequenzspektrum der elektromagnetischen Strahlung ist in Abb. 6.2 detailliert.

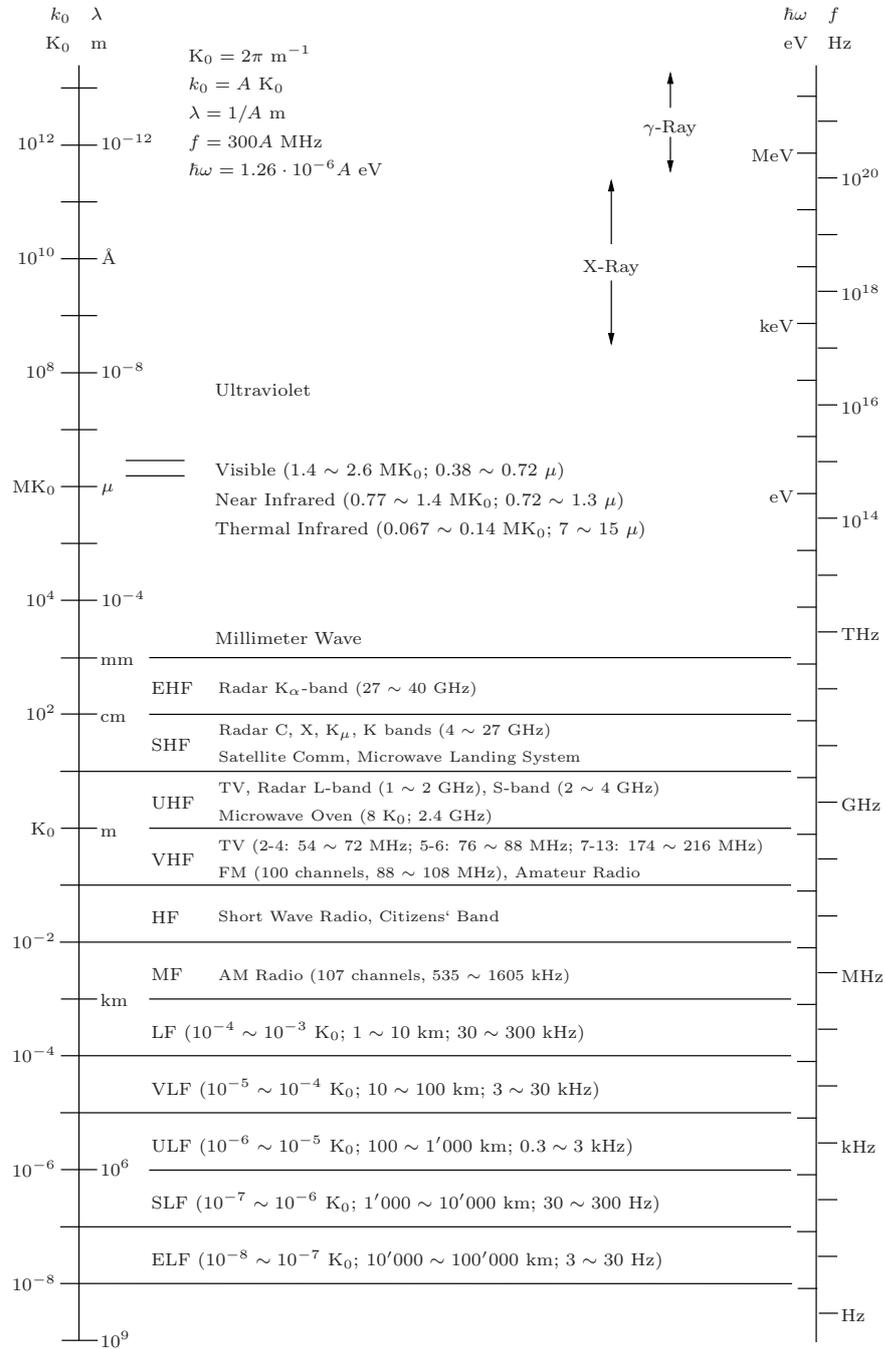


Abb. 6.2: Elektromagnetisches Spektrum.

Die *allgemeine* Lösung folgt aus den Anfangsbedingungen und linearer Superposition; z.B. ein  $\vec{E}$ -Puls mit den Anfangsbedingungen  $\vec{E}_0(\vec{r}, t = 0)$  und  $\partial_t \vec{E}_0(\vec{r}, t = 0)$ , beide reell bei  $t = 0$ , entwickelt sich gemäss

$$\vec{E}_0(\vec{r}, t) = \Re \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \quad (6.11)$$

mit<sup>1</sup>

$$\vec{E}_0(\vec{k}) = \int d^3 r \left[ E_0(\vec{r}, 0) + \frac{i}{\omega(k)} \partial_t \vec{E}_0(\vec{r}, 0) \right] e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Das  $\vec{B}$ -Feld ist via (6.9) ans  $\vec{E}$ -Feld gekoppelt. Der mittlere Energiefluss einer Mode ist durch den komplexen Poyntingvektor

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \times \vec{H}^* \quad (6.12)$$

gegeben<sup>2</sup> und die elektrische und magnetische Energiedichte wird durch

$$\begin{aligned} \text{elektrische Energiedichte:} \quad w_e &= \frac{1}{16\pi} \vec{E} \cdot \vec{D}^*, \\ \text{magnetische Energiedichte:} \quad w_m &= \frac{1}{16\pi} \vec{B} \cdot \vec{H}^*, \\ u = w_e + w_m &= \frac{1}{16\pi} \left( \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}^* + \frac{1}{\mu} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right). \end{aligned} \quad (6.13)$$

beschrieben.<sup>3</sup> Einsetzen von (6.9) ergibt

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |E_0|^2 \hat{k}, \quad u = \frac{\varepsilon}{8\pi} |E_0|^2;$$

die Energie fliesst demnach mit Geschwindigkeit  $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$  in Richtung  $\hat{k}$ .

<sup>1</sup>Denn

$$\begin{aligned} 2\vec{E}_0(\vec{r}, 0) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{E}_0^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ 2\partial_t \vec{E}_0(\vec{r}, 0) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (-i\omega) \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} i\omega \vec{E}_0^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \frac{2i\partial_t \vec{E}_0(\vec{r}, 0)}{\omega} &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{E}_0(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \vec{E}_0^*(\vec{k}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \Rightarrow \vec{E}_0(\vec{k}) &= \int d^3 r \left[ E_0(\vec{r}, 0) + \frac{i}{\omega} \partial_t \vec{E}_0(\vec{r}, 0) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup> $\Re \vec{S}$  ist der mittlere Energiefluss und  $\Im \vec{S}$  ist der reaktive Anteil proportional zu  $\exp(2i\omega t)$ .

<sup>3</sup>Für harmonische Felder proportional zu  $\exp(-i\omega t)$  gilt

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{2} (\vec{j} e^{-i\omega t} + \vec{j}^* e^{i\omega t}) \cdot \frac{1}{2} (\vec{E} e^{-i\omega t} + \vec{E}^* e^{i\omega t}) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left( \vec{j}^* \cdot \vec{E} + \vec{j} \cdot \vec{E} e^{-2i\omega t} \right) \xrightarrow{\text{Zeitmittel}} \frac{1}{2} \Re(\vec{j}^* \cdot \vec{E}). \end{aligned}$$

Eine interessante Beobachtung ist, dass die Dispersionsgleichung

$$k^2 = \omega^2 \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \quad (6.14)$$

auch komplexe  $\vec{k}$ -Vektoren zulässt,  $\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$ , mit

$$k_R^2 - k_I^2 = \omega^2 \frac{\mu \varepsilon}{c^2}, \quad \vec{k}_R \cdot \vec{k}_I = 0, \quad (6.15)$$

Die Welle kann in Richtung  $\vec{k}_R$  auf Kosten der Propagation in Richtung  $\vec{k}_I$  mit überhöhtem  $k$ -Wert propagieren (diese Tatsache liegt der Funktion des Nahfeldmikroskopes zugrunde).

### 6.1.1 Polarisierungen

Um die vektoriellen Freiheitsgrade der Wellen zu beschreiben bedient man sich des Konzeptes der Polarisation. Wir wählen zwei Einheitsvektoren  $\vec{\varepsilon}_k^1 \perp \vec{\varepsilon}_k^2 \perp \vec{k}$ ; es gelten die Verknüpfungen

$$\vec{\varepsilon}_k^1 \times \vec{\varepsilon}_k^2 = \hat{k}, \quad \vec{\varepsilon}_k^2 \times \hat{k} = \vec{\varepsilon}_k^1, \quad \hat{k} \times \vec{\varepsilon}_k^1 = \vec{\varepsilon}_k^2. \quad (6.16)$$

Die drei Vektoren  $\vec{\varepsilon}_k^1$ ,  $\vec{\varepsilon}_k^2$ , und  $\hat{k}$  bilden eine orthonormierte und vollständige Basis, vgl. Abb. 6.3

$$\begin{aligned} \text{orthonormiert:} \quad & \sum_{\vec{k}} \vec{\varepsilon}_k^\lambda \cdot \vec{\varepsilon}_k^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \text{vollständig:} \quad & \sum_{\lambda} \varepsilon_{k,i}^\lambda \varepsilon_{k,j}^\lambda + \hat{k}_i \hat{k}_j = \delta_{ij}. \end{aligned}$$

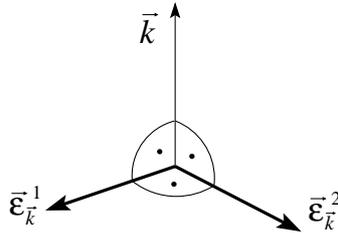


Abb. 6.3: Die Vektoren  $\vec{k}$ ,  $\vec{\varepsilon}_k^1$  und  $\vec{\varepsilon}_k^2$  bilden ein Dreibein.

Die Energieerhaltung, vgl. 5.4, impliziert dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_V d^3 r \vec{j}^* \cdot \vec{E} &= -\frac{c}{8\pi} \int_{\partial V} d^2 \sigma \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \vec{n} - \frac{i\omega}{8\pi} \int_V d^3 r [\vec{E} \cdot \vec{D}^* - \vec{B} \cdot \vec{H}^*] \\ &= - \int_{\partial V} d^2 \sigma \vec{S} \cdot \vec{n} - 2i\omega \int_V d^3 r [w_e - w_m]; \end{aligned}$$

Der letzte Term beschreibt die in den Feldern gespeicherte Energie.

Mit den Basisvektoren  $\vec{E}_\lambda = E_\lambda \vec{\varepsilon}_k^\lambda \exp[i[\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t]]$ , und  $\vec{B}_\lambda = \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{k} \times \vec{E}_\lambda$ ,  $\lambda = 1, 2$ , erhalten wir die allgemeinste in Richtung  $\hat{k}$  propagierende Welle in der Form

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_1(\vec{r}, t) + \vec{E}_2(\vec{r}, t) \\ &= [E_1 \vec{\varepsilon}_k^1 + E_2 \vec{\varepsilon}_k^2] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega_k t)}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die Amplituden  $E_1$  und  $E_2$  sind im allgemeinen komplexe Größen. Man unterscheidet zwischen

### Linear polarisierte Wellen

mit  $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ ,  $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$  der maximalen Amplitude und  $\theta = \arctan(E_1/E_2)$  dem Polarwinkel bezüglich dem  $\vec{\varepsilon}_k^\lambda$ -System, vgl. Abb. 6.4.

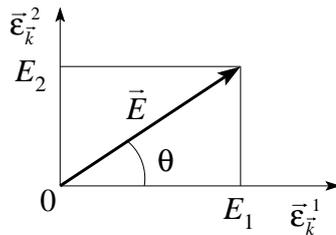


Abb. 6.4: Lineare Polarisation in Richtung  $\theta$ .

### Zirkular polarisierte Wellen

mit  $E_1 = \mp iE_2 = E_0 \in \mathbb{C}$ . Der Feldvektor  $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 [\vec{\varepsilon}_k^1 \pm i\vec{\varepsilon}_k^2] \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - i\omega t)]$  rotiert mit der Frequenz  $\omega$  im Gegen- (links zirkular polarisiert, positive Helizität) respektive Uhrzeigersinn (rechts zirkular polarisiert, negative Helizität)<sup>4</sup>, vgl. Abb. 6.5.

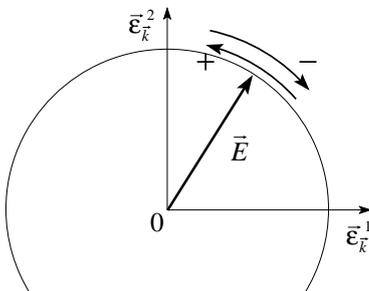


Abb. 6.5: Zirkular polarisierte Wellen mit positiver und negativer Helizität.

<sup>4</sup>Die Helizität ist definiert als  $\hat{L} \cdot \hat{p}$ , mit dem Drehimpuls  $\vec{L}$  und dem Impuls  $\vec{p}$ .

### Elliptisch polarisierte Wellen

Mit  $E_1, E_2 \in \mathbb{C}$ , beliebig, definieren wir die Basis

$$\vec{\varepsilon}_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \vec{\varepsilon}_k^1 \pm i\vec{\varepsilon}_k^2 \right) \quad (6.18)$$

und schreiben die allgemeine Lösung in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = [E_+ \vec{\varepsilon}_k^+ + E_- \vec{\varepsilon}_k^-] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (6.19)$$

Mit  $E_-/E_+$  reell  $\neq 1$  erhalten wir eine elliptisch polarisierte Welle mit Hauptachsen  $\parallel \vec{\varepsilon}_k^\lambda$  und Achsenverhältnis  $|(1 + E_-/E_+)/(1 - E_-/E_+)|$ , vgl. Abb. 6.5. Eine Phase  $E_-/E_+ \propto \exp(i\alpha)$  erzeugt den Polarwinkel  $\alpha/2$ .

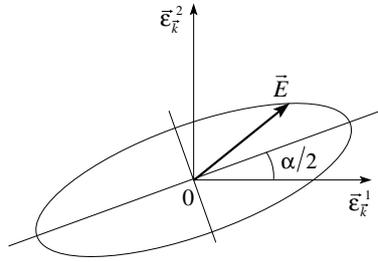


Abb. 6.6: Elliptisch polarisierte Welle mit Polarwinkel  $\alpha/2$ .

### 6.1.2 Reflexion und Transmission ebener Wellen durch eine planare Grenzschicht

Im folgenden betrachten wir strukturierte Räume in denen die Propagation der Wellen durch die Präsenz von Grenzflächen beeinflusst wird. Als einfachstes Beispiel betrachten wir zuerst die Grenzschicht zwischen zwei Medien mit verschiedenen dielektrischen Eigenschaften, vgl. Abb. 6.7.

Der Raum sei dann aufgeteilt zwischen zwei verschiedenen dispersionslosen, nichtleitenden Medien, charakterisiert durch die Parameter  $\varepsilon', \mu'$  im Gebiet  $z > 0$  und  $\varepsilon, \mu$  im Halbraum  $z < 0$ . Eine ebene Welle

$$\left. \begin{array}{l} \text{einfallende Welle} \\ \vec{E} = \vec{E}_{0i} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{B} = \sqrt{\mu \varepsilon} \hat{k} \times \vec{E}, \end{array} \right\} \quad (6.20)$$

falle auf die Grenzschicht  $z = 0$  ein und werde einerseits reflektiert,

$$\left. \begin{array}{l} \text{reflektierte Welle} \\ \vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{B}_r = \sqrt{\mu \varepsilon} \hat{k}_r \times \vec{E}_r, \end{array} \right\} \quad (6.21)$$

andererseits ins andere Medium transmittiert,

$$\left. \begin{array}{l} \text{transmittierte Welle} \\ \vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)}, \\ \vec{B}_t = \sqrt{\mu' \varepsilon'} \hat{k}_t \times \vec{E}_t, \end{array} \right\}. \quad (6.22)$$

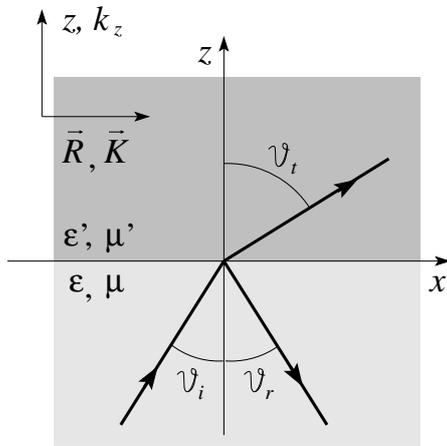


Abb. 6.7: Reflexion ( $r$ ) und Transmission ( $t$ ) einer einfallenden Welle ( $i$ ) an einer Grenzschicht zwischen Medien mit verschiedenen Koeffizienten  $\varepsilon$  und  $\mu$ .

Uns interessieren in diesem Zusammenhang

die geometrischen respektive *kinematischen* Eigenschaften dieses Streuexperimentes; gegeben der Einfallswinkel  $\theta_i$ , welches sind die  $\theta_r$  und  $\theta_t$  für die reflektierten und transmittierten Wellen.

die *dynamischen* Eigenschaften; welches sind die reflektierten und transmittierten *Amplituden* und *Polarisationen*.

Die Lösung wird durch die Erfüllung der Differentialgleichung und der Befriedigung der Randbedingungen wie folgt festgelegt:

- *Differentialgleichung*: Fixiert ist die Frequenz  $\omega$  (nicht der  $k$ -Wert) der Welle und daraus ergeben sich die Beziehungen

$$k = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon \mu}}{c} = k_r, \quad (6.23)$$

$$k_t = \frac{\omega \sqrt{\varepsilon' \mu'}}{c}, \quad (6.24)$$

$$k_t = k \frac{\sqrt{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (6.25)$$

- *Randbedingungen*: Aus der Stetigkeit der Felder ergibt sich folgende Bedingung an die Phasen (die Vektoren  $\vec{K}$  und  $\vec{R}$  bezeichnen die Komponenten von  $\vec{k}$  und  $\vec{r}$  in der Ebene, vgl. Abb. 6.7):

$$\vec{k} \cdot \vec{R} = \vec{k}_r \cdot \vec{R} = \vec{k}_t \cdot \vec{R}, \quad \forall \vec{R} \quad (6.26)$$

woraus wir identische  $\vec{K}$ -Werte in der Grenzfläche finden und deshalb muss

$$k \sin \theta_i = k_r \sin \theta_r = k_t \sin \theta_t \quad (6.27)$$

erfüllt sein. Damit erhalten wir sofort das (kinematische) *Gesetz von Snellius*:

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{k_t}{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon' \mu'}}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{n'}{n} \quad (6.28)$$

$$(n \sin \theta = n' \sin \theta') \theta_r = \theta_i$$

mit  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  dem Brechungsindex des Mediums (wir definieren  $\theta = \theta_i$ ,  $\theta' = \theta_t$ ).

– Randbedingungen: Für die Amplituden:

$$\begin{aligned} \vec{D}_\perp \text{ stetig} & \quad \varepsilon(\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r}) \cdot \vec{n} = \varepsilon' \vec{E}_{0t} \cdot \vec{n}, & (6.29) \\ \vec{B}_\perp \text{ stetig} & \quad (\vec{k} \times \vec{E}_{0i} + \vec{k}_r \times \vec{E}_{0r}) \cdot \vec{n} = (\vec{k}_t \times \vec{E}_{0t}) \cdot \vec{n}, \\ \vec{E}_\parallel \text{ stetig} & \quad (\vec{E}_{0i} + \vec{E}_{0r}) \times \vec{n} = \vec{E}_{0t} \times \vec{n}, \\ \vec{H}_\parallel \text{ stetig} & \quad \frac{1}{\mu} (\vec{k} \times \vec{E}_{0i} + \vec{k}_r \times \vec{E}_{0r}) \times \vec{n} = \frac{1}{\mu'} (\vec{k}_t \times \vec{E}_{0t}) \times \vec{n}; \end{aligned}$$

unter Benutzung der Beziehung  $k'/\sqrt{\mu'\varepsilon} = k/\sqrt{\mu\varepsilon}$  und dem Faraday Gesetz haben wir alle Randbedingungen durch die elektrischen Feldvektoren ausgedrückt.

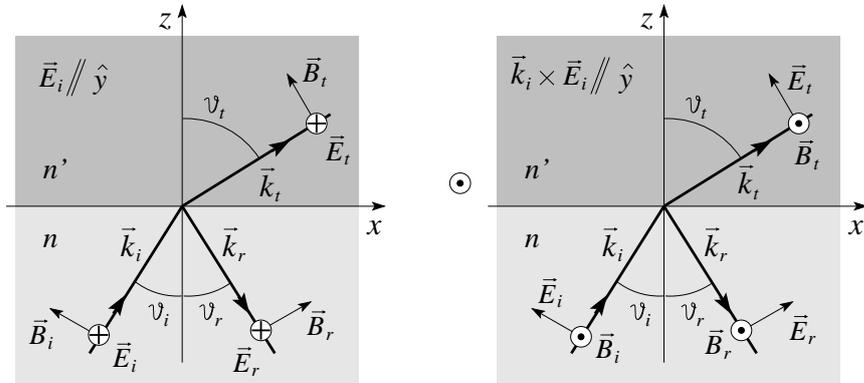


Abb. 6.8: Streukonfigurationen polarisiert parallel der  $y$ -Achse (links) und in der der Einfallsebene definiert durch  $\vec{k}_i$  und der Grenzschichtnormalen  $\vec{n}$  (rechts).

Die dynamischen Eigenschaften diskutieren wir anhand der beiden Spezialfälle mit einfallender Polarisation parallel zur Streuebene,  $\vec{E}_{0i} \parallel \hat{k} \times \vec{n}$ , und in der Einfallsebene definiert durch  $\hat{k}$  und  $\vec{n}$ ,  $\hat{k} \times E_{0i} \parallel \hat{k} \times \vec{n}$ , mit  $\vec{n}$  der Normalen auf der Grenzfläche, vgl. Abb. 6.8. Der allgemeine Fall folgt dann aus der linearen Kombination dieser Resultate. Beachte, dass  $\vec{S}_i = \frac{c}{8\pi} \vec{E}_i \times \vec{H}_i^*$  in

Richtung Grenzschicht zeigt. Zur Lösung der Stetigkeitsbedingungen (6.29) bemerken wir, dass<sup>5</sup>

$\vec{E}_{0i} \parallel \hat{k} \times \vec{n}$ : die Beziehungen (6.29a) und (6.29b) sind durch  $\vec{E}_r, \vec{E}_t \parallel \hat{k} \times \vec{n}$  automatisch erfüllt, somit sind alle  $\vec{E}$ -Felder parallel zur Grenzschicht. Die Gleichungen (6.29d) und (6.29e) ergeben die Bedingungen  $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$ ,  $\sqrt{\varepsilon/\mu}(E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = \sqrt{\varepsilon'/\mu'} E_{0t} \cos \theta_t$ .

$\hat{k} \times \vec{E}_{0i} \parallel \hat{k} \times \vec{n}$ : Die Gleichungen (6.29d) (6.29e) ergeben die Bedingungen  $(E_{0i} - E_{0r}) \cos \theta_i = E_{0t} \cos \theta_t$  und  $\sqrt{\varepsilon/\mu}(E_{0i} + E_{0r}) = \sqrt{\varepsilon'/\mu'} E_{0t}$ . Die Gleichung (6.29a) reproduziert letztere wenn wir (6.28) berücksichtigen. Die Gleichung (6.29b) ist automatisch erfüllt für  $\vec{E}_r, \vec{E}_t$  in der Einfallsebene.

Die Auflösung obiger Beziehungen gibt uns die dynamischen Resultate für die transmissions  $t = E_{0t}/E_{0i}$  und reflexions  $r = E_{0r}/E_{0i}$  Koeffizienten,

$$t = \frac{2n \cos \theta_i}{n \cos \theta_i + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta_i}}; \quad t = \frac{2nn' \cos \theta_i}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos \theta_i + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta_i}}$$

$$r = \frac{n \cos \theta_i - \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta_i}}{n \cos \theta_i + \frac{\mu}{\mu'} \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta_i}}; \quad r = \frac{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos \theta_i - n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta_i}}{\frac{\mu}{\mu'} n'^2 \cos \theta_i + n \sqrt{n'^2 - n^2 \sin^2 \theta_i}}$$

Für die Polarisation parallel zur Streuebene gilt die Beziehung  $1 + r = t$ ; dieselbe Beziehung gilt für  $\tilde{r} = H_r/H_i$  und  $\tilde{t} = H_t/H_i$  wenn die Polarisation in der Einfallsebene liegt. Im Grenzfall des senkrechten Einfalls erhalten wir die Resultate

$$t(\theta_i = 0) = \frac{2}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} + 1} = \frac{2n}{n' + n}, \quad (6.30)$$

$$r(\theta_i = 0) = \pm \frac{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} - 1}{\sqrt{\frac{\mu\varepsilon'}{\mu'\varepsilon}} + 1} = \frac{n' - n}{n' + n}.$$

Bei optischen Frequenzen ist üblicherweise  $\mu/\mu' \approx 1$ , sogar  $\mu \approx 1 \approx \mu'$  und  $n \approx \sqrt{\varepsilon}$ . Beachte, dass bei  $\theta_i$  gegen 0, die Vektoren  $\vec{E}_{0i}, \vec{E}_{0r}$  in den beiden Fällen verschieden ausgerichtet sind, einmal parallel und ein andermal antiparallel (entsprechend ist das korrekte Vorzeichen in  $r$  zu wählen). Die Erhaltung des Energieflusses durch die Grenzschicht impliziert die Beziehung  $1 = |r|^2 + (n'/n)|t|^2$  (für  $\vartheta_i = 0$ ); der Faktor  $n'/n$  berücksichtigt die unterschiedlichen Propagationsgeschwindigkeiten in den Medien.

<sup>5</sup>Die Bedingungen (6.29a) und (6.29b) sind jeweils erfüllt weil wir die richtige Geometrie mit  $\vec{E}_{0\lambda}$  parallel zur Streuebene respektive  $\vec{E}_{0\lambda}$  parallel zur Einfallsebene angesetzt haben.

**Spezialfall: Brewsterwinkel**

Für  $\vec{E}$  parallel zur Einfallsebene lässt sich der *Brewsterwinkel* definieren bei dem der reflektierte Strahl verschwindet. Für  $\mu' = \mu$  finden wir durch setzen von  $r = 0$  die Bedingung

$$\tan \theta_B = \frac{n'}{n}, \quad \theta_B = \arctan \frac{n'}{n}. \quad (6.31)$$

Durch geeignete Wahl des Einfallswinkels lässt sich damit aus einem unpolarierten Strahl ein parallel zur Ebene polarisiertes Strahlungsfeld erzeugen. Beachte auch die Ablenkung des Strahles hin zum dichteren und weg vom dünneren Medium, vgl. Abb. 6.9.

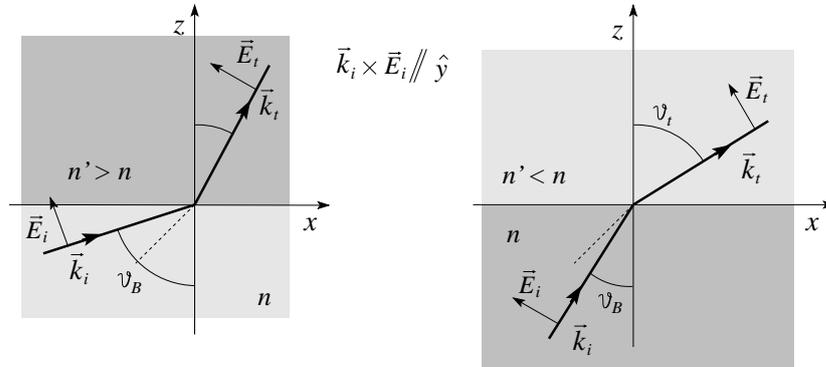


Abb. 6.9: Brewsterwinkel: Für eine Polarisation  $\vec{E}$  in der Einfallsebene wird am Brewsterwinkel  $\vartheta_B$  kein Strahl reflektiert. Bei Streuung am dichteren (dünnere) Medium wird der Strahl zur Normalen hingezogen (links) resp. von der Normalen weggedrängt.

**Spezialfall: Totalreflexion**

am dünneren Medium,  $n' < n$ : Trifft der Strahl auf ein dünneres Medium  $n' < n$  so wird er bei flachen Winkeln total reflektiert, vgl. Abb. 6.10: mit  $\sin \theta_i / \sin \theta_t = n' / n < 1$  ergibt die Bedingung  $\sin \theta_t > 1$  einen kritischen Winkel

$$\theta_T = \arcsin(n'/n) \quad (6.32)$$

oberhalb dessen die Propagation ins dünnere Medium unmöglich wird da  $\sin \theta_t > (n/n') \sin \theta_T = 1$  für  $\theta_i > \theta_T$ .

Zum Verständnis dieses Phänomens bemerken wir, dass gemäss (6.26) gilt

$$\begin{aligned} K_i^2 + k_{zi}^2 &= k^2 \\ K_t^2 + k_{zt}^2 &= k_t^2 = k^2 (n'/n)^2 < k^2, \end{aligned}$$

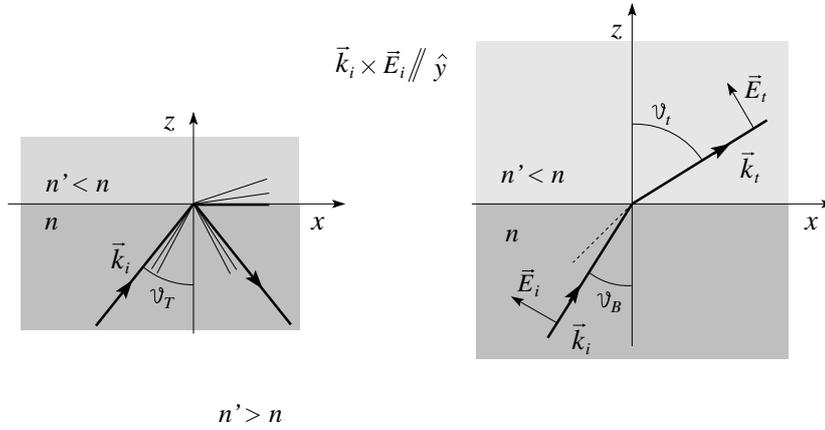


Abb. 6.10: Totalreflexion: Für flache Einfallswinkel  $\vartheta_i > \vartheta_T$  wird der Strahl total reflektiert und der transmittierte Strahl verschwindet (via Querdämpfung).

und  $K_i^2 = K_t^2$ . Es folgt, dass für Winkel im Bereich der Totalreflexion,  $\theta_i > \theta_T$ , die transmittierte Welle nicht mehr ins Medium eindringen kann da  $k_{zt}^2 < 0$  wird (benutze, dass  $\sin \theta_t = \sin \theta_i / \sin \theta_T$  ist),

$$k_{zt}^2 = k_t^2 \cos^2 \theta_t = k_t^2 \left( 1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_T} \right). \quad (6.33)$$

Die ebene Welle im dünnen Medium hat dann die Form

$$e^{i\vec{K}_t \cdot \vec{R} + ik_{zt}z} \underline{\underline{K}} \parallel \hat{x} e^{ik_t x \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_T}} e^{-k_t z \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_T} - 1}} \quad (6.34)$$

und wird auf der Länge

$$\delta = \frac{1}{k_t \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_T} - 1}} = \frac{c}{\omega \sqrt{n^2 \sin^2 \theta_i - n'^2}}$$

gedämpft. Dies entspricht gerade dem in (6.14) beschriebenen Effekt: Die Parallelkomponente  $K_t$  des transmittierten Strahls muss dem Wert  $K_i$  des einfallenden Strahles folgen, obwohl dies aufgrund der Dispersion wegen  $k_t = kn'/n < k$  verboten ist, d.h.,  $K_t > k_t$  im Bereich  $\theta_i > \theta_T$ . Zur Kompensation wird  $k_{zt}$  rein imaginär und 'rettet' damit die Dispersion: der Vektor  $\vec{k}_t = (\vec{K}_t, i|k_{zt}|)$  hat den Betrag

$$K_t^2 - |k_{zt}|^2 = K_t^2 - k_t^2 \left( \frac{\sin^2 \theta_i}{\sin^2 \theta_T} - 1 \right) = k_t^2. \quad (6.35)$$

## 6.2 Leitendes Medium, Skin-effekt

Im leitenden Medium ist die Leitfähigkeit  $\sigma = e^2 n \tau / m$  endlich und wir wählen  $\varepsilon_0 = \text{const}$ ,  $\mu = \text{const}$ , nicht-dispersiv. Aus der Dispersion (6.10) und dem Zusammenhang<sup>6</sup> (6.7) zwischen  $\varepsilon$  und  $\sigma$  erhalten wir die Relation

$$k^2 = \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left( \varepsilon_0 + \frac{4\pi i \sigma}{\omega} \right); \quad (6.36)$$

beachte, dass im Metall  $\varepsilon(\omega)$  via  $\sigma$  dispersiv und komplex geworden ist. Mit

$$\vec{k} = \left( \beta + i \frac{\alpha}{2} \right) \hat{k} \quad (6.37)$$

zerfallen die Felder

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_0 e^{-\frac{\alpha}{2} \hat{k} \cdot \vec{r}} e^{i\beta \hat{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \\ \vec{H} &= \vec{H}_0 e^{-\frac{\alpha}{2} \hat{k} \cdot \vec{r}} e^{i\beta \hat{k} \cdot \vec{r} - i\omega t}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

auf der Distanz  $\delta = 2/\alpha$ ; vernachlässigen den Term  $\varepsilon_0$  in (6.36) (gut im Grenzfall kleiner Frequenzen) so gilt<sup>7</sup>

$$\delta \approx \sqrt{c^2 / 2\pi\mu\omega\sigma}. \quad (6.42)$$

Das ist der *Skin-effekt*: Elektromagnetische Wellen werden an einer Metalloberfläche reflektiert und können nur bis auf eine Tiefe  $\sim \delta$  eindringen. Entsprechend fließen Wechselströme nur an der Oberfläche des Leiters. Für Kupfer ist

$$\rho_{\text{Cu}} \approx 2 \mu\Omega \text{ cm}$$

und mit  $\sigma[\text{s}^{-1}] = 9 \cdot 10^{11} / \rho[\Omega \text{ cm}]$  ergibt sich  $\sigma_{\text{Cu}} \approx 5 \cdot 10^{17} \text{s}^{-1}$ ; die Eindringtiefe bei  $\nu = 50 \text{ Hz}$  ist dann von der Grössenordnung 1 cm, viel grösser als in die Kupferleitungen im Wohnungsbau.

<sup>6</sup>Für  $k \rightarrow 0$  (die Geschwindigkeiten  $\omega/k \sim c$  sind gross im Vergleich zu den Geschwindigkeiten der Ladungen im Medium) ist  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_{\parallel} = \varepsilon$  und ebenso für  $\sigma$ .

<sup>7</sup>Genauer ist

$$\left. \begin{array}{l} \beta \\ \alpha/2 \end{array} \right\} = \sqrt{\mu\varepsilon_0} \frac{\omega}{c} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + (4\pi\sigma/\omega\varepsilon_0)^2} \pm 1 \right) \right]^{1/2}, \quad (6.39)$$

so dass in einem *schlechten Leiter* mit  $4\pi\sigma/\omega\varepsilon_0 \ll 1$

$$k = \beta + i \frac{\alpha}{2} \approx \sqrt{\mu\varepsilon_0} \frac{\omega}{c} + \frac{2\pi i}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_0}} \sigma \quad (6.40)$$

verhältnisse wie im Nichtleiter vorliegen (abgesehen von einem Dämpfungsterm  $2\pi/c \sqrt{\mu/\varepsilon_0} \sigma \sim \sigma/c$ . Beachte, dass ein ‘schlechter Leiter’ im Limes  $\omega \rightarrow 0$  immer ‘gut’ wird. In einem *guten Leiter* mit  $4\pi\sigma/\omega\varepsilon_0 \gg 1$  sind die Verhältnisse sehr verschieden,

$$k \approx (1 + i) \sqrt{2\pi\mu\omega\sigma/c^2} = e^{i\pi/4} \sqrt{2}/\delta. \quad (6.41)$$

Auch die Amplituden  $\vec{E}_0$  und  $\vec{H}_0$  zeigen im Metall ein sehr verschiedenes Verhalten (im Isolator sind sie bis auf den Faktor  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$  gleich und in Phase); aus dem Faradaygesetz erhalten wir

$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}} [1 + (4\pi\sigma/\omega\varepsilon_0)^2]^{1/4} e^{i\varphi} \hat{k} \times \vec{E}_0 \quad (6.43)$$

mit

$$\tan 2\varphi = 4\pi\sigma/\omega\varepsilon_0, \quad \varphi \rightarrow \pi/4, \quad (6.44)$$

$$\frac{H_0^2}{E_0^2} \rightarrow \frac{4\pi\sigma}{\omega\mu}; \quad (6.45)$$

in einem guten Leiter wird die Energie hauptsächlich vom Magnetfeld getragen.

Was geschieht bei *hohen Frequenzen*? Geht  $\delta \rightarrow 0$ ? Die Antwort ist negativ: Betrachte ein freies Elektron im alternierenden Feld,

$$\begin{aligned} m\dot{v} + \frac{m}{\tau}v &= -eE(t) \propto e^{-i\omega t} \\ \Rightarrow \left(-im\omega + \frac{m}{\tau}\right)v &= -eE \\ \Rightarrow j = -env &= \frac{e^2 n \tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} E \\ \Rightarrow \sigma(\omega) &= \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (6.46) \quad (\text{Drude})$$

Mit  $\sigma_{\text{Cu}} \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ s}^{-1}$  und  $n_{\text{Cu}} \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3}$  ist  $\tau[\text{s}] \approx 4 \cdot 10^{-9} \sigma[\text{s}^{-1}]/n[\text{cm}^{-3}] \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ s}$ . Folglich wird die Dispersion in  $\sigma$  erst bei sehr hohen Frequenzen relevant. Mit (6.41) und (6.46) ist für

$$\omega\tau > 1, k \approx e^{i\pi/4} \left( \frac{4\pi\omega n e^2 \tau i}{mc^2 \omega \tau} \right)^{1/2} = \frac{i}{\lambda}, \quad (6.47)$$

d.h., die Welle dringt gerade auf der Londonlänge  $\lambda$ , vgl. (4.74), ins Metall ein. Typische Längen für  $\lambda$  sind im Bereich  $10^3 - 10^4 \text{ \AA} = 0.1 - 1 \mu \text{ m}$ .

### 6.3 Dispersive Medien

Wir haben gesehen, dass ein Metall in  $\varepsilon$  immer dispersiv ist. Auch ein Isolator wird bei hohen Frequenzen dispersiv. Für ein gebundenes Elektron im Feld  $\vec{E}_0 \exp(-i\omega t)$  gilt die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} + \frac{m}{\tau}\dot{\vec{r}} + \partial_r^2 V \vec{r} = -e\vec{E}, \quad (6.48)$$

Der Term  $(m/\tau)\dot{\vec{r}}$  wird durch Streuprozesse erzeugt und  $\partial_r^2 V \vec{r}$  ist die rücktreibende Kraft  $\propto m\omega_0^2$ . Wir lösen (6.48) via Fourieransatz  $\vec{r}(t) \propto \exp(-i\omega t)$  und erhalten den mikroskopischen Dipol

$$\vec{p} = -e\vec{r} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}} \vec{E}$$

und damit die Dielektrizitätskonstante ( $N$  bezeichnet die Anzahl Atome)

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi n e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}}. \quad (6.49)$$

Für  $\omega_0 \rightarrow 0$  erhalten wir mit  $\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi i \sigma_0 / \omega (1 - i\omega\tau)$  das Resultat für das Metall zurück. Für kompliziertere Atome und Moleküle mit  $Z$  Elektronen bei den Frequenzen  $\omega_i$  und Dämpfungsraten  $\tau_i$  erhalten wir

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_i} \quad (6.50)$$

mit den Oszillatorstärken  $f_i$ ,  $\sum_i f_i = Z$  ( $f_i$  drückt aus, wieviele Elektronen an der  $i$ -ten Mode beteiligt sind). Beim Metall enthält die Summe einen Term mit  $\omega_i = 0$ . Für  $\omega > \omega_i \forall i$  vereinfacht sich (6.50) zu

$$\varepsilon(\omega \rightarrow \infty) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (6.51)$$

mit der *Plasmafrequenz*

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n e^2}{m}, \quad n = NZ = \text{Elektronendichte.}$$

Mit  $n \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \omega_p^2 [\text{s}^2] &= 4\pi \cdot 2.5 \cdot 10^8 n [\text{cm}^{-3}] \sim 3 \cdot 10^{32} \\ \Rightarrow \omega_p &\sim 2 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}. \end{aligned}$$

Setzen wir dieses Resultat in (6.36) ein, so sehen wir, dass

$$k^2 = \mu \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \frac{\omega^2}{c^2} \sim \frac{\omega^2}{c^2}$$

für Frequenzen  $\omega > \omega_p$ . Bei ganz hohen Frequenzen wird also auch das *Metall transparent für elektromagnetische Strahlung* und verhält sich wie ein Dielektrikum. Diese Frequenzen liegen im UV(ultraviolet)-Bereich.<sup>8</sup> Eine typische Dielektrizitätskonstante mit Resonanzen und zugehörigen Imaginärteilen ist in den Abbildungen 6.11 und 6.12 skizziert.

<sup>8</sup>Findet Anwendung beim Auffinden von Rissen in Stahlkonstruktionen, z.B. in Brücken.

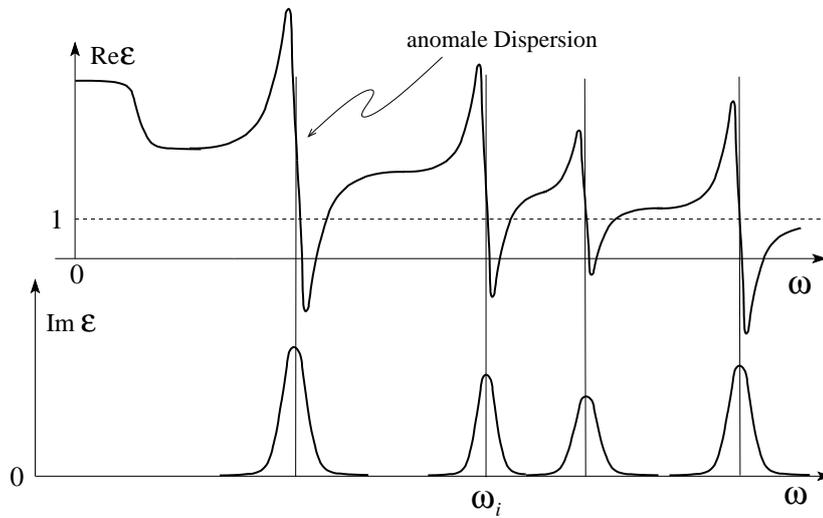


Abb. 6.11: Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten in einem Nichtleiter (Isolator). Der breite Peak bei tiefen Frequenzen ist die Signatur von molekularen Dipolen, z.B. in einer Flüssigkeit. Die Resonanzen bei endlichen Frequenzen sind die Signaturen von Anregungszuständen im Material, Gitterschwingungen (Phononen) oder elektronischer Natur. Im Bereich der anomalen Dispersion (mit  $\partial_\omega \text{Re } \vartheta < 0$ ) tritt starke Absorption auf  $\text{Im } \vartheta > 0$ .

Je nach Vorzeichen der Dielektrizitätskonstanten und der Größe ihres Imaginärteiles findet man, vgl. Abb. 6.13, dass ein Material die elektromagnetische Strahlung

|              |                             |
|--------------|-----------------------------|
| transmitiert | $\Re \epsilon(\omega) > 0,$ |
| reflektiert  | $\Re \epsilon(\omega) < 0,$ |
| absorbiert   | $\Im \epsilon > 0,$         |

## 6.4 Analytizität und Kausalität

Wir betrachten eine allgemeine Treiber–Antwort Relation  $A(\omega) = \chi(\omega)T(\omega)$  (wir ignorieren Vektorcharakter, Ort  $\vec{r}$  oder Wellenvektor  $\vec{k}$  Abhängigkeiten, da sie im besprochenen Zusammenhang irrelevant sind). Kausalität besagt, dass  $A(t)$  nur von  $T(t' < t)$  abhängig sein soll. Betrachte einen Treiberpuls  $T(t) = T_0\delta(t)$ , dann ist  $T(\omega) = T_0$  und die Antwort  $A(t)$  ergibt sich durch

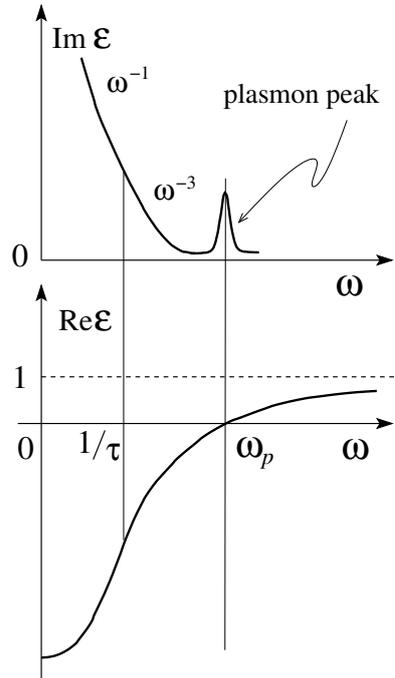


Abb. 6.12: Real- und Imaginärteil der Dielektrizitätskonstanten in einem Leiter (Metall). Der scharfe Peak bei tiefen Frequenzen (Drudepeak) ist die Signatur von freien beweglichen Ladungsträgern. Die negative DK im unteren Frequenzbereich produziert die metallische Reflektivität. Metalle werden erst bei hohen Frequenzen  $\omega > \omega_p$  (oberhalb der Plasmafrequenz) transparent. Der Plasmon Peak in  $\text{Im}\epsilon$  bei  $\omega_p$  (ausserhalb des Drudemodells) beschreibt die Absorption elektromagnetischer Strahlung durch Erzeugung von Plasmaschwingungen.

Fouriertransformation,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) T(\omega) e^{-i\omega t} = T_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \chi(\omega) e^{-i\omega t} \\ &= T_0 \chi(t) \end{aligned} \quad (6.52)$$

Für komplexwertige Frequenzen  $\omega = \omega' + i\omega''$  und  $t < 0$  können wir die Integration in der oberen Halbebene schliessen da der Beitrag  $\propto \exp(-\omega''|t|)$  auf dem oberen Halbkreis verschwindet, vgl. Abb. 6.14(a); für  $\chi$  analytisch in der oberen Halbebene finden wir ein Nullresultat,

$$\chi(t < 0) = 0 \Rightarrow A(t < 0) = 0. \quad (6.53)$$

Für  $t > 0$  schliessen wir in der unteren Halbebene, vgl. Abb. 6.14(a). Die Anregungen (Moden) des Mediums erzeugen dort Pole und Schnitte in  $\chi(\omega)$  und wir erhalten die zugehörige endlichen Antwortfunktion

$$\chi(t > 0) \neq 0 \Rightarrow A(t > 0) \neq 0. \quad (6.54)$$

Eine *kausale* Antwortfunktion  $\chi(\omega)$  analytisch fortgesetzt in  $\mathbb{C}$  ist demnach *analytisch in der oberen Halbebene*, d.h., sie hat dort weder Pole noch Schnitte; die Singularitäten, welche  $\chi$  erzeugen, liegen in der unteren Halbebene

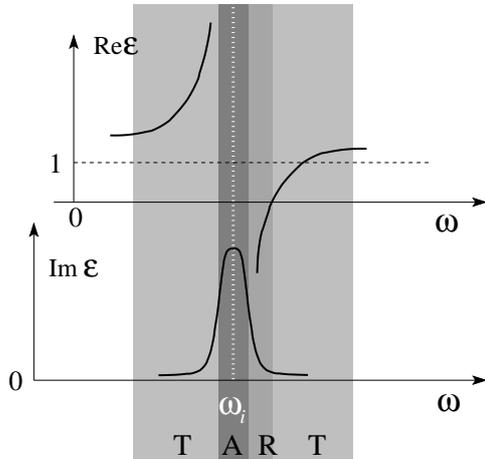


Abb. 6.13: Elektromagnetische Strahlung wird nach Massgabe des Vorzeichens in  $\text{Re } \epsilon$  und dem Wert von  $\text{Im } \epsilon$  transmittiert, absorbiert oder reflektiert.

und beschreiben gerade die Anregungen des Systems. Dieser Sachverhalt wird durch die spezifische Form unserer Dielektrizitätskonstanten (6.50)

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega/\tau_i} \quad (6.55)$$

illustriert: Alle Pole bei

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_i^2 - \frac{1}{4\tau_i^2}} - \frac{i}{2\tau_i} = \pm \bar{\omega}_i - \frac{i}{2\tau_i} \quad (6.56)$$

liegen in der unteren Halbebene.

Schreiben wir die Antwort  $D(\omega) = E(\omega) + [\epsilon(\omega) - 1]E(\omega)$  so erhalten wir in der Antwortfunktion

$$G(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} [\epsilon(\omega) - 1] e^{-i\omega t} \quad (6.57)$$

für jede Mode  $\omega_i, i$   $1/\tau_i, f_i$  den Beitrag

$$G_i(t) = \Theta(t) \frac{4\pi N e^2 f_i}{m} \frac{\sin \bar{\omega}_i t}{\bar{\omega}_i} e^{-t/2\tau_i}. \quad (6.58)$$

Via Faltungstheorem finden wir für  $D(t)$  den Ausdruck

$$D(t) = E(t) + \int_0^\infty dt' G(t') E(t - t'). \quad (6.59)$$

Die Kombination von (6.58) und (6.59) zeigt, dass die Polarisation  $D - E$  durch eine Mittelung des Signals über eine Zeitspanne  $\tau_i$  entsteht.

Betrachten wir die weiteren Eigenschaften von  $G$  und  $\epsilon$ : Aus

$$\epsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty dt G(t) e^{i\omega t} \quad (6.60)$$

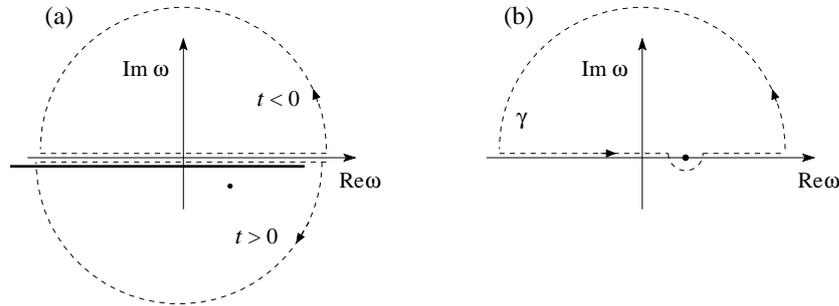


Abb. 6.14: (a) Integrationskontouren in der komplexen  $\omega$ -Ebene für negative Zeiten  $t < 0$  (Integration in der oberen Halbebene) und für positive Zeiten  $t > 0$  (Integration in der unteren Halbebene). Die Anregungen im Material manifestieren sich durch Pole und Schnitte in der Antwortfunktion  $\chi(\omega)$  in der unteren komplexen  $\omega$ -Ebene. (b) Integrationskontour  $\gamma$  für die Berechnung der Kramers-Kronig Relationen die die Real- und Imaginärteile von kausalen Antwortfunktionen verknüpfen.

mit  $G$  reell folgt

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega^*). \quad (6.61)$$

Aus der Kausalität  $G(t) = \Theta(t) G(t)$  folgt die Analytizität von  $\varepsilon(\omega)$  in der oberen Halbebene. Üblicherweise gilt  $G(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$  und  $\varepsilon(\omega)$  ist analytisch auf der reellen Achse. Probleme gibt es für den metallischen Pol bei  $\omega = 0$ ,  $\varepsilon(\omega) \sim 4\pi i\sigma/\omega$ ; die kausale Integration (metallischer Pol unterhalb der reellen Achse) ergibt dann das Resultat

$$G(t) = 4\pi\sigma \Theta(t)$$

und  $G(t)$  fällt im Unendlichen nicht ab. Das Verhalten von  $\varepsilon(\omega)$  bei grossen  $\omega$  folgt aus der Entwicklung von  $G(t)$  bei kleinen Zeiten  $t$ , vgl. (6.60); für grosse  $\omega$  so erhalten wir dann

$$\varepsilon(\omega) - 1 \approx \frac{iG(t=0)}{\omega} - \frac{G'(0)}{\omega^2} + \dots$$

Physikalisch erwarten wir, dass  $G(t=0^+) = 0$  (vergleiche 6.58) und daher zerfällt  $\varepsilon(\omega) - 1$  für grosse Frequenzen gemäss

$$\varepsilon(\omega \rightarrow \infty) - 1 \propto \frac{1}{\omega^2},$$

in Übereinstimmung mit (6.51). Beachte, dass für Metalle  $\varepsilon$  bei  $\omega \rightarrow 0$  einen Pol hat aber für  $\omega \rightarrow \infty$  auch wie  $1/\omega^2$  verschwindet, da

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau} \quad \text{und} \quad \varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi i\sigma(\omega)/\omega.$$

Die Analytizität von  $\varepsilon(\omega)$  erlaubt uns Real- und Imaginärteil von  $\varepsilon$  via den *Kramers-Kronig-Relationen* zu verknüpfen: Mit dem *Cauchy Theorem* können wir  $\varepsilon(z \in \mathbb{C})$  darstellen als

$$\varepsilon(z) = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - z} d\omega'. \quad (6.62)$$

Wir wählen den Contour  $\gamma$  wie in Abb. 6.14(b) skizziert und setzen  $z = \omega + i\delta$ ; der Anteil des Bogens verschwindet wegen dem Abfall (6.4). Mit dem Sokhotzki Theorem<sup>9</sup>, vgl. auch Abb. 6.14(b)

$$\frac{1}{\omega' - \omega \pm i\delta} = P \left( \frac{1}{\omega' - \omega} \right) \mp i\pi\delta(\omega' - \omega) \quad (6.63)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{i\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}, \\ \Re\varepsilon(\omega) &= 1 + \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\Im\varepsilon(\omega')}{\omega' - \omega}, \\ \Im\varepsilon(\omega) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \frac{\Re\varepsilon(\omega') - 1}{\omega' - \omega}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Mit (6.64) können die Dispersions- und Absorptionseigenschaften eines Mediums verbunden werden; dies ermöglicht einen ‘‘Konsistenz-Check’’ von Messungen oder, zum Beispiel, die Berechnung des dispersiven Verhaltens aus der Messung von Absorptionsspektren. Wir erwähnen noch die *f*-Summenregel (eine Verallgemeinerung der Beziehung  $\sum_i f_i = Z$ , folgt aus der Teilchenzahlerhaltung), ein weiterer Konsistenzcheck:

$$\int_0^{\infty} d\omega \Im\varepsilon(\omega) = \frac{\pi}{2} \omega_p^2. \quad (6.65)$$

Genau genommen ist die obige Diskussion für  $\varepsilon$  nicht ganz korrekt, denn  $\varepsilon$  ist nicht wirklich eine Antwortfunktion: Von Aussen können wir das dielektrische Feld  $D$  und nicht das interne elektrische Feld  $E$  vorgeben. Deshalb ist eigentlich  $1/\varepsilon(\omega)$  eine gute Antwortfunktion. Man kann aber argumentieren, dass auch  $\varepsilon(\omega)$  in der oberen Halbebene analytisch ist.

<sup>9</sup>Im Hauptwert  $P[1/(x-x_0)]$  wird die Divergenz bei  $x_0$  symmetrisch um  $x_0$  abgeschnitten; eine in  $x_0$  reguläre Funktion  $f(x)$  lässt sich in  $x_0$  entwickeln so dass das derart regularisierte Integral  $[\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx f(x)/(x-x_0)]_{\delta \rightarrow 0}$  existiert. Der Beitrag  $\propto i\pi\delta(x-x')$  resultiert aus der Integration über dem Halbkreis.

## 6.5 Propagation in dispersive Medien

Zur Vereinfachung der Analyse betrachten wir ein ein-dimensionale Situation; ein Puls sei dann zur Zeit  $t = 0$  charakterisiert durch

$$u(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{2L^2}} \cos k_0 x, \quad (6.66)$$

$$\partial_t u(x, 0) = 0, \quad (6.67)$$

vg. Abb. 6.15.

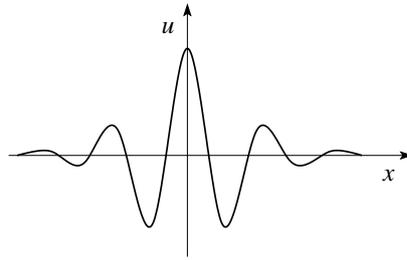


Abb. 6.15: Gaussförmiger Puls mit Trägerfrequenz  $k_0$ .

Die Dynamik sei durch die Wellengleichung (vergleiche 6.8)

$$\left( \frac{c^2}{\mu\varepsilon} - \omega_k^2 \right) = 0 \quad (6.68)$$

gegeben. Für die Dispersion  $\omega_k$  wählen wir<sup>10</sup>

$$\omega_k = \omega_p \left( 1 + \frac{c^2 k^2}{2\omega_p^2} \right) = \omega_p \left( 1 + \frac{\lambda^2 k^2}{2} \right). \quad (6.69)$$

Gemäss (6.11) wird der Puls (6.66) durch die Amplitudenfunktion

$$u(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} L \left[ e^{-\frac{L^2}{2}(k-k_0)^2} + e^{-\frac{L^2}{2}(k+k_0)^2} \right] \quad (6.70)$$

beschrieben. Die Evolution des Pulses in der Zeit ergibt sich aus der Fouriertransformation

$$u(x, t) = \Re \int \frac{dk}{2\pi} u(k) e^{i(kx - \omega_k t)}. \quad (6.71)$$

Die Integration über  $k$  involviert Gausssche Integrale vom Typ

$$\int dk e^{-k^2 \alpha + i k x}$$

<sup>10</sup>Dieser Ansatz lässt sich z.B. begründen via der Dispersion  $\omega^2 = c^2 k^2 / \varepsilon(\omega)$  von Licht im Metall mit  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$  und  $ck \ll \omega_p$ .

welche mit quadratischer Ergänzung und der normierten Gaussfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} = 1$$

einfach berechnet werden können. Man findet das Schlussresultat

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{1}{2} \Re \frac{1}{\sqrt{1 + i\lambda^2\omega_p t/L^2}} e^{-\frac{(x - \omega_p \lambda^2 k_0 t)^2}{2L^2(1 + i\lambda^2\omega_p t/L^2)}} \\ & \times e^{ik_0 x - i\omega_p \left(1 + \frac{\lambda^2 k_0^2}{2}\right) t} \quad (\text{Puls nach rechts}) \\ & + \dots \quad (\text{Puls nach links mit } k_0 \rightarrow -k_0) \end{aligned} \quad (6.72)$$

Das Resultat (6.72) beschreibt zwei Pulse, welche mit der *Gruppengeschwindigkeit*

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} = \omega_p \lambda^2 k_0 \quad (6.73)$$

nach rechts und nach links propagieren und dabei linear in der Zeit *zerfließen*,

$$L(t) = L[1 + (\lambda^2\omega_p t/L^2)^2]^{1/2} \approx \lambda^2\omega_p t/L. \quad (6.74)$$

Im dispersiven Medium ist die *Phasengeschwindigkeit*

$$v_\varphi = \omega_k/k \quad (6.75)$$

einer individuellen Mode ungleich der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \left. \partial_k \omega_k \right|_{k_0} \quad (6.76)$$

eines um  $k_0$  konzentrierten Pulses. Das Resultat (6.76) ist allgemein und folgt aus

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int \frac{dk}{2\pi} u_{k_0}(k) e^{ikx} e^{-i(\omega(k_0) + \partial_k \omega_k|_{k_0} (k - k_0) t)} \\ &= e^{i(k_0 \partial_k \omega_k|_{k_0} - \omega_0) t} \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi} u_{k_0}(k) e^{ik(x - \partial_k \omega_k|_{k_0} t)}}_{u_{k_0}(x - \partial_k \omega_k|_{k_0} t)} \end{aligned}$$

wo wir für einen schmalen Puls  $u(k)$  um  $k_0$  die Dispersion  $\omega_k$  um  $k_0$  herum entwickelt haben. Die Gruppengeschwindigkeit  $v_g = \partial_k \omega_k|_{k_0}$  lässt sich direkt aus dem resultat ablesen. Das Zerfließen des Pulses, vgl. Abb. 6.16 hat seinen Ursprung in der Veränderung der Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  innerhalb des Pulses: Ein schmaler Puls mit Breite  $\Delta x$  involviert Moden im Bereich  $\Delta k \sim 1/\Delta x$  um  $k_0$  herum. Die Gruppengeschwindigkeit im Puls variiert dann um den Betrag

$$\Delta v_g \approx \frac{dv_g}{dk} \Delta k \approx \left. \frac{d^2\omega}{dk^2} \right|_{k_0} \frac{1}{\Delta x}. \quad (6.77)$$

Für die Breite des Pulses ergibt sich somit (vgl. mit dem Resultat 6.74)

$$L(t) \approx \Delta v_g t \approx \lambda^2 \omega_p \frac{t}{L}.$$

Im *nicht*dispersiven Medium mit  $\omega = vk$  bleibt der Puls erhalten.

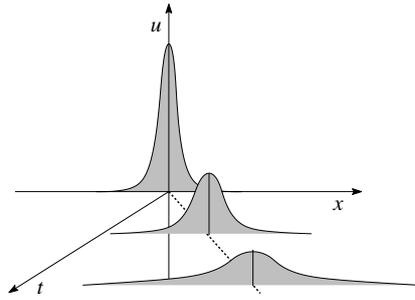


Abb. 6.16: Zerfließen eines Pulses im dispersiven Medium.

# Kapitel 7

## Wellenleiter und Kavitäten

Wir fahren mit der Propagation von Wellen weiter; während im Kapitel 6 offene Geometrien diskutiert wurden (wo für jede vorgegebene Frequenz  $\omega$  alle  $\vec{k}$ -Werte mit  $k = \omega/v$  erlaubt waren) stehen jetzt eingeschränkte Geometrien im Zentrum der Diskussion. Die erlaubten  $\vec{k}$ -Werte ändern sich dann drastisch. Ein *Wellenleiter* ist eine *quasi-1D* Struktur, ausgedehnt entlang einer Richtung (longitudinale Richtung, üblicherweise  $z$ ) und beschränkt in der transversalen Richtung (die Endlichkeit in der transversalen Richtung ist der Grund für die Bezeichnung *quasi-1D*), vgl. Abb. 7.1. Die Beschränkung

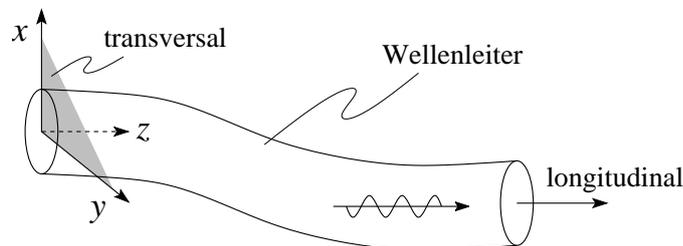


Abb. 7.1: Wellenleiter, mit longitudinaler Dimension entlang  $\vec{z}$  des begleitenden Dreibeins und transversale Dimension in der  $x, y$ -Ebene. Die propagierende elektromagnetische Welle verläuft entlang der longitudinalen Richtung.

der transversalen Dimension bewirkt, dass vom  $\vec{k}$ -Vektor  $(\vec{K}, k_z)$  nur noch  $k_z$  kontinuierlich variiert, währenddem  $\vec{K}$  durch ein Set von diskreten Zahlen (Modenzahlen) ersetzt wird. Schränken wir in einer *Kavität* alle drei Dimensionen ein, so sind nur noch bestimmte  $\omega$ -Werte, welche durch die Modenzahlen festgelegt werden, erlaubt: Man sagt, dass das Spektrum diskret ist (eine Kavität ist eine quasi-0D Struktur).

Es ergibt sich die Frage, wie man den Raum für Wellen einschränken kann — wie erzeugt man eine reduzierte Geometrie? Wir haben gesehen, dass Wel-

len von Metalloberflächen reflektiert werden. Ebenso können Dielektrika die elektromagnetischen Felder zurückwerfen, wenn ihre Brechungsindizes klein sind. Eingeschränkte Geometrien erhält man also durch metallische Begrenzungen, z.B. Hohlwellenleiter, oder durch Regionen erhöhter Dielektrizität, z.B. dielektrische Wellenleiter, Glasfasern, vgl. Abb. 7.2. Aber auch (offende)

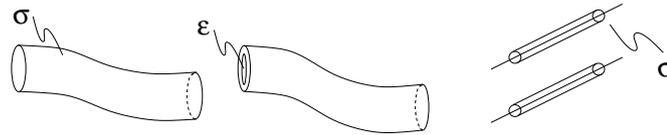


Abb. 7.2: Beispiele für Wellenleiter: Hohlwellenleiter (links) mit Metallschicht der Leitfähigkeit  $\sigma$ ; Glasfaser (Mitte) mit grosser Dielektrizitätskonstante (DK)  $\epsilon$  im Innern und eventuell einer Randschicht mit kleiner DK; metallische Doppelleitung (rechts).

metallische Doppelleitungen ziehen die elektromagnetischen Felder auf sich und definieren damit einen Wellenleiter. Ebenso erzeugt man mit Hilfe von metallischen Schichten oder mit Dielektrika die quasi-0D-Geometrie einer Kavität.

In der Folge behandeln wir zuerst ideale ( $\sigma = \infty$ ) metallische Hohlleiter, besprechen kurz die Korrekturen bei realen ( $\sigma < \infty$ ) metallischen Hohlleitern und betrachten dann metallische Kavitäten. Schliesslich einige Worte zu dielektrischen Wellenleitern. Die Aufgabe ist immer dieselbe: Löse die Maxwellgleichungen mit den entsprechenden Randbedingungen.

## 7.1 Ideale Hohlleiter

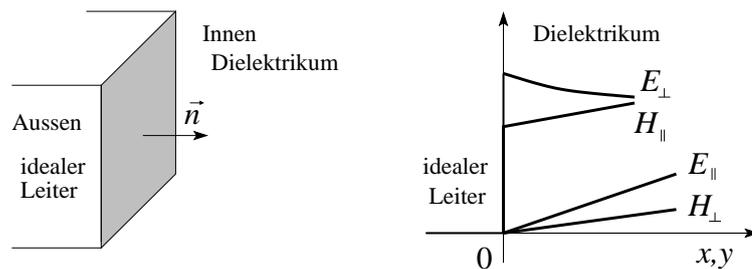


Abb. 7.3: Links: Ideale metallische Grenzfläche: links ein idealer Leiter mit  $\sigma = \infty$  (und  $m_{\text{el}} = 0$ ), rechts ein Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante  $\epsilon$  und magnetischer Permeabilität  $\mu$ . Rechts: Feldverlauf an der Grenzfläche des idealen Leiters: Die Felder  $E_{\perp}$  und  $H_{\parallel}$  verschwinden abrupt an der Grenzfläche, die Felder  $E_{\parallel}$  und  $H_{\perp}$  verschwinden stetig. Im realen Metall verschwinden die  $E_{\perp}$  und  $H_{\parallel}$  Felder auf der Skala  $\delta$  der Skintiefe.

Wir betrachten eine ideale metallische Grenzfläche mit Flächennormale  $\vec{n}$ , vgl. Abb. 7.3. Im idealen Leiter verschwinden alle Felder via instantaner Reaktion der freien Ladungsträger. Die Randbedingungen haben folgende Form,

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{D} &= 4\pi\Sigma, \quad \Sigma = \text{Flächenladungsdichte,} \\ &\longrightarrow \vec{D}_\perp, \vec{E}_\perp \text{ endlich,} \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{K}, \quad \vec{K} = \text{Flächenstromdichte,} \\ &\longrightarrow \vec{H}_\parallel, \vec{B}_\parallel \text{ endlich,} \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{B}_\perp, \vec{H}_\perp = 0, \quad (7.3)$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E}_\parallel, \vec{D}_\parallel = 0. \quad (7.4)$$

In Realität dringen die Felder  $H_\parallel$  und  $E_\parallel$  in den (realen) Leiter auf der Skintiefe  $\delta$  ein (die Felder  $H_\perp$  und  $E_\perp$  fallen auf einer atomaren Skala ab). Beachte, dass nicht einmal für  $\sigma \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  ist, aber  $\delta^2 = mc^2/4\pi ne^2 = \lambda_L^2$  wegen der Trägheit der Elektronen. Die Flächenstromdichte  $\vec{K}$  ist gerade die in der Schicht  $\sim \delta$  fließende Stromdichte  $\vec{j}$ ,  $\vec{K} = \int dx \vec{j}(x)$ ,  $x =$  Tiefe ins Metall. Die Flächenladungsdichte  $\Sigma$  wird auf einer atomaren Skala realisiert und ist daher immer ideal.

Wir setzen für die Felder eine sinusoidale (genauer  $\exp(-i\omega t)$ ) Zeitabhängigkeit an und schreiben die Maxwellgleichungen für die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  auf,

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \frac{i\omega}{c} \vec{B}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{B} &= -\mu\epsilon \frac{i\omega}{c} \vec{E}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Die Felder erfüllen die Wellengleichung<sup>1</sup>

$$\left[ \nabla^2 + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \right] \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (7.6)$$

Wir betrachten die Geometrie eines zylindrischen offenen Halbleiters mit konstantem Querschnitt  $S$ , vgl. Abb. 7.4. Die Richtung  $z$  ist translationsinvariant und wir können eine ebene Welle  $\propto \exp(\pm ikz)$ ,  $k > 0$  ansetzen,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}, \\ \vec{B} &= \vec{B}(x, y) e^{\pm ikz - i\omega t}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

<sup>1</sup>Aus  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = (i\omega/c) \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\epsilon(\omega^2/c^2) \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ .

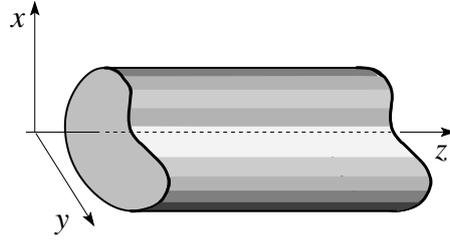


Abb. 7.4: Zylindrischer Hohlleiter mit konstantem Querschnitt  $S$ .

Die Wellengleichung reduziert sich auf das 2D-Problem

$$\left[ \underbrace{\nabla_t^2}_{\partial_x^2 + \partial_y^2} + \underbrace{(\mu\varepsilon\omega^2/c^2 - k^2)}_{\equiv \gamma^2} \right] \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0. \quad (7.8)$$

Wir separieren das Problem in einen longitudinalen und einen transversalen Anteil,

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{E}_t}_{(\hat{z} \times \vec{E}) \times \hat{z}} + \underbrace{\vec{E}_z}_{E_z \cdot \hat{z}}, \quad \vec{B} = \vec{B}_t + \vec{B}_z, \quad (7.9)$$

und schreiben die MG in der Form  $\begin{pmatrix} F = \text{Faraday} \\ A = \text{Ampere} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t &= \mp ik E_z, \\ \vec{\nabla}_t \cdot \vec{B}_t &= \mp ik B_z, \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$(F) \quad \hat{z} \cdot \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = \frac{i\omega}{c} B_z, \quad (7.11)$$

$$(A) \quad \hat{z} \cdot \vec{\nabla}_t \times \vec{B}_t = -\mu\varepsilon \frac{i\omega}{c} E_z,$$

$$(F) \quad \pm ik \vec{E}_t + \frac{i\omega}{c} \hat{z} \times \vec{B}_t = \vec{\nabla}_t E_z, \quad (7.12)$$

$$(A) \quad \pm ik \vec{B}_t - \mu\varepsilon \frac{i\omega}{c} \hat{z} \times \vec{E}_t = \vec{\nabla}_t B_z,$$

Mit (7.12) können wir  $\vec{E}_t$  und  $\vec{B}_t$  sofort finden, wenn wir die longitudinalen Felder  $E_z$  und  $B_z$  kennen (nur noch ein algebraisches Problem, da  $\partial_z \leftrightarrow \pm ik$  und  $\partial_t \leftrightarrow -i\omega$ , eine Folge der Translationsinvarianz in  $z$  und  $t$  des Problems).

Die Randbedingungen für die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  lauten (siehe (7.3) (7.4); beachte, dass  $\vec{E}_{||} = 0$  auf  $S$  impliziert, dass  $E_z|_S = 0$  ist)

$$\vec{n} \times \vec{E}|_S = 0 \longrightarrow \vec{E}_{||}|_S = 0$$

es folgt die Dirichlet Randbedingung

$$\longrightarrow E_z|_S = 0;$$

mit  $\vec{E}_\parallel|_S = 0$  ist auch  $\vec{E}_t|_S \parallel \vec{n}$ . Für das  $\vec{B}$ -Feld ergibt sich eine Neumann Randbedingung in  $B_z$ : aus

$$\vec{n} \cdot \vec{B}|_S = 0 \quad (7.13)$$

folgt auch  $\vec{n} \cdot \vec{B}_t = 0|_S$ , und mit

$$0 = (\vec{n} \times \vec{E}_t + \vec{n} \times \vec{E}_z) \cdot \hat{z} = (\vec{n} \times \vec{E}_t) \cdot \hat{z} = \vec{n} \cdot (\vec{E}_z \times \hat{z}); \quad (7.14)$$

erhalten wir durch Einsetzen in  $\vec{n} \cdot$  (7.12) die Neumann Randbedingung

$$\vec{n} \cdot \vec{\nabla}_t B_z|_S = \frac{\partial B_z}{\partial n}|_S = 0.$$

Unsere Aufgabe reduziert sich damit auf die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + \gamma^2) \begin{pmatrix} E_z \\ B_z \end{pmatrix} &= 0 && \text{mit den RB} && (7.15) \\ E_z|_S &= 0 && \text{Dirichlet RB in } E_z \\ \partial_n B_z|_S &= 0 && \text{Neumann RB in } B_z \end{aligned}$$

Die Gleichung (7.15) definiert ein typisches Eigenwertproblem: Finde  $\gamma$  und  $E_z, B_z \neq 0$  so, dass die Randbedingungen erfüllt werden.<sup>2</sup> Die Gleichung (7.15) separiert in ein Problem für  $E_z$  (mit Dirichlet-Randbedingungen) und eines für  $B_z$  (mit Neumann-Randbedingungen), was uns die Definition zweier generischer Probleme erlaubt wo jeweils ein Feld,  $B_z$  oder  $E_z$  (oder sogar beide) verschwindet.

Wir definieren die *Transversalen Magnetischen* = TM Moden<sup>3</sup> via

$$\begin{aligned} B_z &= 0 && \text{überall,} && (7.16) \\ E_z|_S &= 0 && \text{(elektrischer Typus)} \end{aligned}$$

und die *Transversalen Elektrischen* = TE Moden charakterisiert durch

$$\begin{aligned} E_z &= 0 && \text{überall,} && (7.17) \\ \partial_n B_z|_S &= 0 && \text{(magnetischer Typus).} \end{aligned}$$

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, überall sowohl  $E_z = 0$  als auch  $B_z = 0$  zu setzen. Man erhält dann die *Transversalen ElektroMagnetischen* = TEM Moden mit

$$\begin{aligned} E_z &= 0 && \text{überall,} && (7.18) \\ B_z &= 0 && \text{überall.} \end{aligned}$$

Die vollständige Lösung erhalten wir in drei Schritten:

<sup>2</sup>Beachte: in  $\gamma$  ist  $k$  noch beliebig, nur  $\omega$  ist gegeben.

<sup>3</sup>Mit  $B_z = 0$  ist  $\vec{B} = \vec{B}_t$  rein transversal.

**Skalares Eigenwertproblem für  $E_z$ ,  $B_z$** 

Um die longitudinalen Felder  $E_z$  und  $B_z$  zu finden sind Eigenwertprobleme mit Dirichlet- und Neumann Randbedingungen zu lösen,

$$\begin{aligned} (\nabla_t^2 + \gamma^2)\Psi(x, y) &= 0, \\ \Psi|_S &= 0 \quad (\text{TM}, \Psi = E_z), \\ \text{oder } \partial_n \Psi|_S &= 0 \quad (\text{TE}, \Psi = H_z). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Die Eigenwerte  $\gamma_\lambda^2$  ( $> 0$ , denn die Lösungen im Innern sollen oszillieren, so dass wir die Nullstellen zur Befriedigung der Randbedingungen nutzen können; der Index  $\lambda$  zählt die Eigenwerte) sind im allgemeinen verschieden für TM und TE Moden, da die Randbedingungen verschieden sind.<sup>4</sup> Aus  $\gamma_\lambda$  erhalten wir bei gegebenem  $\omega$  den  $k$ -Wert für die Propagation in  $z$ -Richtung (Dispersion),

$$k_\lambda(\omega) = +\sqrt{\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma_\lambda^2} \quad (7.20)$$

(wir haben bereits früher die Wellenzahlen  $k$  als positiv definiert). Jeder Eigenwert  $\gamma_\lambda$  erzeugt *propagierende Wellen* falls  $\omega > \omega_\lambda$ ,

$$\omega_\lambda = c \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\varepsilon}}; \quad (7.21)$$

$\omega_\lambda$  ist die Abschneidefrequenz für die  $\lambda$ -Mode.

Für Frequenzen  $\omega < \omega_\lambda$  ergibt sich eine in  $z$ -Richtung *quer-gedämpfte Welle* mit  $k_\lambda$  imaginär,

$$k_\lambda = i\sqrt{\gamma_\lambda^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \omega < \omega_\lambda. \quad (7.22)$$

Die Phasengeschwindigkeit

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_\lambda} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 - \omega_\lambda^2/\omega^2}} > \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = v_\varphi (\text{Medium}) \quad (7.23)$$

divergiert bei der Abschneidefrequenz

$$\omega \rightarrow \omega_\lambda^+, \quad (7.24)$$

die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}} \quad (7.25)$$

verschwindet wenn  $\omega \rightarrow \omega_\lambda^+$ . Bei fixem  $\omega$  existieren nur endlich viele propagierende Moden, vgl. Abb. 7.5. Bei hohen Frequenzen wird die Propagation

<sup>4</sup>Ganz allgemein gilt, dass die Randbedingung das Spektrum (mit-)bestimmen.

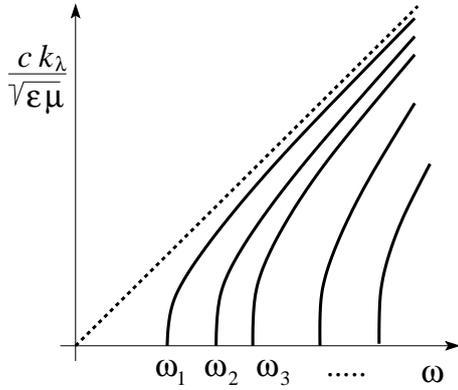


Abb. 7.5: Propagierende Moden mit reellem Wellenvektor  $k_\lambda$  als Funktion der angelegten Frequenz  $\omega$  (schematisch). Bei endlicher Frequenzen  $\omega > \omega_1$  findet man endlich viele Moden die asymptotisch (bei grossen Frequenzen) frei werden,  $ck/\sqrt{\epsilon\mu} \approx \omega$ . Die Frequenzen  $\omega_\lambda = c\gamma_\lambda/\sqrt{\epsilon\mu}$  bezeichnen die kritischen Abschnidefrequenzen.

frei, d.h.  $k_\lambda \rightarrow \sqrt{\mu\epsilon}\omega/c = k_{\text{frei}}$ . Bei tiefen Frequenzen  $\omega \rightarrow \omega_\lambda$  muss die transversale Struktur der Welle aufgebaut werden — je grösser  $\omega_\lambda$ , desto komplexer die transversale Struktur der Welle. Wir werden diesen Sachverhalt an einem Beispiel studieren (siehe Seite 168)

### Transversale Felder aus $E_z, B_z$

Wir finden zuerst die zu  $E_z$  und  $B_z$  gehörigen transversalen Felder  $\vec{E}_t$  und  $\vec{H}_t$ : aus (7.12) folgt<sup>5</sup>

$$\begin{aligned}\vec{E}_t &= \pm \frac{ik_\lambda}{\gamma_\lambda^2} \vec{\nabla} E_z \quad (\text{TM-Moden}), \\ \vec{H}_t &= \pm \frac{ik_\lambda}{\gamma_\lambda^2} \vec{\nabla} H_z \quad (\text{TE-Moden}).\end{aligned}\tag{7.26}$$

Dabei ergibt die Wahl von  $H$  statt  $B$  symmetrischere Ausdrücke wenn wir die verbleibenden Felder bestimmen.

<sup>5</sup>Zum Beispiel nutze man zur Berechnung von  $\vec{E}_t$ , dass  $B_z = 0$ , also  $ik\vec{B}_t = i\mu\epsilon(\omega/c)\hat{z} \times \vec{E}_t$ , und demnach

$$ik\vec{E}_t + \frac{i\omega}{c}\hat{z} \times \vec{B}_t = ik\vec{E}_t + i\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \frac{1}{k} \underbrace{\hat{z} \times \hat{z} \times \vec{E}_t}_{-\vec{E}_t} = \vec{\nabla}_t E_z,$$

**Transversale Felder aus  $\vec{E}_t$  und  $\vec{H}_t$** 

Schliesslich gibt uns wiederum (7.12) die verbleibenden Felder

$$\begin{aligned}\vec{H}_t &= \pm \frac{1}{Z_\lambda} \hat{z} \times \vec{E}_t, & (\text{TM-Moden}), \\ \vec{E}_t &= \mp Z_\lambda \hat{z} \times \vec{H}_t, & (\text{TE-Moden})\end{aligned}\quad (7.27)$$

mit der *Wellenimpedanz*<sup>6</sup>

$$Z_\lambda = \begin{cases} \frac{ck_\lambda}{\varepsilon\omega}, & (\text{TM-Moden}), \\ \frac{\mu\omega}{ck_\lambda}, & (\text{TE-Moden}). \end{cases}\quad (7.28)$$

Damit haben wir das Problem für die TM- und TE-Wellen vollständig gelöst.

**TEM-Moden**

Mit  $E_z \equiv B_z = 0$  werden  $\vec{E} = \vec{E}_t$  und  $\vec{B} = \vec{B}_t$  rein transversal; dann folgt mit (7.10) und (7.11)

$$\vec{\nabla}_t \cdot \vec{E}_t = 0 \quad \text{und} \quad \vec{\nabla}_t \times \vec{E}_t = 0 \quad (7.29)$$

und wir können das Problem auf ein Elektrostatik-Problem in zwei Dimensionen reduzieren. Es existiert dann ein Potential  $\varphi$ , so dass  $\vec{E}_t = -\vec{\nabla}\varphi$  ist und es gilt  $\nabla_t^2 \vec{E}_t$  (denn  $\nabla_t^2 \varphi = 0$ ). Einsetzen in die Wellengleichung (7.8),  $(\nabla_t^2 + \gamma^2)\vec{E}_t = 0$ , ergibt uns die ungestörte Dispersion

$$k = \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c} \quad (\text{TEM-Moden}) \quad (7.30)$$

des Mediums. Dies folgt gleichermassen aus den Gleichungen (7.12) mit  $\vec{\nabla}_t E_z = 0 = \vec{\nabla}_t B_z$ ; die Säkulargleichung des Matrixproblems gibt gerade  $\gamma^2 = 0$ .

Schliesslich folgt  $\vec{B}_t$  aus dem Faradaygesetz,

$$\vec{B}_t = \pm \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{z} \times \vec{E}_t. \quad (\text{TEM-Moden}) \quad (7.31)$$

Allerdings hat das Problem

$$\nabla_t^2 \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \varphi|_S = \text{const} \quad (7.32)$$

nur die Lösung  $\varphi = \text{const.}$ , und damit ist  $\vec{E}_t = 0$  im Inneren eines Hohlleiters. Erst wenn wir mehrere Zylinderflächen haben, können im Zwischenraum TEM-Moden propagieren; entsprechend existieren TEM-Moden in Koaxialkabeln und in Doppelleitern. In der Folge diskutieren wir einige Beispiele.

<sup>6</sup>Mit der Wahl der Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  erhalten wir in den Impedanzen die Symmetrie  $\varepsilon \leftrightarrow \mu$ , TM  $\leftrightarrow$  TE

### Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt

Wir berechnen das Spektrum und die transversale Struktur der Moden (Eigenwerte und Eigenfunktionen) für das Rechteckproblem, vgl. Abb. 7.6 Wir

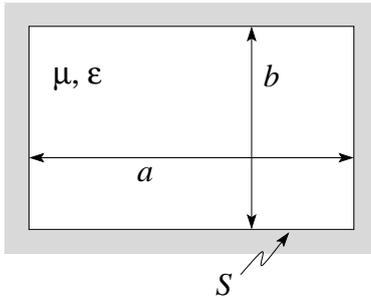


Abb. 7.6: Geometrie des Rechteckleiters mit  $b < a < 2b$ .

folgen dem auf Seiten 167ff beschriebenen Schema. Das Eigenwertproblem

$$(\partial_x^2 + \partial_y^2 - \gamma^2)\Psi = 0,$$

hat die Lösungen

für TM-Moden:  $\Psi|_S = 0$ ,  $\Psi_{nm}(x, y) = E_{nm} \sin(m\pi x/a) \sin(m\pi y/b)$ ,  
 $m, n$  ganz,  $\neq 0$ .

für TE-Moden:  $\partial_n \Psi|_S = 0$ ,  $\Psi_{nm}(x, y) = H_{nm} \cos(m\pi x/a) \cos(m\pi y/b)$ ,  
 $m, n$  ganz, nicht beide 0. Die Eigenwerte

$$\gamma_{mn}^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad \text{Eigenwerte,}$$

ergeben die Abschneidefrequenzen

$$\omega_{mn} = \frac{c\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad \text{Abschneidefrequenzen} \quad (7.33)$$

Die Moden sind in Abb. 7.7 skizziert. und sind durch folgende Abschneidefrequenzen charakterisiert,

$$\begin{aligned} TE_{1,0} & : & \omega_{10} &= \frac{c\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}a} \\ TE_{0,1} & : & \omega_{01} &= \frac{c\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}b} \\ TM_{1,1}, TE_{1,1} & : & \omega_{11} &= \frac{c\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} (a^{-2} + b^{-2})^{1/2} \\ TE_{2,0} & : & \omega_{20} &= \frac{c4\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}a} \end{aligned}$$

Die verbleibenden Feldkomponenten folgen trivial durch Ableitung und Multiplikation, vgl. (7.26) und (7.27).

Das Eigenwertproblem

$$\left[ \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho \partial_\rho) + \frac{1}{\rho^2} \partial_\varphi^2 + \gamma^2 \right] \Psi = 0$$

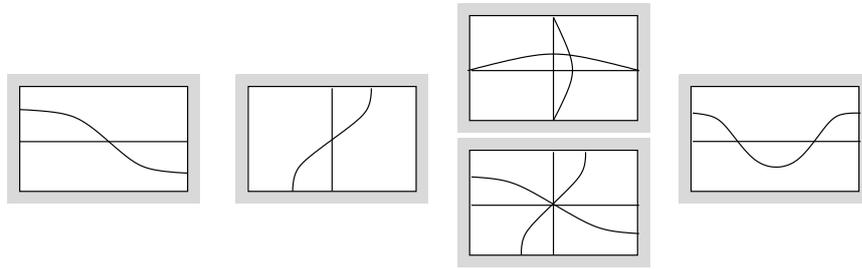


Abb. 7.7: Moden im Rechteckleiter (schematisch): von links nach rechts:  $TE_{1,0}$ ,  $TE_{0,1}$ ,  $TM_{1,1}$  und  $TE_{1,1}$ ,  $TE_{2,0}$ .

### Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt

Wir berechnen das Spektrum und die transversale Struktur der Moden (Eigenwerte und Eigenfunktionen) für das Kreisproblem, vgl. Abb. 7.8

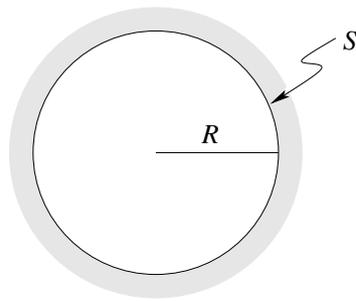


Abb. 7.8: Geometrie des kreisförmigen Leiters.

hat die Lösungen

$$\Psi(\rho, \varphi) = I_m(\gamma_{mn}\rho)e^{\pm im\varphi}.$$

für TM-Moden:  $\Psi|_S = 0$ ,  $\gamma_{mn} = x_{mn}/R$  mit  $J_m(x_{mn}) = 0$ ,

für TE-Moden:  $\partial_\rho \Psi|_S = 0$ ,  $\gamma_{mn} = x'_{mn}/R$  mit  $J'_m(x'_{mn}) = 0$ .

Dabei bezeichnet der Index  $n$  in  $x_{mn}$  und  $x'_{mn}$  die  $n$ -te Nullstelle bezeichnet. Die Nullstellen

$$\begin{array}{ll} x_{mn} : & x_{0n} = 2.405, 5.520, \dots & x'_{mn} : & x'_{0n} = 3.832, 7.016, \dots \\ & x_{1n} = 3.832, 7.016, \dots & & x'_{1n} = 1.841, 5.331, \dots \\ & x_{2n} = 5.136, \dots & & x'_{2n} = 3.054, 6.706, \dots \\ & & & x'_{3n} = 4.201, \dots \end{array}$$

definieren die Eigenwerte  $\gamma_{mn} = x_m n^{(l)}/R$  und die Abschneidefrequenzen

$$\omega_{mn} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}R} \begin{cases} x_{mn}, & \text{TM-Moden,} \\ x'_{mn}, & \text{TE-Moden.} \end{cases}$$

Es ergibt sich die Sequenz  $TE_{1,1} \rightarrow TM_{0,1} \rightarrow TE_{2,1} \rightarrow TM_{1,1} \hat{=} TE_{0,1} \dots$ . Die tiefste Mode ist die transvers-elektrische  $TE_{1,1}$  = magnetische Welle und

nicht die symmetrische transvers-magnetische  $TM_{0,1}$  = elektrische Welle; die beiden Moden sind in Abb. 7.9 skizziert. Die verbleibenden Feldkomponenten folgen trivial durch Ableitung und Multiplikation, vgl. (7.26) und (7.27).

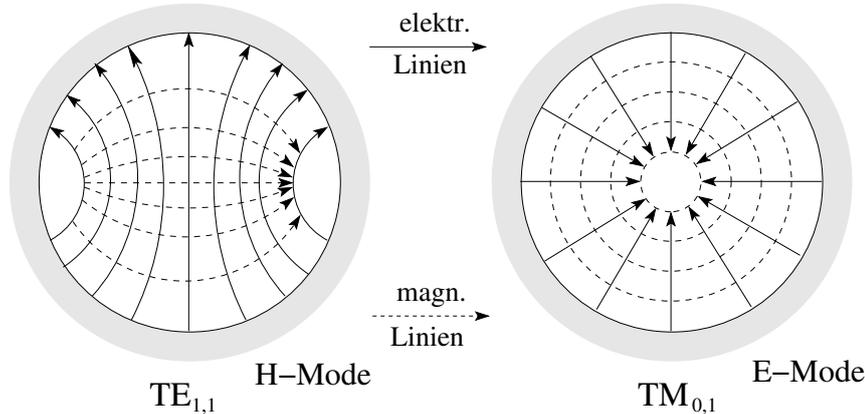


Abb. 7.9: Moden im kreisförmigen Hohlleiter (schematisch): links die  $H$ -Mode mit einem azimutalen Knoten und keinen radialen Knoten, rechts  $E$ -Mode, keine Knoten. Die ausgezogenen Linien folgen elektrischen, die gestrichelten magnetischen Feldlinien.

Aus den Beispielen erkennen wir folgende Zusammenhänge:

1.  $\gamma^2 > 0$ , weil wir oszillatorische und nicht exponentielle Lösungen brauchen, um die Randbedingungen erfüllen zu können.  
Z.B.,  $\sin$  ( $\cos$ ) mit  $\gamma^2 > 0$  versus  $\sinh$  ( $\cosh$ ) mit  $\gamma^2 < 0$ ,  
oder  $J_n$  oszillatorisch mit  $\gamma^2 > 0$ , versus  $I_n$  exponentiell mit  $\gamma^2 < 0$ .
2. Die Lösung enthält eine transversale Struktur (siehe Seiten 169, 171) und eine (triviale, longitudinale) Struktur  $e^{\pm ikz}$ . Gegeben  $\omega$ , müssen sich die Quantitäten  $k^2$  und  $\gamma^2$  zu  $\omega^2$  addieren,  $\omega^2 = (c^2/\mu\varepsilon)(k^2 + \gamma^2)$ ; der Eigenwert  $\gamma^2$  spielt dann die Rolle von  $K^2$  bei der ebenen Welle und es gibt einen Erhaltungssatz,

$$\omega^2 = \text{const} \begin{cases} k^2 + \gamma^2 \\ k_z^2 + K^2 \end{cases}$$

Je grösser  $K, \gamma$  ist, desto kurzwelliger, energetischer ist die transversale Struktur. Bei gegebenem  $\omega$  kann die Welle nur propagieren, wenn

$$\left. \begin{matrix} k_z^2 \\ k^2 \end{matrix} \right\} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 - \begin{cases} K^2 \\ \gamma^2 \end{cases} > 0$$

ist, andernfalls ist die Welle quergedämpft, evaneszent. Umgekehrt muss eine propagierende Welle mit  $k, k_z$  eine genügend hohe Frequenz

$\omega > \omega_\lambda$  haben. Ist  $\omega^2 \gg c^2\gamma^2/\mu\varepsilon$  so ist genügend Energie für die  $k$ -Propagation übrig und die Welle wird frei,

$$\omega \approx ck/\mu\varepsilon. \quad (7.34)$$

### Energiefluss

Die Wellen im Hohlleiter (und in anderen Leitergeometrien) transportieren Energie (vgl. (6.12) und (6.14)): Mit  $\vec{S} = (c/8\pi)\vec{E} \times \vec{H}^*$  und den Resultaten (7.19 für  $\Psi = E_z, H_z$ ), (7.26 für  $\vec{E}_t, \vec{H}_t$ ) und (7.27 für  $\vec{H}_t, \vec{E}_t$ ) erhalten wir

$$\vec{S} = \frac{\omega k}{8\pi\gamma^4} \begin{cases} \varepsilon[\hat{z}|\vec{\nabla}_t\Psi|^2 + i\frac{\gamma^2}{k}\Psi\vec{\nabla}_t\Psi^*], & \text{TM-Moden,} \\ \mu[\hat{z}|\vec{\nabla}_t\Psi|^2 - i\frac{\gamma^2}{k}\Psi^*\vec{\nabla}_t\Psi], & \text{TE-Moden.} \end{cases} \quad (7.35)$$

Der erste Term gibt das Zeitmittel des Energietransportes entlang des Leiters, der zweite Term beschreibt die schnelle ( $2\omega$ ) transversale Energiekonversion zwischen magnetischer und elektrischer Energie (im  $E$ - und  $H$ -Feld gespeicherte Energie, transversaler/reaktiver Anteil in  $\vec{S}$ ).

Für die longitudinale Komponente erhalten wir (nach Integration über den Querschnitt des Hohlleiters und Nutzung des Satzes von Green) den Ausdruck

$$P = \frac{c}{8\pi\sqrt{\mu\varepsilon}} \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2 \sqrt{1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ \mu \end{array} \right\} \int_A d^2R \Psi^* \Psi \quad (7.36)$$

für die transportierte Leistung. Analog erhält man für die Feldenergie pro Länge den Ausdruck

$$U = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2 \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ \mu \end{array} \right\} \int_A d^2R \Psi^* \Psi. \quad (7.37)$$

Der Vergleich von (7.36) und (7.37) zeigt, dass die Energie mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_g = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 - \omega_\lambda^2/\omega^2} \quad (7.38)$$

transportiert wird.

## 7.2 Reale metallische Hohlleiter

Anstelle der idealisierten Randbedingungen (7.1) bis (7.4) treten nun die Bedingungen (mit  $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}$  den Feldern im Vakuum und  $\vec{E}_c, \vec{H}_c, \vec{B}_c$  den

Feldern im Metall)

$$\begin{aligned}\vec{n} \cdot \vec{D} &= 4\pi\Sigma, \\ \vec{n} \times (\vec{E} - \vec{E}_c) &= 0, \\ \vec{n} \cdot (\vec{B} - \vec{B}_c) &= 0, \\ \vec{n} \times (\vec{H} - \vec{H}_c) &= 0.\end{aligned}\tag{7.39}$$

Beachte die unterschiedliche Behandlung der Oberflächenladung  $\Sigma$  und des Oberflächenstromes  $\vec{K}$ : Die Oberflächenladungen leben auf einer atomaren Skala und bleiben ideal; die Ströme leben auf der Skintiefe  $\delta$  und werden deshalb voll mitgenommen.

Wir definieren die planare Geometrie wie in Abb. 7.10 gezeigt; die grössten Gradienten manifestieren sich entlang der Oberflächennormalen  $\vec{n}$ , so dass

$$\vec{\nabla} \approx -\vec{n}\partial_\xi.\tag{7.40}$$

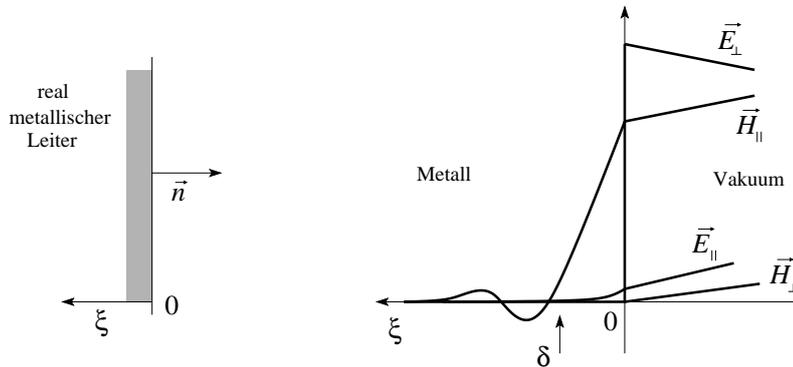


Abb. 7.10: Links: planare Grenzschicht und Definition von  $\xi$ ; der Leiter befindet sich auf der linken Seite. Rechts: Verhalten der  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder an der Grenzschicht zum realen Leiter (linke Seite): aufgrund der Oberflächenladungen fällt das  $E_\perp$ -Feld auf einer atomaren Längenskala ab, währenddem die Oberflächenströme das  $H_\parallel$  Feld auf der Skintiefe zum Verschwinden bringen. Im realen Leiter dringt dann das  $E_\parallel$ -Feld ebenfalls auf der Skale  $\delta$  der Skintiefe ins Metall ein. Die ins Metall eindringenden Felder erzeugen eine Dissipation der Mode.

Die Felder  $\vec{E}_\perp$  und  $\vec{H}_\parallel$  im Aussenraum seien durch die Wellenfelder für den Idealfall vorgegeben,  $\vec{E}_\perp \approx \vec{E}_\perp^{\text{ideal}}$ ,  $\vec{H}_\parallel \approx \vec{H}_\parallel^{\text{ideal}}$ . Wir untersuchen, wie diese Felder ins Metall eindringen. Dazu studieren wir die Gleichungen von

Faraday und Ampère/Maxwell,

$$\begin{aligned}\vec{H}_c &= -\frac{ic}{\mu_c\omega}\vec{\nabla}\times\vec{E}_c, \\ \vec{E}_c &\approx \frac{c}{4\pi\sigma}\vec{\nabla}\times\vec{H}_c + \underbrace{\frac{i\omega}{4\pi\sigma}\vec{E}_c}_{\text{klein}}\end{aligned}\quad (7.41)$$

Mit (7.40) erhalten wir

$$\begin{aligned}\vec{H}_c &= \frac{ic}{\mu_c\omega}\vec{n}\times\partial_\xi\vec{E}_c, \\ \vec{E}_c &\approx -\frac{c}{4\pi\sigma}\vec{n}\times\partial_\xi\vec{H}_c,\end{aligned}\quad (7.42)$$

und daraus

$$\begin{aligned}\vec{n}\cdot\vec{H}_c &= \frac{ic}{\mu_c\omega}\vec{n}\cdot(\vec{n}\times\partial_\xi\vec{E}_c) = 0, \\ \vec{n}\times\vec{H}_c &= -\frac{ic}{\mu_c\omega}\partial_\xi\vec{E}_c = \frac{ic^2}{4\pi\sigma\mu_c\omega}\partial_\xi^2(\vec{n}\times\vec{H}_c).\end{aligned}\quad (7.43)$$

Daraus finden wir im Metall ein  $\vec{H}_c$ -Feld parallel zur Oberfläche, welches auf der Skintiefe  $\delta = \sqrt{c^2/2\pi\sigma\mu_c\omega}$  zerfällt,

$$\vec{H}_c = \vec{H}_\parallel e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta}.\quad (7.44)$$

Das Ampère Gesetz gibt uns sofort das elektrische Feld im Metall,

$$\vec{E}_c = \sqrt{\frac{\omega\mu_c}{8\pi\sigma}}(1-i)(\vec{n}\times\vec{H}_\parallel)e^{-\xi/\delta} e^{i\xi/\delta} = \vec{E}_{c\parallel}.\quad (7.45)$$

Aus der Randbedingung  $\vec{n}\times(\vec{E}-\vec{E}_c) = 0$  erhalten wir jetzt auch eine kleine Parallelkomponente im  $\vec{E}$ -Feld,

$$\vec{E}_\parallel = \sqrt{\frac{\omega\mu_c}{8\pi\delta}}(-i)(\vec{n}\times\vec{H}_\parallel).\quad (7.46)$$

Damit erhalten wir das in Abb. 7.10 gezeigte Verhalten der  $\vec{E}$ - und  $\vec{H}$ -Felder an der Vakuum-Metall Grenzschicht: Das elektrische Feld  $E_\perp$  verschwindet auf der atomaren Skala  $a_0 \ll \delta$  im Metall. Wir sehen, dass das treibende Feld  $H_\parallel$  ist, mit einem exponentiellen Zerfall  $H_{c\parallel}$  ins Metall und einem kleinen Begleitfeld  $E_{c\parallel}$ . Die  $\perp$  Komponenten verschwinden im Metall.

Aus (7.44) und (7.45) folgt, dass elektromagnetische Energie ins Metall einfließt und dort in der Schicht  $\delta$  dissipiert wird; die pro Flächeneinheit absorbierte Leistung  $dP/dA$  ist

$$\frac{dP}{dA} = -\frac{c}{8\pi}\Re[\vec{n}\cdot(\vec{E}_c\times\vec{H}_c)] = \frac{\mu_c\omega}{16\pi}\delta|H_\parallel|^2.\quad (7.47)$$

Dass diese Leistung dissipiert wird, folgt aus dem Vergleich mit der ohmschen Dissipation in der Randschicht,

$$\frac{1}{2} \int d\xi \vec{j} \cdot \vec{E}^* = \frac{1}{2\sigma} \int d\xi \vec{j} \cdot \vec{j}^* = \frac{1}{2\sigma} \frac{2\mu_c \omega \sigma}{8\pi} |H_{\parallel}|^2 \int_0^{\infty} d\xi e^{-2\xi/\delta} = \frac{\mu_c \omega}{16\pi} \delta |H_{\parallel}|^2.$$

Die idealisierte *Flächenstromdichte*  $\vec{K}$  (siehe (7.2)) ergibt sich aus der Aufintegration der realen Stromdichte  $\vec{j}$ ,

$$\vec{K} = \int_0^{\infty} d\xi \vec{j} = \frac{c}{4\pi} \vec{n} \times \vec{H}_{\parallel}; \quad (7.48)$$

der reale Leiter mit der Stromdichte  $\vec{j}$  auf der Skala  $\delta$  entspricht damit einem perfekten Leiter mit der Flächenstromdichte  $\vec{K}$ . Die dissipierte Leistung (7.47) lässt sich dann schreiben als

$$\frac{dP}{dA} = \frac{1}{2\sigma\delta} K^2 \quad (7.49)$$

und wir erhalten den *Oberflächenwiderstand*  $1/\sigma\delta$ .

Im realen Hohlleiter wird Energie in der Wand dissipiert und die Welle zerfällt in der longitudinalen Richtung. Dies können wir durch den komplexen  $k$ -Vektor

$$k_{\lambda} = k_{\lambda}^{(0)} + \alpha_{\lambda} + i\beta_{\lambda} \quad (7.50)$$

- $k_{\lambda}^{(0)}$  :  $k_{\lambda}$ -Wert im idealen Leiter
- $\alpha_{\lambda}$  : Shift in der Frequenz
- $\beta_{\lambda}$  : Dämpfung entlang  $z$

berücksichtigen, wobei wir die Korrekturen  $\alpha_{\lambda}$ ,  $\beta_{\lambda}$  für grosse  $\sigma$  als klein annehmen können. Wir können diese Parameter durch Lösung des modifizierten Randwertproblems finden. Hier konzentrieren wir uns auf die Dämpfung  $\beta_{\lambda}$  und gebrauchen folgende Überlegung: Mit der Abnahme der in der Welle propagierenden Leistung gemäss  $P(z) = P_0 e^{-2\beta_{\lambda} z}$  können wir via

$$\beta_{\lambda} = -\frac{1}{2} \frac{d \ln P(z)}{dz} = -\frac{1}{2P} \frac{dP}{dz} \quad (7.51)$$

den Parameter  $\beta_{\lambda}$  durch die Berechnung der in den Wänden dissipierten Leistung  $P$  finden. Mit (7.48), (7.49) erhalten wir:

$$-\frac{dP}{dz} = \frac{c^2}{16\pi^2} \frac{1}{2\sigma\delta} \oint_{\partial S} d\ell (\vec{n} \times \vec{H}_{\parallel})^2.$$

Einsetzen der Lösungen (7.19), (7.26), (7.27) ergibt

$$\begin{aligned} \text{TM} : & \frac{c^2}{32\pi^2\sigma\delta} \left(\frac{\omega}{\omega_{\lambda}}\right)^2 \oint_{\partial S} d\ell \frac{c^2}{\mu^2\omega_{\lambda}^2} |\partial_n \Psi|^2, \\ \text{TE} : & \frac{c^2}{32\pi^2\sigma\delta} \left(\frac{\omega}{\omega_{\lambda}}\right)^2 \oint_{\partial S} d\ell \frac{c^2}{\mu\epsilon\omega_{\lambda}^2} \left(1 - \frac{\omega_{\lambda}^2}{\omega^2}\right) |\vec{n} \times \vec{\nabla}_t \Psi|^2 + \frac{\omega_{\lambda}^2}{\omega^2} |\Psi|^2. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Mit Hilfe der Abschätzungen (wir approximieren  $\nabla_t^2 \Psi \sim (\mu \varepsilon \omega_\lambda^2 / c^2) \Psi$ )

$$\langle |\partial_n \Psi|^2 \rangle \sim \langle |\vec{n} \times \vec{\nabla}_t \Psi|^2 \rangle \sim \mu \varepsilon \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} \langle |\Psi|^2 \rangle,$$

und

$$\oint_{\partial S} dl \sim \frac{C}{A} \int_S d^2 R, \quad C = \text{Umfang } A = \text{Fläche},$$

findet man schliesslich das approximative Resultat

$$\beta_\lambda = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{\sigma \delta_\lambda} \frac{C}{A} \frac{\sqrt{\omega/\omega_\lambda}}{\sqrt{1 - \omega_\lambda^2/\omega^2}} \left[ \xi_\lambda + \eta_\lambda \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2} \right], \quad (7.53)$$

mit  $\delta_\lambda$  der Skintiefe bei  $\omega = \omega_\lambda$ , und  $\xi_\lambda, \eta_\lambda$  sind Geometrie/Mittelungs-Faktoren der Grössenordnung 1. Für TM Moden ist  $\eta_\lambda = 0$  und  $\beta_{\min}$  wird bei  $\omega = \frac{\omega_\lambda}{\sqrt{3}}$  angenommen. Für  $\omega \rightarrow \omega_\lambda$  geht  $\beta_\lambda \rightarrow \infty$ , und die Welle wird

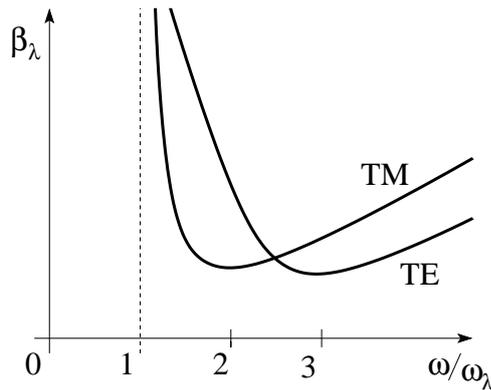


Abb. 7.11: Dämpfung  $\beta_\lambda$  der TE und TM Moden  $\lambda$  (schematisch). Die Dämpfung divergiert an der Abschnidefrequenz  $\omega_\lambda$ : Zur Querdämpfung kommt eine starke dissipative Dämpfung hinzu.

überdämpft, bevor sie quergedämpft wird. Ein typischer Wert für  $Cu$  bei Mikrowellenfrequenzen  $\sim 10^9 \text{ Hz}$  ist ( $\sigma \sim 10^{-4} \text{ cm}$ ,  $\sigma \sim 10^{18} \text{ s}^{-1}$ ; Check!)

$$\beta_\lambda \sim \frac{3 \cdot 10^{10}}{8\pi \cdot 10^{-4} \cdot 10^{18}} \frac{C}{A} \sim 10^{-1} \frac{C}{A} \quad (7.54)$$

$$\longrightarrow 1/\beta_\lambda \sim 10 \text{ cm}.$$

### 7.3 Kavitäten

Eine Kavität schliesst die Wellen in allen drei Dimensionen ein. Die Form ist beliebig und determiniert das Spektrum via Randbedingungen. Hier betrachten wir zunächst den Fall abgeschlossener Hohlleiter — man sieht sofort, wie die nochmalige Reduktion der Dimensionalität, von quasi-1D auf

quasi-0D, das Spektrum diskret macht. Terminieren wir den in 7.1 betrachteten Hohlleiter mit idealen Leitern, so erhalten wir in  $z$ -Richtung stehende Wellen vom Typ

$$A \sin kz + B \cos kz.$$

Wir platzieren die Terminatoren bei  $z = 0$  und  $z = d$ . Aus (7.26) und (7.27) finden wir

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \frac{1}{\gamma_\lambda^2} \partial_z \vec{\nabla}_t E_z, & (\text{TM-Moden}), \\ \vec{E}_t &= -i \frac{\mu\omega}{c\gamma_\lambda^2} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t H_z, & (\text{TE-Moden}). \end{aligned} \quad (7.55)$$

Mit der Randbedingung  $\vec{E}_t(z = 0, d) = 0$  erhalten wir hieraus die Ausdrücke

$$\begin{aligned} E_z &= \Psi(x, y) \cos \frac{p\pi z}{d}, & p = 0, 1, 2, 3, \dots & \quad (\text{TM-Moden}), \\ H_z &= \Psi(x, y) \sin \frac{p\pi z}{d}, & p = 0, 1, 2, 3, \dots & \quad (\text{TE-Moden}), \end{aligned} \quad (7.56)$$

mit den transversalen Feldern

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{p\pi}{d\gamma_\lambda^2} \sin \frac{p\pi z}{d} \vec{\nabla}_t \Psi \\ \vec{H}_t &= \frac{i\varepsilon\omega}{c\gamma_\lambda^2} \cos \frac{p\pi z}{d} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t \Psi \end{aligned} \right\} (\text{TM-Moden}), \\ \left. \begin{aligned} \vec{E}_t &= -\frac{i\omega\mu}{c\gamma_\lambda^2} \sin \frac{p\pi z}{d} \hat{z} \times \vec{\nabla}_t \Psi \\ \vec{H}_t &= \frac{p\pi}{d\gamma_\lambda^2} \cos \frac{p\pi z}{d} \vec{\nabla}_t \Psi \end{aligned} \right\} (\text{TE-Moden}). \end{aligned} \quad (7.57)$$

Wie erwartet verschwindet  $\vec{E}_t$  bei  $z = 0$  und  $d$ . Mit der Befriedigung der Randbedingung  $\vec{E}_t(z = 0, d) = 0$  haben wir  $k_p = p\pi/d$  festgelegt. Setzen wir das Resultat in den Eigenwert  $\gamma_\lambda^2$  ein, so finden wir, dass nunmehr die Frequenz  $\omega$  bestimmte Werte annehmen muss, wenn wir eine *Kavitätsmode* anregen wollen,

$$\omega_{\lambda p}^2 \stackrel{(7.8)}{=} \frac{c^2}{\mu\varepsilon} \left[ \gamma_\lambda^2 + \left( \frac{p\pi}{d} \right)^2 \right].$$

Das Spektrum für die Resonanzmoden der Kavität ist diskret: nur noch die Punkte  $\bullet$  sind erlaubt, siehe Abb. 7.12.

### zylindrische Kavität

Als Beispiel können wir den zylindrischen Hohlleiter von Seite 170 zur Kavität umfunktionieren und erhalten für das Spektrum

$$\omega_{mnp} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{x_{mn}^{(\prime)2}}{R^2} + \frac{p^2\pi^2}{d^2}} \begin{cases} \text{TM: } x_{mn}, p \geq 0, \\ \text{TE: } x'_{mn}, p \geq 1. \end{cases} \quad (7.58)$$

Die tiefste TM Mode hat die Modenzahlen 010, die tiefste TE Mode ist diejenige zu 111. Für  $\delta > 2.03R$  ist die  $TE_{111}$  die Fundamentale der Kavität.

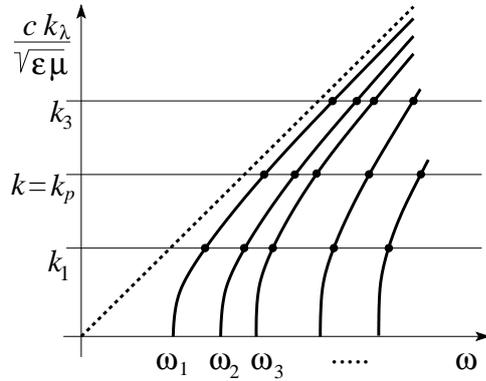


Abb. 7.12: Moden einer metallischen Kavität (schematisch): Aufgetragen ist  $k_\lambda/\sqrt{\mu\varepsilon}$  als Funktion der angelegten Frequenz  $\omega$ . Das Spektrum ist diskret, nur bestimmte Werte  $(k_\lambda, \omega)$  sind erlaubt.

### Reale Kavitäten

In *realen Kavitäten* werden die Moden wiederum gedämpft. Der  $Q$ -Wert der Kavität beschreibt die Anzahl Oszillationen welche überleben,

$$Q_{\lambda p} = \omega_{\lambda p} \frac{\text{Energie der Mode}}{\text{Verlust pro Periode}} \quad (7.59)$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dt} = -\frac{\omega}{Q}U, \quad U = U_0 e^{-\omega t/Q}.$$

Aus der Lösung für die Felder (7.56) und (7.57) lassen sich die Energie und die Verlustleistung berechnen<sup>7</sup> und wir erhalten den  $Q$ -Faktor (mit  $\xi_\lambda \sim 1$ )

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \frac{d}{\delta} \frac{1}{2(1 + \xi_\lambda Cd/4A)}. \quad (7.62)$$

Allgemein hat  $Q$  die Form

$$Q = \frac{\mu}{\mu_c} \cdot \frac{V}{S\delta} \times \text{geometrischer Faktor}, \quad (7.63)$$

mit  $V$  =Volumen,  $S$  =Oberfläche der Kavität, d.h.  $Q$  ist im wesentlichen bestimmt durch das Verhältnis von Feldvolumen  $V$  zu Dissipationsvolumen  $\delta S$  (beachte,  $Ad/Cd \sim V/S$ ).

<sup>7</sup>Für die Energie (7.37) findet man das Resultat

$$U = \frac{d}{16\pi} \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon \\ \mu \end{array} \right\} \left[ 1 + \left( \frac{p\pi}{\gamma_\lambda d} \right)^2 \right] \int_A d^2 R |\Psi|^2 \quad (7.60)$$

(mal 2 für die  $TM_{p=0}$  Mode) und die Verlustleistung folgt aus (7.52) (berücksichtige die Verluste an den Terminatoren), für  $TM$  Moden mit  $p \neq 0$ ,

$$P = \frac{c^2}{16\pi^2} \frac{\varepsilon}{\sigma\delta\mu} \left[ 1 + \left( \frac{p\pi}{\gamma_\lambda d} \right)^2 \right] \left( 1 + \xi_\lambda \frac{cd}{4A} \right) \int_A d^2 R |\Psi|^2 \quad (7.61)$$

wobei  $\xi_\lambda \sim 1$ .

Der exponentielle Zerfall des Signales  $\propto \exp(-\omega_0 t/2Q)$  bewirkt eine spektrale Verbreiterung im Fourierraum,  $\Delta\omega \Delta t \sim 2\pi \rightarrow \Delta\omega \sim \omega_0/2Q$ . Genauer können wir die Feldamplitude

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} e^{-i(\omega_0 + \delta\omega)t}$$

Fourier transformieren und erhalten

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \int_0^\infty dt A_0 e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}} e^{-i(\omega_0 + \delta\omega)t} e^{i\omega t} & (7.64) \\ &= \frac{iA_0}{\omega - \omega_0 - \delta\omega + i\omega_0/2Q}, \\ \rightarrow |A(\omega)|^2 &= \frac{|A_0|^2}{(\omega - \omega_0 - \delta\omega)^2 + \omega_0^2/4Q^2}. \end{aligned}$$

Der Shift der Resonanzfrequenz  $\delta\omega$  ist schwieriger zu berechnen als der  $Q$ -Faktor — man findet

$$\delta\omega = -\omega_0/2Q < 0. \quad (7.65)$$

Damit verschiebt und verbreitert die Dissipation den spektralen  $\delta$ -Peak bei  $\omega_0$  zur Lorentzfunktion um  $\omega_0(1 - 1/2Q)$  mit Breite  $\frac{\omega_0}{Q}$ , vgl. Abb. 7.13; damit wird die Resonanz auch leichter anregbar.

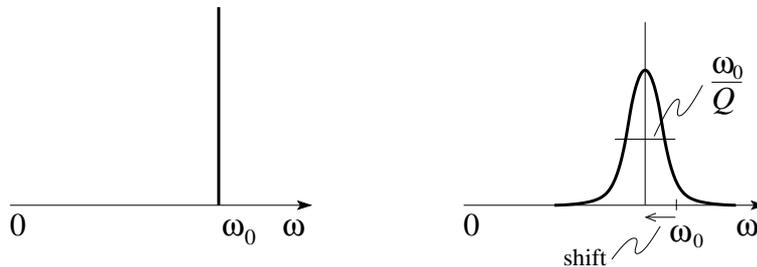


Abb. 7.13: Effekte der Ankopplung an die Umgebung (Dissipation, schematisch): Verbreiterung und Verschiebung der Spektralfunktion  $A(\omega) = \delta(\omega - \omega_0)$  im Fourierraum (links) zu einem Peak der Breite  $\omega_0/Q$  bei  $\omega_0(1 - 1/2Q)$ .

Ein unkonventionelles Beispiel zu den Resonanzen sind die *Schumann Resonanzen* in der atmosphärischen Kavität der Erde, siehe Abb. 7.14. Die enorme Größe der Kavität erzeugt sehr tiefe Resonanzfrequenzen; die ersten fünf ergeben sich aus  $\omega_\ell = \sqrt{\ell(\ell + 1)} C/R$  mit dem Radius  $R = 6400$  km und dem Drehimpuls  $\ell$  zu

$$\nu_\ell = \frac{\omega_\ell}{2\pi} = 10.6, 18.3, 25.8, 33.4, 40.9 \text{ Hz.} \quad (7.66)$$

Angeregt werden diese Resonanzen (z.B.) durch Blitze indem aus dem konti-

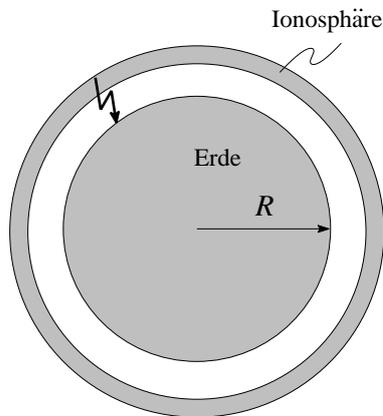


Abb. 7.14: Geometrie des Systems Erde-Ionosphäre. Die Leitfähigkeiten der äusseren und inneren Schalen sind  $\sigma_{\text{Ionos}} \sim 10^{3-6}$  s,  $\sigma_{\text{Meer}} \sim 10^9$  s.

nuerlichen Spektrum des ‘elektromagnetischen Knalls’ gerade die Schumann-Resonanzen überleben. Atom- und Wasserstoff-Bomben produzieren 3 – 5% Shifts in  $\omega_{\ell}^{\text{Sch}}$ .

## 7.4 Dielektrische Wellenleiter

Ein dielektrischer Wellenleiter ist, wie die Doppelleitung, eine offene Leitungsstruktur. Die Funktionsweise offener Leiterstrukturen ist, dass der Energiefluss im elektromagnetischen Feld entlang des Leiters fließt und nicht orthogonal (sonst erhalten wir eine Antenne). Dies impliziert eine Feldkonzentration um den Leiter herum; z.B. zeigt die TEM Mode des Doppelleiters einen Zerfall  $\propto 1/\rho^2$ ; höhere Moden zerfallen exponentiell. Hier betrach-

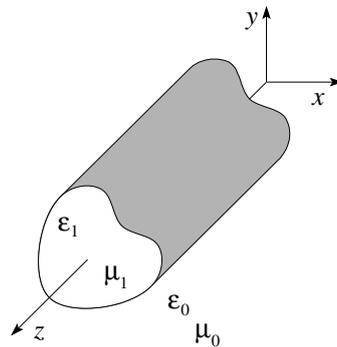


Abb. 7.15: Dielektrischer Wellenleiter mit einer erhöhten Dielektrizitätskonstanten im Innern,  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ .

ten wir dielektrische Wellenleiter mit Zylindergeometrie und einer Dielektrizitätskonstanten  $\varepsilon_1 > \varepsilon_0$ , vgl. Abb. 7.15. Zu lösen sind die Wellengleichungen

im Innen- und Aussenraum

$$\left[ \nabla_t^2 + \left( \mu_1 \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{im Wellenleiter,} \quad (7.67)$$

$$\left[ \nabla_t^2 + \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \right] \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{Bmatrix} = 0 \quad \text{ausserhalb,} \quad (7.68)$$

mit den Randbedingungen  $\vec{B}_\perp$ ,  $\vec{D}_\perp$ ,  $\vec{E}_\parallel$ ,  $\vec{H}_\parallel$  stetig. Damit die Felder entlang dem Wellenleiter propagieren suchen wir Lösungen mit

$$\gamma_1^2 = \mu_1 \varepsilon_1 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 > 0 \quad \longrightarrow \text{osz. Lösung,} \quad (7.69)$$

$$-\gamma_0^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0 \quad \longrightarrow \text{exp. Zerfall weg vom Leiter.} \quad (7.70)$$

Die Randbedingungen sollen dann die oszillierende und die exponentielle Lösung zusammenbinden. Die komplexeren Randbedingungen (vergleiche mit dem idealem Hohlleiter, wo  $\vec{B}_\perp = 0$  und  $\vec{E}_\parallel = 0$  auf dem Rand) erlauben keine Separation in TM und TE Moden, d.h. wir können i.A. keine rein transversal-magnetische oder elektrische Moden finden und  $E_z$ ,  $B_z$  sind gleichzeitig von Null verschieden (HE-Moden).

Als Beispiel und zur Illustration untersuchen wir einen zirkular-zylindrischen Leiter. Vereinfachend untersuchen wir die  $m = 0$  Moden, welche keine azimutale Abhängigkeit haben. Die Felder  $E_z$  und  $B_z$  ergeben sich als Lösung der (radialen) Besselgleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \gamma_1^2 \\ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \gamma_0^2 \end{array} \right\} \Psi(\rho) = 0, \quad \begin{array}{l} \rho \leq R, \\ \rho > R, \end{array} \quad (7.71)$$

$$\longrightarrow \Psi = \begin{cases} J_0(\gamma_1 \rho), & \rho \leq R, \\ A K_0(\gamma_0 \rho), & \rho > R. \end{cases}$$

Die Felder ergeben sich wie üblich aus (7.26), (7.27) gegeben  $E_z$  und  $B_z$  aus (7.71). Es stellt sich heraus, dass für den vorliegenden hochsymmetrischen Fall wiederum TE und TM Moden definierbar sind.

Für die TE-Moden erhält man (vgl. Abb. 7.16

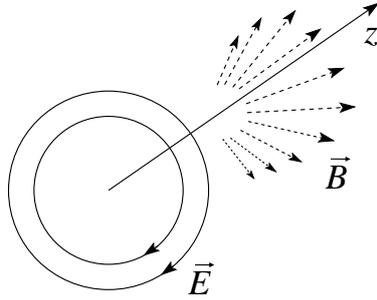


Abb. 7.16: Elektrische und magnetische Felder im zylindrischen dielektrischen Leiter.

$$\left. \begin{aligned} E_z, B_\varphi, E_\rho &= 0 \\ B_z &= J_0(\gamma_1 \rho) \\ B_\rho &= -\frac{ik}{\gamma_1} J_1(\gamma_1 \rho) \\ E_\varphi &= \frac{i\omega}{c\gamma} J_1(\gamma_1 \rho) \end{aligned} \right\} \rho \leq R, \quad (7.72)$$

$$\left. \begin{aligned} E_z, B_\varphi, E_\rho &= 0 \\ B_z &= AK_0(\gamma_0 \rho) \\ B_\rho &= \frac{ikA}{\gamma_0} K_1(\gamma_0 \rho) \\ E_\varphi &= -\frac{i\omega A}{c\gamma_0} K_1(\gamma_0 \rho) \end{aligned} \right\} \rho > R.$$

Die Randbedingungen bei  $R$  lauten für  $\mu_1 = \mu_0 = 1$ :

$$\begin{aligned} B_z \text{ stetig:} & \quad J_0(\gamma_1 R) = AK_0(\gamma_0 R), & (7.73) \\ B_\rho \text{ stetig:} & \quad -J_1(\gamma_1 R)/\gamma_1 = AK_1(\gamma_0 R)/\gamma_0, \\ E_\varphi \text{ stetig:} & \quad -J_1(\gamma_1 R)/\gamma_1 = AK_1(\gamma_0 R)/\gamma_0. \end{aligned}$$

Wir eliminieren  $A$  und erhalten folgende Bedingungen an  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  ( $\longrightarrow k$  bei gegebenem  $\omega$ )

$$\begin{aligned} \frac{J_1(\gamma_1 R)}{\gamma_1 J_0(\gamma_1 R)} &= -\frac{K_1(\gamma_0 R)}{\gamma_0 K_0(\gamma_0 R)}, & (7.74) \\ \gamma_1^2 + \gamma_0^2 &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\omega^2/c^2. \end{aligned}$$

Dieses System können wir graphisch lösen, vgl. Abb. 7.18. Beachte, dass die zweite Gleichung die Koordinaten  $\gamma_1^2 R^2$  und  $\gamma_0^2 R^2$  gegeneinander verschiebt und orientiert; entsprechend zeichnen wir die Funktionen  $(J_1/\gamma_1 J_0)(\gamma_1 R)$  und  $(K_1/\gamma_0 K_0)(\gamma_0 R)$  in verschobenen Koordinatensystemen. Mit wachsendem  $\omega$  verschieben sich die Werte für  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$ , woraus sich die Dispersion  $k(\omega)$  ergibt; zudem kommen mit wachsender Differenz  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\omega^2/c^2)R^2$  neue Lösungen hinzu: jede 0-Stelle von  $J_0$  trägt eine neue Mode bei. Die Abschneidefrequenzen ergeben sich aus den Nullstellen  $x_{0n}$  von  $J_0$ . Mit  $x_{01} = 2.405$  erhalten wir als minimale TE-Frequenz den Wert (vgl. auch Abb. 7.17)

$$\omega_{01} = \frac{2.405c}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}R} \quad (7.75)$$

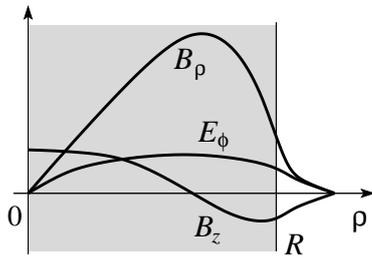


Abb. 7.17: Felder  $B_\rho$ ,  $B_z$  und  $E_\phi$  der  $TE_{0,1}$  Mode im dielektrischen Wellenleiter.

Unterhalb dieses Wertes wirkt das System als Antenne ( $\gamma_0^2 = 0$  bei  $\omega_{01}$ , wechselt Vorzeichen). Für TM Wellen ergibt die Analyse anstelle von (7.74) die Gleichung

$$\frac{J_1(\gamma_1 R)}{\gamma_1 J_0(\gamma_1 R)} = \frac{\varepsilon_0 K_1(\gamma_0 R)}{\varepsilon_1 \gamma_0 K_0(\gamma_0 R)}. \quad (7.76)$$

Für  $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_0$  ergeben sich Moden bei den 0-Stellen von  $J_1$ ,  $J_1(\gamma_1 R) = 0$  (siehe Abb. 7.18, eine Ausnahme ist evt. die Mode mit kleinstem  $\gamma_0$ ). Dies sind gerade die TE-Moden eines Hohlleiters; dieser Übereinstimmung liegt die Symmetrie der Probleme des metallischen Hohlleiters und des dichten Dielektrikums unter Vertauschung von E und B (Maxwellgleichungen und Randbedingungen) zugrunde. Die Wichtigkeit dielektrischer Wellenleiter (Glasfasern) in der heutigen (Kommunikations-)Technologie ist offensichtlich.

## 7.5 Einkoppelung in Wellenleiter

Wir skizzieren die Berechnung der Einspeisung eines Wellenfeldes in den Hohlleiter via einer zeitlich oszillierenden Stromquelle. Obwohl die Rechnung nicht ganz trivial ist lässt sich das Resultat

$$A_\lambda^\pm = -\frac{2\pi Z_\lambda}{c} \int_V d^2 R \vec{j} \cdot \vec{E}_\lambda^\mp. \quad (7.77)$$

einfach schreiben und interpretieren: Die Amplituden  $A_\lambda^\pm$  der normierten Moden findet man durch Projektion der Stromdichteverteilung  $\vec{j}$  auf die Moden  $\vec{E}_\lambda^\mp$ , vgl. dazu auch mit Abb. 7.20.

Wir starten mit der Definition und Aufzählung der Moden. Für jede Frequenz  $\omega$  haben wir unendlich viele TE und TM Moden gefunden, endlich viele davon propagieren ( $k$  reell) währenddem die restlichen Moden evaneszent sind. Wir definieren folgenden Satz von orthonormierten vollständigen Moden (eine Basis, die relativen Vorzeichen der Terme werden günstig gewählt, so dass  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{H}$  für jede Richtung und die Energie fließt

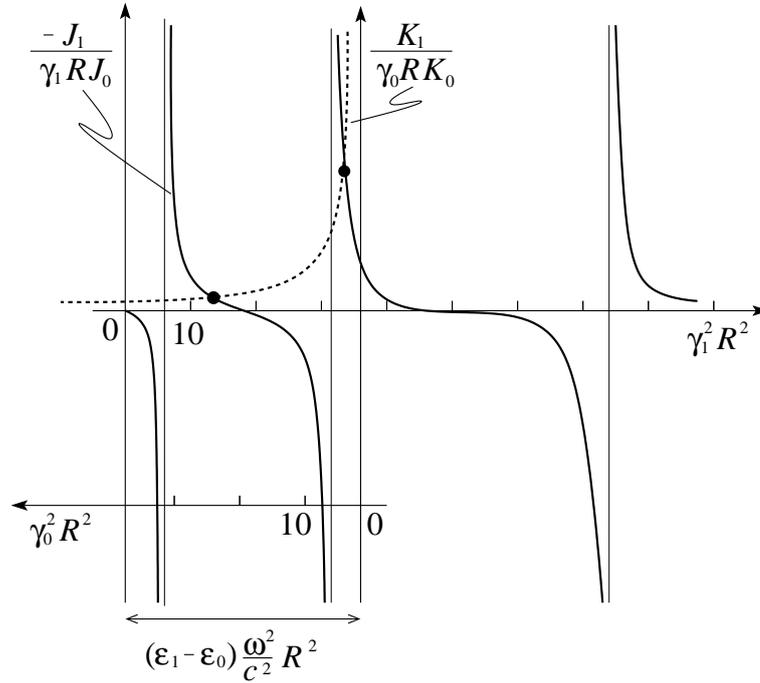


Abb. 7.18: Graphische Lösung des Gleichungssystems (7.74) (schematisch). Im nach rechts orientierten Koordinatensystem wird die Funktion  $-J_1/\gamma_1 R J_0$  in Abhängigkeit von  $\gamma_1^2 R^2$  aufgetragen; Pole resultieren an den Nullstellen von  $J_0$ . Im nach links zeigenden Koordinatensystem (verschoben um den Betrag  $(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)(\omega^2/c^2)R^2$ ) wird die Funktion  $K_1/\gamma_0 R K_0$  in Abhängigkeit von  $\gamma_0^2 R^2$  aufgetragen. Die erlaubten Werte für  $\gamma_0$  und  $\gamma_1$  befinden sich in den Schnittpunkten der beiden Kurven.

in Richtung der Propagation)

$\lambda$ : Nummeriert die Moden

$+$ :  $e^{ikz}$ ,  $e^{-kz}$  rechts-'laufend',

$-$ :  $e^{-ikz}$ ,  $e^{kz}$  links-'laufend',

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_\lambda^+ &= [\vec{E}_{t\lambda}(x, y) + \vec{E}_{z\lambda}(x, y)] e^{ik_\lambda z}, \\
 \vec{H}_\lambda^+ &= [\vec{H}_{t\lambda}(x, y) + \vec{H}_{z\lambda}(x, y)] e^{ik_\lambda z}, \\
 \vec{E}_\lambda^- &= [\vec{E}_{t\lambda}(x, y) - \vec{E}_{z\lambda}(x, y)] e^{-ik_\lambda z}, \\
 \vec{H}_\lambda^- &= [-\vec{H}_{t\lambda}(x, y) + \vec{H}_{z\lambda}(x, y)] e^{-ik_\lambda z}.
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

Der erste Term auf der linken Seite beschreibt den transversalen Anteil der Welle. Mit Hilfe des Green'schen Theorems (in 2D) leitet man folgende kon-

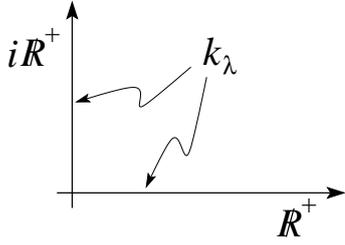


Abb. 7.19: Zur Wahl der Basiszustände; die Wellenzahlen  $k_\lambda$  werden auf die positiven reellen/imaginären Achsen eingeschränkt.

sistente Orthonormierung her:

$$\begin{aligned} \text{TM: } \int_A E_{z\lambda} E_{z\mu} d^2 R &= -\frac{\gamma_\lambda^2}{k_\lambda^2} \delta_{\lambda\mu}, & (7.79) \\ \text{TE: } \int_A H_{z\lambda} H_{z\mu} d^2 R &= -\frac{\gamma_\lambda^2}{k_\lambda^2 Z_\lambda^2} \delta_{\lambda\mu}, \\ \int_A d^2 R \vec{E}_{t\lambda} \cdot \vec{E}_{t\mu} &= \delta_{\lambda\mu}, & \int_A d^2 R \vec{H}_{t\lambda} \cdot \vec{H}_{t\mu} &= \frac{1}{Z_\lambda^2} \delta_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Ein beliebiges Feld  $\vec{E}$ ,  $\vec{H} \propto \exp(-i\omega t)$  lässt sich in Moden zerlegen,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}^+ + \vec{E}^-, & \vec{E}^\pm &= \sum_\lambda A_\lambda^\pm \vec{E}_\lambda^\pm, & (7.80) \\ \vec{H} &= \vec{H}^+ + \vec{H}^-, & \vec{H}^\pm &= \sum_\lambda A_\lambda^\pm \vec{H}_\lambda^\pm. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten folgen aus den transversalen Komponenten von  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  bei einem fixen  $z$ : Mit

$$\begin{aligned} \vec{E}_t &= \sum_{\lambda'} (A_{\lambda'}^+ + A_{\lambda'}^-) \vec{E}_{t\lambda'}, \\ \vec{H}_t &= \sum_{\lambda'} (A_{\lambda'}^+ - A_{\lambda'}^-) \vec{H}_{t\lambda'}, \end{aligned}$$

erhalten wir nach Multiplikation mit  $\vec{E}_{t\lambda}$ ,  $\vec{H}_{t\lambda}$  und Integration

$$\begin{aligned} A_\lambda^+ + A_\lambda^- &= \int_A d^2 R \vec{E}_{t\lambda} \cdot \vec{E}_t, \\ A_\lambda^+ - A_\lambda^- &= Z_\lambda^2 \int_A d^2 R \vec{H}_{t\lambda} \cdot \vec{H}_t, \end{aligned}$$

und damit die Koeffizienten

$$A_\lambda^\pm = \frac{1}{2} \int_A d^2 R [\vec{E}_{t\lambda} \cdot \vec{E}_t \pm Z_\lambda^2 \vec{H}_{t\lambda} \cdot \vec{H}_t]. \quad (7.81)$$

Wir betrachten eine *Signalspeisung* durch eine *lokalisierte Quelle* (idealer Hohlleiter), vgl. Abb. 7.20. Für die Felder bei  $S^+$  und  $S^-$  setzen wir an

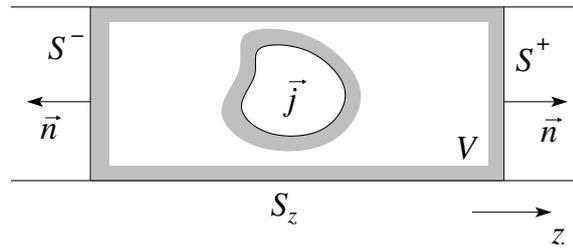


Abb. 7.20: Signalspeisung via Stromschleife  $\vec{j} \propto \exp(-i\omega t)$  im Wellenleiter.

$$\text{bei } S^- : \quad \vec{E} = \vec{E}^- = \sum_{\lambda'} A_{\lambda'}^- \vec{E}_{\lambda'}^-, \quad (7.82)$$

$$\text{bei } S^+ : \quad \vec{E} = \vec{E}^+ = \sum_{\lambda'} A_{\lambda'}^+ \vec{E}_{\lambda'}^+,$$

und ebenso für  $\vec{H}$ . Aus den Maxwellgleichungen für  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\rho$  und für  $\vec{E}_{\lambda}^{\pm}$ ,  $\vec{H}_{\lambda}^{\pm}$ ,  $\vec{0}$ ,  $0$  folgt das Poynting Theorem

$$\frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{H}_{\lambda}^{\pm} - \vec{E}_{\lambda}^{\pm} \times \vec{H}) = \vec{j} \cdot \vec{E}_{\lambda}^{\pm}. \quad (7.83)$$

Die Integration über  $V$  ergibt (kein Beitrag von der Hülle  $S_z$  für ideale Wände)

$$\frac{c}{4\pi} \int_{S_+, S_-} d^2 R (\vec{E} \times \vec{H}_{\lambda}^{\pm} - \vec{E}_{\lambda}^{\pm} \times \vec{H}) \cdot \vec{n} = \int_V d^3 r \vec{j} \cdot \vec{E}_{\lambda}^{\pm}. \quad (7.84)$$

Mit dem Ansatz für  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$ , (7.82), und unter Berücksichtigung der Normierung (7.82) erhalten wir für die Flächenintegrale

$$\frac{c}{4\pi} \int_{S_+} \overset{uwz}{\dots} = -\frac{c}{2\pi Z_{\lambda}} A_{\lambda}^{(+)}, \quad (7.85)$$

$$\frac{c}{4\pi} \int_{S_+} \overset{ovz}{\dots} = 0,$$

$$\frac{c}{4\pi} \int_{S_-} \overset{uwz}{\dots} = 0,$$

$$\frac{c}{4\pi} \int_{S_-} \overset{ovz}{\dots} = -\frac{c}{2\pi Z_{\lambda}} A_{\lambda}^{(-)},$$

wobei  $uwz$  ( $ovz$ ) jeweils das untere (obere) Vorzeichen in (7.84) bezeichnet. Damit finden wir die Lösung<sup>8</sup>

$$A_{\lambda}^{\pm} = -\frac{2\pi Z_{\lambda}}{c} \int_V d^2 R \vec{j} \cdot \vec{E}_{\lambda}^{\mp}. \quad (7.86)$$

<sup>8</sup>beachte,  $A^+$  ist durch Integration von  $\vec{j} \cdot \vec{E}_{\lambda}^-$  bestimmt.

## Kapitel 8

# Erzeugung von Strahlung: Antennen

In diesem Kapitel untersuchen wir die Erzeugung elektromagnetischer Strahlung durch zeitabhängige Ladungs- und Stromverteilungen. Wir betrachten lokalisierte,  $\propto e^{-i\omega t}$  schwingende Quellen,

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}, t) &= \rho(\vec{r})e^{-i\omega t}, \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \vec{j}(\vec{r})e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (8.1)$$

und untersuchen die erzeugte Strahlung ausserhalb der Quelle. Eine Multipolentwicklung bietet sich auf natürliche Weise an. Im folgenden konzentrieren wir uns hauptsächlich auf die führenden Momente, elektrische und magnetische Dipolstrahlung, sowie elektrische Quadrupolstrahlung. Wir arbeiten in der Lorentzgleichung (5.33),  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \partial_t \phi/c = 0$ , wo  $\vec{A}$  Lösung der getriebenen Wellengleichung (5.34) ist,  $(\vec{\nabla}^2 - c^{-2}\partial_t^2)\vec{A} = -(4\pi/c)\vec{j}$ . Die Greensche Funktion zur Wellengleichung haben wir in (5.46) gefunden,

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

und erhalten damit für  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  den Ausdruck

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \int dt' \frac{\vec{j}(\vec{r}', t')\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (8.2)$$

Mit  $\vec{j}(\vec{r}', t') = \vec{j}(\vec{r}')e^{-i\omega t'}$  und  $\vec{A}(\vec{r}, t) \equiv \vec{A}(\vec{r})e^{-i\omega t}$  reduziert sich das Problem auf eine Integration,

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}'). \quad (8.3)$$

Hier haben wir benutzt, dass

$$\exp(-i\omega[t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c]) = \exp(-i\omega t) \exp i(\omega/c = k)|\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Das Vektorpotential  $\vec{A}$  bestimmt dann die elektromagnetischen Felder ausserhalb der Quelle via

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (8.4)$$

und dem Ampère-Maxwell Gesetz für  $\vec{j} = 0$ ,

$$\vec{E} = \frac{i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{B}. \quad (8.5)$$

Das rein transversale Strahlungsfeld ausserhalb der Quelle involviert nur das Vektorpotential und wir können auf die Berechnung des skalaren Potentials  $\phi$  verzichten. Beachte, dass  $\phi$  aus der Eichbedingung folgt,  $\phi = \hat{k} \cdot \vec{A}$ .

Es ist angebracht, das Resultat (8.3) systematisch zu entwickeln und eine Multipolentwicklung bietet sich an. Wir erinnern uns, dass

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (8.6)$$

gerade die Greensche Funktion zur Helmholtz-Gleichung

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (8.7)$$

darstellt, siehe (5.42) mit  $\omega/c \rightarrow k$ ,  $t = 0$ . Analog zur Entwicklung der Greenfunktion  $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$  zum Laplaceoperator ( $\Delta G = -4\pi\delta$ ) in sphärische Harmonische,

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell m} \frac{1}{2\ell + 1} \frac{r_{<}^\ell}{r_{>}^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi),$$

können wir auch  $G = e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}/|\vec{r} - \vec{r}'|$  entwickeln:

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi ik \sum_{\ell, m} j_\ell(kr_{<}) h_\ell^{(1)}(kr_{>}) Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi). \quad (8.8)$$

Die Besselfunktionen  $j_\ell$  und  $h_\ell^{(1)}$  wurden in Kapitel 2 eingeführt.<sup>1</sup> Mit (8.8) erhalten wir für das Vektorpotential im quellenfreien Raum (entsprechend

<sup>1</sup>Natürlich lässt sich (8.8) analog zur Diskussion in Kapitel 2 direkt herleiten: Mit dem Ansatz

$$G = \sum_{\ell m} g_\ell(r, r') Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)$$

finden wir für  $g_\ell$  die radiale Differentialgleichung

$$\left( \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) g_\ell = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r'),$$

welche wir gemäss Kapitel 2 mit dem Ansatz

$$g_\ell(r, r') = A j_\ell(kr_{<}) h_\ell(kr_{>})$$

lösen. Die  $\delta$ -Funktion legt  $A = 4\pi ik$  fest.

ist  $r_> = r$  und  $r_< = r'$  die Entwicklung

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{4\pi ik}{c} \sum_{\ell m} h_\ell^{(1)}(kr) Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \cdot \\ &\quad \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') j_\ell(kr') Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi') \\ &= \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{j}(\vec{r}').\end{aligned}\quad (8.9)$$

Die Ausdrücke in (8.9) sind die Startpunkte für systematische Entwicklungen von  $\vec{A}$ .

Gegeben die drei Skalen

$$\begin{aligned}d &\text{ Ausdehnung der Quelle,} \\ \frac{2\pi}{k} = \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} &\text{ Wellenlänge,} \\ r &\text{ Beobachtungspunkt,}\end{aligned}\quad (8.10)$$

unterscheidet man (für kleine Quellen  $d \ll \lambda$ ) die drei Zonen

$$\begin{aligned}\text{Nahzone, statische Zone:} &\quad d \ll r \ll \lambda \\ \text{Zwischenzone:} &\quad d \ll r \sim \lambda \\ \text{Fernzone, Strahlungszone:} &\quad d \ll \lambda \ll r.\end{aligned}\quad (8.11)$$

Für *kleine Quellen* mit  $kr' = 2\pi r'/\lambda < 2\pi d/\lambda \ll 1$  können wir  $j_\ell$  in (8.9) entwickeln,  $j_\ell \sim (kr')^\ell / (2\ell + 1)!!$ .

Für die *Nahzone* erhalten wir aus (8.9a) mit

$$h_\ell^{(1)}(kr \ll 1) \approx in_\ell \approx -i(2\ell - 1)!! / (kr)^{\ell+1}$$

den Ausdruck

$$\vec{A}(\vec{r})|_{\text{Nah}} \approx \frac{4\pi}{c} \sum_{\ell, m} \frac{1}{2\ell + 1} \frac{Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \int d^3 r' \vec{j}(\vec{r}') r'^\ell Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi'), \quad (8.12)$$

welcher aus (8.9b) und der Entwicklung von

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell, m} \frac{1}{2\ell + 1} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\Omega') Y_{\ell m}(\Omega)$$

folgt.

In der *Fernzone* können wir wiederum von (8.9a) starten und  $h_\ell^{(1)}(kr \gg 1)$  entwickeln,

$$h_\ell^{(1)}(kr) \approx (-i)^{\ell+1} \frac{e^{ikr}}{kr};$$

wir erhalten

$$\vec{A}(\vec{r})|_{\text{Fern}} \approx 4\pi \frac{e^{ikr}}{cr} \sum_{\ell,m} Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \frac{(-ik)^\ell}{(2\ell+1)!!} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') r'^\ell Y_{\ell m}^*(\vartheta', \varphi'). \quad (8.13)$$

Ebenso können wir von (8.9b) starten und die Entwicklung

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r(1 - \vec{r} \cdot \vec{r}'/r^2)$$

benutzen; für *kleine Quellendimensionen* können wir wiederum entwickeln und erhalten

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r})|_{\text{Fern}} &\approx \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') e^{-ik\frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}} \\ &\stackrel{\text{kl.Qu.}}{\approx} \frac{e^{ikr}}{cr} \sum_n \frac{1}{n!} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') (-ik\hat{r} \cdot \vec{r}')^n. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Beachte die Analogie von (8.13) und (8.14); beide Summen enthalten den kleinen Parameter  $(kr') < (kd) < 1$  zur Potenz  $\ell, n$ . Allerdings ist das Integral in (8.13) eine Zahl, dasjenige in (8.14) eine Winkelfunktion. In (8.13) ergibt sich die Winkelabhängigkeit aus  $Y_{\ell m}$ .

In der *Zwischenzone* brauchen wir alle Terme in  $h_\ell^{(1)}$ ,

$$h_\ell^{(1)}(kr) \approx \frac{e^{ikr}}{(kr)^{\ell+1}} p_\ell(-ikr) \quad (8.15)$$

mit  $p_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\ell} p_{\ell n} x^n$ . Offensichtlich interpoliert  $p_\ell(x)$  mit  $p_{\ell 0} = -i(2\ell - 1)!! e^{-ikr}$  und  $p_{\ell \ell} = -i$  gerade zwischen der Nah- und Fernzone. In der Folge diskutieren wir die niedrigsten Terme mit  $n, \ell = 0, 1$ . Eine systematische Behandlung der Multipol-Strahlungsfelder findet man in Jackson, Kap. 16.

## 8.1 Elektrischer Monopol

Das Skalarfeld einer Ladungsverteilung  $\rho(\vec{r}, t)$  ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}, t) &= \int d^3r' dt' \rho(\vec{r}', t') \frac{\delta(t - t' - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \\ &\stackrel{\vec{r} \gg \vec{r}'}{\approx} \frac{Q(t' = t - r/c)}{r} = \text{const.}, \text{ kein Strahlungsfeld.} \end{aligned} \quad (8.16)$$

## 8.2 Elektrische Dipolfelder

In unserer Entwicklung für  $\vec{A}$  behalten wir nur den ersten Term (8.9a),

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= \frac{4\pi ik}{c} \underbrace{h_0^{(1)}(kr)}_{\frac{e^{ikr}}{ikr}} |Y_{00}|^2 \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') \underbrace{j_0(kr')}_{\frac{\sin kr'}{kr'} \stackrel{kl, Qu.}{\approx} 1} \\ &= \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}')\end{aligned}\quad (8.17)$$

Wir formen das Integral um zu

$$\int d^3r' \vec{j} \stackrel{*}{=} - \int d^3r' \vec{r}' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}) \stackrel{**}{=} -i\omega \int d^3r' \vec{r}' \rho(\vec{r}') = -i\omega \vec{p},$$

(wobei wir in (\*)  $j_k \vec{e}_k = (\partial_i r_k) j_i \vec{e}_k$  plus partielle Integration und in (\*\*)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\partial_t \rho = i\omega \rho$  verwendet haben) mit dem Dipolmoment  $\vec{p}$  der Quelle. Mit (8.17), (8.4) und (8.5) erhalten wir die Felder

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{r}) &= -ik\vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}, \\ \vec{B}(\vec{r}) &= k^2(\hat{r} \times \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \\ \vec{E}(\vec{r}) &= k^2(\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r} \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{[3\hat{r} \cdot (\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}]}{r^3} (1 - ikr) e^{ikr}.\end{aligned}\quad (8.18)$$

Die Felder bilden mit  $k\hat{r}$  ein Dreibein, konzentrieren sich um die durch

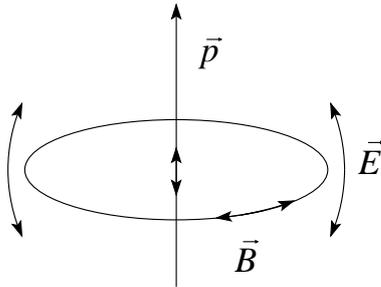


Abb. 8.1: Fernzone des elektrischen Dipolfeldes:  $\vec{B} \approx k^2(\hat{r} \times \vec{p})e^{ikr}/r$ ,  $\vec{E} \approx \vec{B} \times \hat{r}$ .

$\vec{p}$  definierte Äquatorebene, verschwinden auf der Achse und erreichen in der Fernzone asymptotisch das relative Gewicht  $B/E \sim 1$ , vgl. auch Abb. 8.1. Gehen wir zur Nahzone über, nehmen die Felder einen elektrischen Charakter an,

$$\begin{aligned}\vec{B} &\approx ik(\hat{r} \times \vec{p}) \frac{1}{r^2}, \\ \vec{E} &\approx \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}}{r^3} \sim \frac{1}{kr} B \gg B.\end{aligned}\quad (8.19)$$

Im Limes  $k = \omega/c \rightarrow 0$  dehnt sich das elektrische Dipolfeld auf den ganzen Raum aus ( $r < 1/k \rightarrow \infty$ ),  $B \propto k$  verschwindet, und wir erhalten das statische Dipolfeld zurück. Die elektrischen Feldlinien eines Dipolstrahlers sind in Abb. 8.2 wiedergegeben.

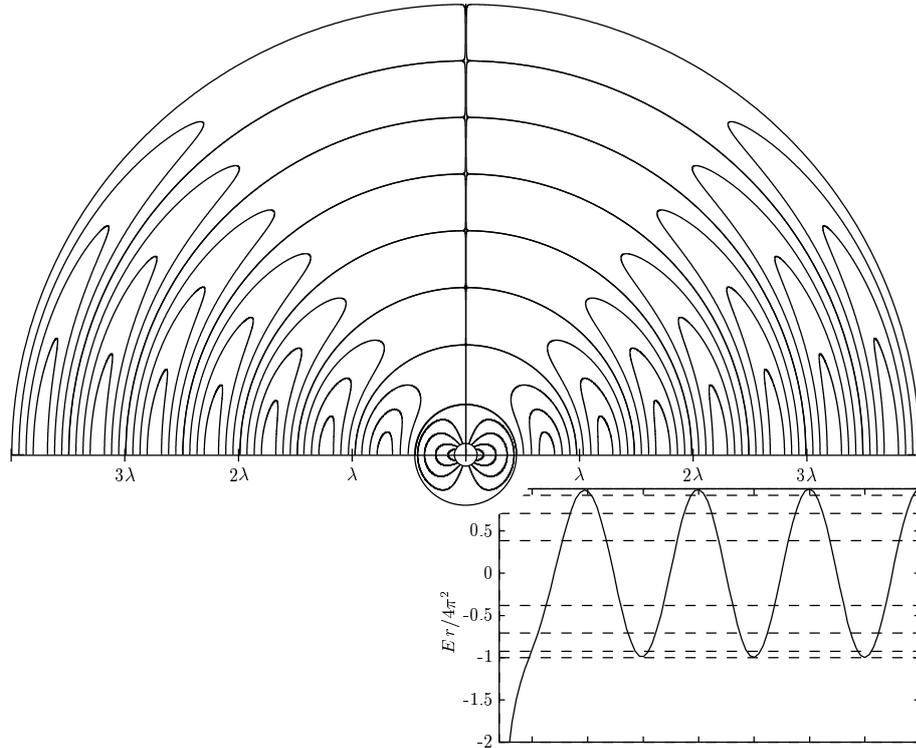


Abb. 8.2: Elektrische Feldlinien eines oszillierenden elektrischen Dipols. Im Nahfeldbereich  $r < \lambda$  folgen die Feldlinien denjenigen eines statischen elektrischen Dipols. In der Zone  $r \sim \lambda$  lösen sich periodische Wellenfronten ab. Gezeichnet sind Feldlinien bei fixen Feldstärkeamplituden, die im Fernfeld den Phasen  $n\pi/8$  entsprechen, vgl. Darstellung unten rechts.

Der Poyntingvektor

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \vec{E} \times \vec{B}^* \quad (8.20)$$

ist in der Fernzone radial gerichtet und zerfällt  $\propto 1/r^2$ . Damit erhalten wir die in den Raumwinkel  $d\Omega$  abgestrahlte mittlere Leistung (vgl. Abb. 8.3)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{cr^2}{8\pi} \hat{r} \vec{E} \times \vec{B}^* = \frac{ck^4}{8\pi} |(\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r}|^2 \\ &= \frac{c}{8\pi} k^4 |\vec{p}|^2 \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (8.21)$$

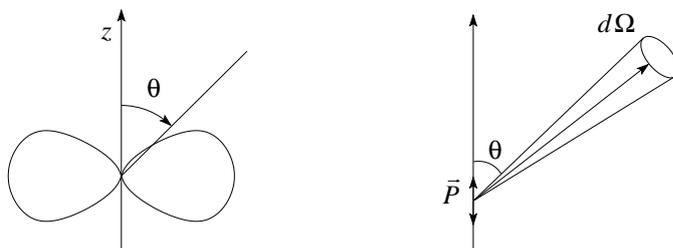


Abb. 8.3: Mittlere abgestrahlte Leistung eines Dipols (links als Polarplot). Es wird keine Leistung in die  $z$ -Richtung abgestrahlt.

Die gesamte abgestrahlte Leistung ist

$$P = ck^4 \frac{|\vec{p}|^2}{3}.$$

Als Beispiel betrachten wir einen Dipolstrahler mit  $\vec{p} \parallel z$  gespeist durch Ströme

$$I(z, t) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right) e^{-i\omega t},$$

vgl. Abb. 8.4. Damit ergibt sich eine lineare Ladungsdichte

$$\rho(z, t) = \frac{1}{i\omega} \partial_z I = \pm \frac{2iI_0}{\omega d} e^{-i\omega t} \quad (8.22)$$

und ein Dipolmoment

$$p = \int_{-d/2}^{d/2} dz z \rho(z) = \frac{iI_0 d}{2\omega}.$$

Die abgestrahlte Leistung ergibt sich zu

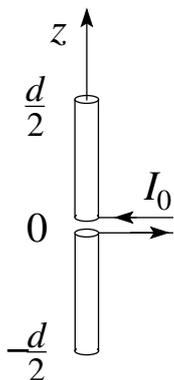


Abb. 8.4: Geometrie einer stromgetriebenen Dipolantenne.

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{I_0^2}{32\pi c} (kd)^2 \sin^2 \vartheta, \quad P = \frac{I_0^2}{12c} (kd)^2, \quad (8.23)$$

Beachte, dass der fixierte Strom  $I_0 \propto p\omega$  eine Leistung  $P \propto k^2 \propto \omega^2$  (anstelle von  $\omega^4$ ) erzeugt. Mit  $P = RI_0^2/2$  erhalten wir den *Strahlungswiderstand*  $R_{\text{Str}} = (kd)^2/6c$ . Den Zahlenwert in Ohm erhält man durch Multiplikation mit  $30c$ ,  $R_{\text{Str}}[\Omega] = 5(kd)^2$ . Beachte, dass wir das Antennenproblem nicht realistisch gelöst haben — wir haben angenommen, dass wir die erzeugende Stromverteilung  $I(z)$  kennen. Im allgemeinen kennen wir aber nur die Parameter der Antenne sowie die Charakteristika des Treibers, z.B. die Speisespannung. Dieses Problem ist viel schwieriger zu lösen.

### 8.3 Magnetische Dipol- und elektrische Quadrupolfelder

Der nächste Term in (8.9a) hat die Form

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi ik}{c} \sum_m \underbrace{h_1^{(1)}}_{-\frac{e^{ikr}}{kr} \left(1 + \frac{i}{kr}\right)} Y_{1m}(\vartheta, \varphi) \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') j_1(kr') Y_{1m}^*(\vartheta', \varphi') \quad (8.24)$$

mit

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x} \approx \frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{x} \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \approx \frac{x}{3},$$

$$Y_{10}(\vartheta, \varphi) = \sqrt{3/4\pi} \cos \vartheta, \quad Y_{1\pm 1}(\vartheta, \varphi) = -\sqrt{3/8\pi} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$$

und damit ist

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{3c} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik\right) \sum_m Y_{1m} \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') r' Y_{1m}^*.$$

Alternativ können wir (8.9b) entwickeln und finden den äquivalenten Ausdruck

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \left(\frac{1}{r} - ik\right) \int d^3r' \vec{j}(\vec{r}') (\hat{r} \cdot \vec{r}'). \quad (8.25)$$

Im Quellenintegral extrahieren wir den magnetischen Dipolterm

$$\underbrace{\frac{1}{2c} (\vec{r}' \times \vec{j})}_{\vec{M}(\vec{r}')} \times \hat{r}$$

(vgl. (3.46)) und finden den Restterm

$$\frac{1}{c} (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j} - \underbrace{\frac{1}{2c} (\vec{r}' \times \vec{j}) \times \hat{r}}_{\frac{1}{2c} [(\hat{r} \cdot \vec{j}) \vec{r}' - (\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}]} = \frac{1}{2c} [(\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j} + (\hat{r} \cdot \vec{j}) \vec{r}'] \quad (8.26)$$

### 8.3. MAGNETISCHE DIPOL- UND ELEKTRISCHE QUADRUPOLFELDER 195

Der magnetische Dipolterm und der Restterm sind gerade die unter Vertauschung  $\vec{r}' \leftrightarrow \vec{j}$  antisymmetrischen und symmetrischen Anteile der Quelle.

Der *magnetische Dipolterm*

$$\vec{m} = \int d^3 r' \vec{M}(\vec{r}') = \frac{1}{2c} \int d^3 r' [\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}')] \quad (8.27)$$

erzeugt die Felder

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}) &= ik(\hat{r} \times \vec{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right), \\ \vec{B}(\vec{r}) &= k^2(\hat{r} \times \vec{m}) \times \hat{r} \frac{e^{ikr}}{r} + \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{m}) - \vec{m}}{r^3} (1 - ikr)e^{ikr}, \\ \vec{E}(\vec{r}) &= -k^2(\hat{r} \times \vec{m}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Beachte, dass  $\vec{A}_{8.28} \stackrel{\vec{m} \rightarrow \vec{p}}{\hat{=}} \vec{B}_{8.18} \longrightarrow \vec{E}_{8.18} \stackrel{\vec{p} \rightarrow \vec{m}}{\hat{=}} \vec{B}_{8.28}$  und  $\vec{B}_{8.18} \stackrel{\vec{p} \rightarrow \vec{m}}{\hat{=}} \vec{E}_{8.28}$ .  
Damit erhalten wir die Äquivalenz (vgl. 8.5

$$\begin{aligned} \vec{p} &\longleftrightarrow \vec{m}, \\ \vec{B} &\longleftrightarrow -\vec{E}, \\ \vec{E} &\longleftrightarrow \vec{B}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

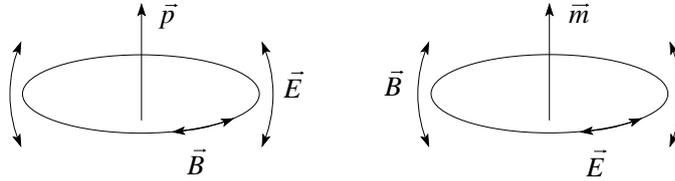


Abb. 8.5: Elektrisches Dipolfeld (links) und magnetisches Dipolfeld (rechts).

Der Restterm erzeugt ein *elektrisches Quadrupolfeld*. Wir formen den Quellterm mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung und partieller Integration um,

$$\frac{1}{2c} \int d^3 r' [(\hat{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}(\vec{r}') + (\hat{r} \cdot \vec{j}(\vec{r}')) \vec{r}'] = -\frac{ik}{2} \int d^3 r' \vec{r}' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}').$$

Die Fernfelder ergeben sich aus  $\hat{B} = ik\hat{r} \times \vec{A}$ ,  $\vec{E} = \vec{B} \times \hat{r}$ ; der Ausdruck

$$\hat{r} \times \int d^3 r' \vec{r}' (\hat{r} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}') = \frac{1}{3} \hat{r} \times \vec{Q}(\hat{r})$$

lässt sich durch den Vektor

$$Q_\alpha(\hat{r}) = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} \hat{r}_\beta$$

mit Hilfe des *elektrischen Quadrupoltensors*

$$Q_{\alpha\beta} = \int d^3r (3x_\alpha x_\beta - r^2 \delta_{\alpha\beta}) \rho(\vec{r}) \quad (8.30)$$

schreiben. Damit erhalten wir die Felder (in der Fernzone)

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{ik^3}{6} \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r} \times \vec{Q}(\hat{r}), \\ \vec{E} &= \vec{B} \times \hat{r}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Die abgestrahlte Leistung ist (nach einiger Rechnung!)

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{288\pi} k^6 |\hat{r} \times \vec{Q}(\hat{r})|^2, \\ P &= \frac{ck^6}{360} \sum_{\alpha,\beta} |Q_{\alpha\beta}|^2. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Für eine spheroidal schwingende Ladungsdichte mit

$$Q = \begin{pmatrix} -Q_0/2 & 0 & 0 \\ 0 & -Q_0/2 & 0 \\ 0 & 0 & Q_0 \end{pmatrix}$$

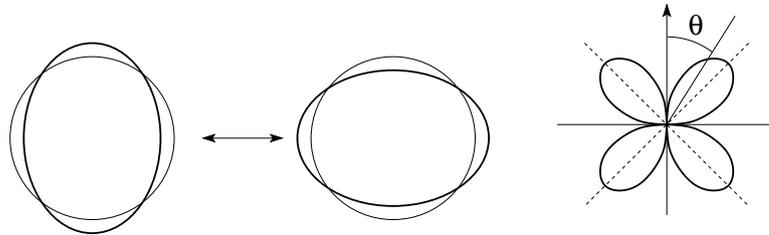


Abb. 8.6: Spheroidal schwingende Ladungsdichte mit zugehöriger Winkelverteilung der abgestrahlten Energie.

(vgl. 8.6) finden wir die Winkelverteilung

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{ck^6}{128\pi} Q_0^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta, \\ \text{und } P &= \frac{ck^6 Q_0^2}{240}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

Mit steigender Ordnung wird die Analyse schwieriger. Eine konsequente Weiterentwicklung von (8.9a) führt zum Ziel, siehe Jackson, Kapitel 16.

## 8.4 Antenne als Randwertproblem

Wir illustrieren kurz, welche Problematik zu bewältigen ist, wenn wir den Quellstrom nicht kennen. In der Lorentzgleichung schreiben wir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c}\partial_t\phi &= \frac{i\omega}{c}\phi = ik\phi = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c}\partial_t\vec{A} - \vec{\nabla}\phi = ik\vec{A} + \frac{i}{k}\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \frac{i}{k}(\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + k^2\vec{A}). \end{aligned}$$

Für eine dünne Antenne (Radius  $a$ ,  $z \in [-d/2, d/2]$ ) können wir annehmen, dass  $\vec{j} \parallel \vec{A} \parallel \hat{z}$  ist und entsprechend finden wir  $E_z = (i/k)(\partial_z^2 + k^2)A_z$ . Für eine ideal metallische Antenne ist aber  $E_z(\rho = a) = 0$  und wir finden die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (\partial_z^2 + k^2)A_z(\rho = a, z) &= 0 \\ \longrightarrow A_z(\rho = a) &= A \sin kz + B \cos kz. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Die übliche Feld  $\vec{A}$  – Stromdichte  $\vec{j}$  Beziehung in (8.3) wird jetzt zur *Integralgleichung* für  $I(z)$ ,

$$A \sin kz + B \cos kz = \frac{1}{c} \int dz' K(z - z') I(z') \quad (8.35)$$

mit dem Kern

$$K(z - z') = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \rho' d\rho' \frac{\exp(ik\sqrt{a^2 - 2a\rho' \cos \varphi' + \rho'^2 + |z - z'|^2})}{\pi a^2 \sqrt{a^2 - 2a\rho' \cos \varphi' + \rho'^2 + |z - z'|^2}}.$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  folgen aus den Randbedingungen, die Speisung bei  $z = 0$  und die Terminierung  $I(z = \pm d/2) = 0$  bei  $z = \pm d/2$ .



## Kapitel 9

# Streuung an kleinen Objekten

Wir betrachten die *Streuung* von elektromagnetischer Strahlung der Wellenlänge  $\lambda$  an kleinen Objekten der Dimension  $d \ll \lambda$ . Die Idee ist, dass die einfallende Strahlung  $\vec{E}_i, \vec{B}_i$  im Objekt Ströme induziert, wodurch diese zu strahlen beginnen. Die abgestrahlte Leistung ergibt sich aus der *kohärenten*

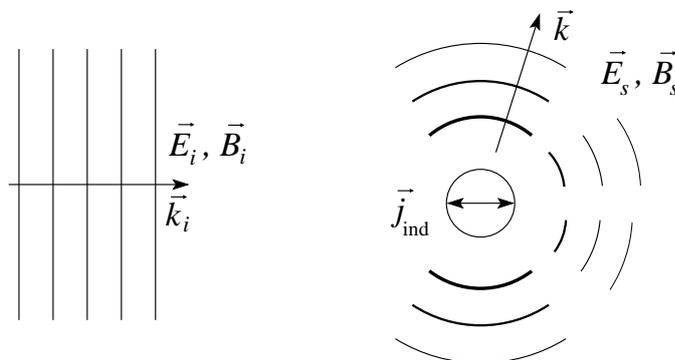


Abb. 9.1: Lichtstreuung an einem kleinen Objekt. Die einfallende Welle  $\vec{E}_i, \vec{B}_i$  induziert im streuenden Objekt Ströme, welche ihrerseits die 'gestreute' Strahlung  $\vec{E}_s, \vec{B}_s$  generieren.

Superposition der durch die einfallende Welle erzeugten Multipolfelder. Diese hängen im allgemeinen von der Polarisation der einfallenden Strahlung ab. Für  $d \ll \lambda$  sind vor allem die niedrigsten Multipole von Bedeutung. Wir formulieren zuerst, wie die durch  $\vec{E}_i, \vec{B}_i$  induzierten Momente  $\vec{p}$  und  $\vec{m}$  ein Streufeld erzeugen. Im zweiten Schritt untersuchen wir, welche Momente  $\vec{p}$  und  $\vec{m}$  durch die einfallende Welle tatsächlich erzeugt werden, und zwar für die Fälle einer dielektrischen Kugel, einer ideal-metallischen Kugel und einer Kollektion von Streuern. Anschließend diskutieren wir die Streuung in

einem durch  $\delta\varepsilon(\vec{r})$ ,  $\delta\mu(\vec{r})$  charakterisierten Medium und diskutieren einige Anwendungen wie etwa die Frage, warum der Himmel blau ist.

## 9.1 Streuwellen

Wir betrachten nun eine entlang  $\hat{k}_i$  einfallende ebene Welle mit Polarisation  $\vec{\varepsilon}_i$ ,

$$\begin{aligned}\vec{E}_i &= \vec{\varepsilon}_i E_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r} - i\omega t}, \\ \vec{B}_i &= \hat{k}_i \times \vec{E}_i,\end{aligned}\quad (9.1)$$

mit  $k_i = \omega/c$ . Dabei wählen wir  $\mu = \varepsilon = 1$ . Dieses Feld induziert im Streuer die Dipolmomente  $\vec{p}$  und  $\vec{m}$ , welche nun ihrerseits ein Strahlungsfeld generieren. In der Fernzone finden wir mit (8.18), (8.28) die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\vec{E}_s &= k^2 \frac{e^{ikr}}{r} [(\hat{r} \times \vec{p}) \times \hat{r} - \hat{r} \times \vec{m}], \\ \vec{B}_s &= \hat{r} \times \vec{E}_s.\end{aligned}\quad (9.2)$$

Die in Richtung  $\hat{r}$  abgestrahlte Leistung der Polarisation  $\vec{\varepsilon}$  normieren wir auf die einfallende Leistung und erhalten den *differentiellen Wirkungsquerschnitt*

$$\begin{aligned}d\sigma &= \frac{\text{Leistung im Raumwinkel } d\Omega}{\text{Einfallende Leistung pro Fläche}} \\ &= \frac{(r^2 d\Omega c/8) |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{E}_s|^2}{(c/8\pi) |\vec{\varepsilon}_i^* \cdot \vec{E}_i|^2},\end{aligned}\quad (9.3)$$

wobei wir benutzt haben, dass

$$\vec{E} \times \vec{B}^* = \vec{E} \times (\hat{r} \times \vec{E}^*) = |E|^2 \cdot \hat{r}$$

und wir haben den entlang  $\vec{\varepsilon}$  projizierten Anteil der gestreuten Strahlung rausgefiltert.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt hängt von der Richtung  $\hat{r}$ , der gewählten Polarisation  $\vec{\varepsilon}$ , der Einfallrichtung  $\hat{k}_i$ , und der einfallenden Polarisation  $\vec{\varepsilon}_i$  ab und hat die Einheit einer Fläche. Setzt man (9.1) in (9.1) ein, erhält man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{E_i^2} |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{p} + (\hat{r} \times \vec{\varepsilon}^*) \cdot \vec{m}|^2.\quad (9.4)$$

Die Variablen  $\vec{p}$  und  $\vec{m}$  hängen dabei von der Richtung  $\hat{k}_i$ , der Polarisation  $\vec{\varepsilon}_i$ , und der Intensität der  $E_i^2$  der einfallenden Strahlung ab. Mit (9.1) haben

wir das Rayleigh-Gesetz erhalten, welches besagt, dass kurzwellige Strahlung stärker gestreut wird als langwellige,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto k^4 \text{ oder } \omega^4. \tag{9.5}$$

## 9.2 Dielektrische Kugel

Mit der Permeabilität  $\mu = 1$  erzeugt das einfallende elektrische Feld in der Kugel mit Radius  $R$  und dielektrischer Konstanten  $\varepsilon$  ein Dipolmoment

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} R^3 \vec{E}_i,$$

siehe (4.63). Es wird kein magnetisches Moment erzeugt,  $\vec{m} = 0$ . Der differentielle Wirkungsquerschnitt folgt aus (9.4),

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 R^6 \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2 |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon}_i|^2. \tag{9.6}$$

Wir erinnern uns, dass die Dipolstrahlung in der Ebene definiert durch  $\vec{p} \parallel \vec{\varepsilon}_i$

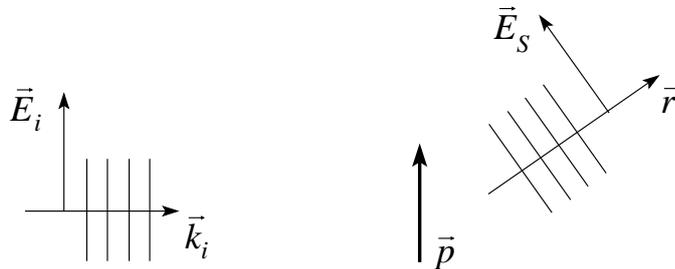


Abb. 9.2: Polarisation in der Lichtstreuung.

und  $\hat{r}$  linear polarisiert ist. Die einfallende Strahlung ist meist unpolarisiert und wir mitteln (9.6) bei fixer Einfallsrichtung  $\hat{k}_i$  und fixer Polarisation  $\vec{\varepsilon}$  des Analysators über einfallende Polarisationen  $\vec{\varepsilon}_i$ . Mit den Koordinaten

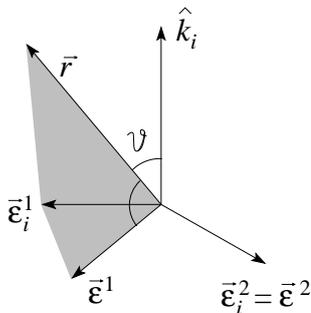


Abb. 9.3: Koordinaten zur Berechnung der Streuquerschnitte.

definiert wie in Abbildung 9.3 skizziert erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4 R^6}{2} \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2 \cos^2 \vartheta, & \text{wobei } \parallel &\leftrightarrow \text{ entlang } \vec{\varepsilon}^1, \\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4 R^6}{2} \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2, & \text{wobei } \perp &\leftrightarrow \text{ entlang } \vec{\varepsilon}^2, \end{aligned} \quad (9.7)$$

Die Bezeichnungen  $\parallel$  und  $\perp$  beziehen sich also auf die Streuebene. Man definiert die *Polarisation*  $\Pi(\vartheta)$  der gestreuten Strahlung durch (vgl. Abb. 9.4)

$$\Pi(\vartheta) = \frac{\partial_{\Omega}\sigma_{\perp} - \partial_{\Omega}\sigma_{\parallel}}{\partial_{\Omega}\sigma_{\perp} + \partial_{\Omega}\sigma_{\parallel}} = \frac{\sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta}. \quad (9.8)$$

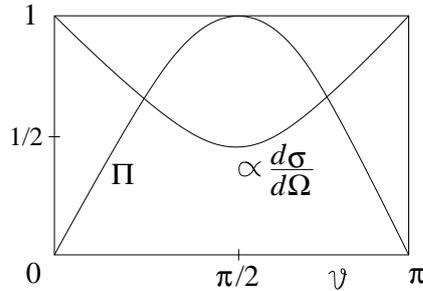


Abb. 9.4: Polarisation  $\Pi(\vartheta)$  und differentieller Wirkungsquerschnitt  $d\sigma/d\Omega(\vartheta)$ .

Der totale differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich zu (vgl. Abb. 9.4)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4 R^6}{2} \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2 (1 + \cos^2 \vartheta)$$

und man erhält daraus den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{3} k^4 R^6 \left| \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \right|^2. \quad (9.9)$$

Je nach Streurichtung findet man unpolarisiertes Licht (im Vor-/Rückwärtskanal) oder voll polarisiertes Licht (senkrecht zur Einfallssachse), vgl. Abb. 9.5.

### 9.3 Ideal leitende Kugel

Das induzierte Dipolmoment

$$\vec{p} = R^3 \vec{E}_i \quad (9.10)$$

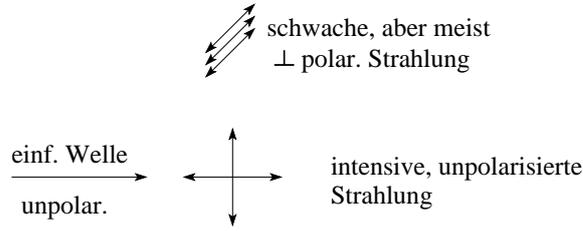


Abb. 9.5: Einfallendes unpolarisiertes Licht erzeugt unpolarisiertes Licht im Vor-/Rückw”artskanal und voll polarisiertes Licht senkrecht zur Einfall-sachse.

folgt aus (2.27). Die leitende Kugel entwickelt auch ein magnetisches Dipolmoment: Die relevante Randbedingung ist  $\vec{B}_\perp = 0$  auf der Kugeloberfläche und die Lösung des entsprechenden Randwertproblems liefert

$$\vec{m} = -\frac{R^3}{2}\vec{B}_i. \tag{9.11}$$

Für eine linear polarisierte einfallende Strahlung, bilden  $\vec{p}$ ,  $\vec{m}$  und  $\hat{k}_i$  ein Dreibein. Mit (9.4) erhalten wir den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 R^6 |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon}_i - \frac{1}{2}(\hat{r} \times \vec{\varepsilon}^*) \cdot (\hat{k}_i \times \vec{\varepsilon}_i)|^2. \tag{9.12}$$

Beachte die Interferenz zwischen den elektrischen und magnetischen Dipolmomenten. Für die parallel und senkrecht polarisierten differentiellen Wirkungsquerschnitte erhält man nach Mittelung über die einfallende Polarisation  $\vec{\varepsilon}_i$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{k^4 R^6}{2} \left(\cos \vartheta - \frac{1}{2}\right)^2 \\ \frac{d\sigma_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{k^4 R^6}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \cos \vartheta\right)^2. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Schliesslich erhalten wir daraus für den differentiellen Wirkungsquerschnitt und die Polarisation der Strahlung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 R^6 \left[\frac{5}{8}(1 + \cos^2 \vartheta) - \cos \vartheta\right], \tag{9.14}$$

$$\Pi(\vartheta) = \frac{3 \sin^2 \vartheta}{5(1 + \cos^2 \vartheta) - 8 \cos \vartheta}, \tag{9.15}$$

und für den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma = \frac{10\pi}{3} k^4 R^6.$$

Der Streupeak in Rückwärtsrichtung wird durch die Interferenz zwischen  $\vec{p}$  und  $\vec{m}$  erzeugt. Beachte, dass für  $kd \sim 1$  höhere Multipole berücksichtigt werden müssen. Für  $kd \gg 1$  sind wir im Limes der Optik und wir werden im Kapitel 10 darauf eingehen.

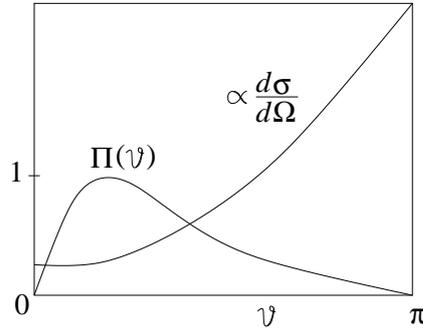


Abb. 9.6: Polarisation und differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung an einer ideal leitenden Kugel; beachte den Peak in der Rückwärtsrichtung, ein Interferenzeffekt von elektrischem und magnetischem Dipol.

## 9.4 Kollektion von Streuern

Betrachte eine Kollektion von kleinen ( $kd \ll 1$ ) Streuern plaziert in den Positionen  $\vec{r}_j$ . Jeder dieser Streuer trägt zum differentiellen Wirkungsquerschnitt bei, wobei die Felder (nicht Intensitäten) der einzelnen Beiträge kohärent addiert werden müssen. Dabei müssen wir die (relativen) Phasen  $\varphi_i$ ,

$$e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j} \rightarrow \varphi_i$$

berücksichtigen, mit denen die einzelnen Streuer angeregt werden, sowie die Phasen  $\varphi_s$ ,

$$e^{-i\vec{k}_i \hat{r} \cdot \vec{r}_j} \rightarrow \varphi_s,$$

unter denen der Beobachtungspunkt  $\vec{r}$  erscheint (vgl. Abb. 9.7; wir nehmen den Beobachtungspunkt weit weg von den Streuern). Zwei Streuer tragen

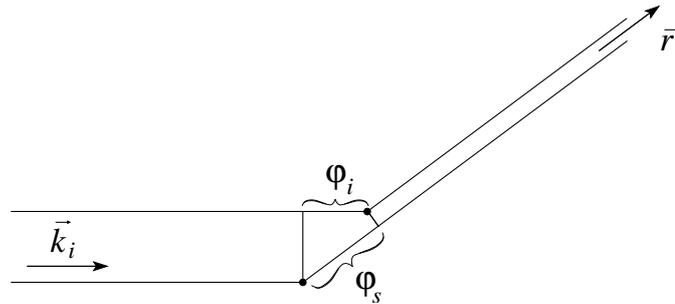


Abb. 9.7: Phasendifferenzen  $\varphi_i$  und  $\varphi_s$  zwischen Streubeiträgen von verschiedenen Streuern.

dann mit der Phasendifferenz  $\varphi_i - \varphi_s$  zum Streufeld bei und der differentielle Wirkungsquerschnitt (9.4) verallgemeinert sich zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{E_i^2} \left| \sum_j [\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{p}_j + (\hat{r} \times \vec{\varepsilon}^*) \cdot \vec{m}_j] e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} \right|^2 \quad (9.16)$$

mit dem Streuvektor  $\vec{q} \equiv \vec{k}_i - k_i \hat{r}$ . Für identische Streuer lässt sich die Antwort faktorisieren im differentiellen Wirkungsquerschnitt des einzelnen Streuers und dem *Strukturfaktor*

$$S(\vec{q}) = \left| \sum_j e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}_j} \right|^2 = \sum_{i,j} e^{i\vec{q}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}. \quad (9.17)$$

Sind die einzelnen Streuer zufällig angeordnet so geben nur die Terme  $i = j$  einen Beitrag und  $S(\vec{q})$  ist gleich  $N$ , der Anzahl Streuer; dies ist der Fall der inkoheränten Superposition. Sind die Streuer regelmässig im Raum angeordnet, d.h. auf regulären Gitterplätzen, so erhält man Interferenzeffekte die sich in sogenannten Braggpeaks manifestieren. Diese Interferenzpeaks treten auf wenn die Bragg-Bedingung  $\vec{q} \cdot \vec{a}_i = 2\pi n_i$  erfüllt ist, wobei  $\vec{a}_i$  die Gittervektoren bezeichnen. Beachte, dass die Bragg-Bedingung ausser für  $n_i = 0$ , nur erfüllt werden kann falls<sup>1</sup>  $2ka \gg 1$  ist, d.h., die Wellenlänge des Lichtes muss kleiner als die Gitterkonstante  $a$  sein. Für übliche Festkörper bedeutet dies, dass das Licht im Röntgenbereich mit  $\lambda \sim \text{Å}$  liegen muss; kolloidale Festkörper zeigen Interferenzeffekte im sichtbaren Bereich des Spektrums.

## 9.5 Inhomogene Medien

Wir betrachten ein Medium mit ortsabhängiger dielektrischer Konstanten und Permeabilität

$$\begin{aligned} \varepsilon(\vec{r}) &= \varepsilon_0 + \delta\varepsilon(\vec{r}), \\ \mu(\vec{r}) &= \mu_0 + \delta\mu(\vec{r}), \end{aligned} \quad (9.18)$$

wobei die Störungen  $\delta\varepsilon$ ,  $\delta\mu$  klein sein sollen. Mit Hilfe der quellfreien Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}, & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} \end{aligned}$$

erhalten wir für  $\vec{D}$  eine getriebene Wellengleichung

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{D} - \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{c^2} \partial_t^2 \vec{D} &= -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) \\ &+ \frac{\varepsilon_0}{c} \partial_t \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{H}). \end{aligned} \quad (9.19)$$

Wir nehmen wie üblich eine harmonische Zeitabhängigkeit proportional zu  $e^{-i\omega t}$  an und erhalten die Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{D} = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) - \frac{i\varepsilon_0 \omega}{c} \vec{\nabla} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{H}). \quad (9.20)$$

<sup>1</sup>beachte, dass  $q_{\max} = 2k$  ist.

Die Integration mit Hilfe der Greenschen Funktion (5.46) liefert die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \vec{D}(\vec{r}) = \vec{D}_i(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} [\vec{\nabla}' \times \vec{\nabla}' \times (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) \\ + \frac{i\varepsilon_0\omega}{c} \vec{\nabla}' \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{H})]. \end{aligned} \quad (9.21)$$

Dabei bezeichnet  $\vec{D}_i(\vec{r})$  die Lösung der homogenen Gleichung, eine einfallende Welle. Zur Beschreibung des Streuproblems wählen wir den Punkt  $\vec{r}$  in der Fernzone, weit weg von den streuenden Inhomogenitäten. Wir setzen dann die Lösung im Strahlungsbereich asymptotisch an als

$$\vec{D} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \vec{D}_i + \vec{A}_s(\hat{r}) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (9.22)$$

und erhalten aus (9.21) die Streuamplitude

$$\begin{aligned} \vec{A}_s(\hat{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} [\vec{\nabla}' \times \vec{\nabla}' \times (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) \\ &\quad + \frac{i\varepsilon_0\omega}{c} \vec{\nabla}' \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{H})] \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{k^2}{4\pi} \int d^3r' e^{-ik\hat{r}\cdot\vec{r}'} \{ [\hat{r} \times (\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E})] \times \hat{r} \\ &\quad - \frac{\varepsilon_0\omega}{kc} \hat{r} \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{H}) \}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Der Vergleich mit (9.2) ergibt die Analogie  $(\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}) \leftrightarrow \vec{p}$  und  $(\vec{B} - \mu_0 \vec{H}) \leftrightarrow \vec{m}$ . Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt findet man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{A}_s|^2}{|D_i|^2}, \quad (9.24)$$

wo  $\vec{\varepsilon}$  die Polarisation der gestreuten Strahlung angibt. Es bleibt die Integralgleichung (9.21) zu lösen. Für kleine Störungen sollten  $\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}$  und  $\vec{B} - \mu_0 \vec{H}$  klein sein. Man löst dann (9.21) approximativ, indem man im Integral  $\vec{D}$  durch  $\vec{D}_i$  und  $\vec{B}$  durch  $\vec{B}_i$  ersetzt (Born'sche Approximation, kann iterativ zur Bornschen Reihe verbessert werden). Mit

$$\vec{D} = (\varepsilon_0 + \delta\varepsilon)\vec{E}, \quad \vec{B} = (\mu_0 + \delta\mu)\vec{H} \quad (9.25)$$

erhalten wir als Quellterme

$$\begin{aligned} \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} &= (\varepsilon + \delta\varepsilon)\vec{E} - \varepsilon_0 \vec{E} \approx \frac{\delta\varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon_0} \vec{D}_i(\vec{r}), \\ \vec{B} - \mu_0 \vec{H} &\approx \frac{\delta\mu(\vec{r})}{\mu_0} \vec{B}_i(\vec{r}). \end{aligned} \quad (9.26)$$

Für die ungestörten einfallenden Felder setzen wir an

$$\begin{aligned}\vec{D}_i(\vec{r}) &= \vec{\varepsilon}_i D_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}}, \\ \vec{B}_i(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \hat{k}_i \times \vec{D}_i(\vec{r}),\end{aligned}\quad (9.27)$$

und erhalten für die Streuamplitude den Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{A}_s^{(1)}}{D_i} &= \frac{k^2}{4\pi} \int d^3r' e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \left[ \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon}_i \frac{\delta\varepsilon(\vec{r}')}{\varepsilon_0} \right. \\ &\quad \left. + (\hat{r} \times \vec{\varepsilon}^*) \cdot (\hat{k}_i \times \vec{\varepsilon}_i) \frac{\delta\mu(\vec{r}')}{\mu_0} \right],\end{aligned}\quad (9.28)$$

wobei  $\vec{q} = \hat{k}_i - k_i \hat{r}$  wiederum den Streuvektor bezeichnet und  $\vec{A}_s^{(1)}$  die erste Bornsche Approximation ist. Für den Fall einer kleinen dielektrischen Kugel reduziert sich (9.28) auf das alte Resultat (9.6): Mit  $e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}'} \sim 1$ ,  $\varepsilon_0 = 1$ ,  $\delta\varepsilon = \text{const}$  in einer Kugel mit Radius  $R$ , erhalten wir im Limes  $\vec{q} \rightarrow 0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 R^6 \left| \frac{\delta\varepsilon}{3} \right|^2 |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon}_i|^2. \quad (9.29)$$

## 9.6 Anwendungen

Wir untersuchen zwei Anwendungen, das *Himmelsblau* und die *kritische Opaleszenz*.

### 9.6.1 Himmelsblau

Die quantitative Untersuchung des Farbenspiels am Himmel geht auf Lord Rayleigh zurück. Wir starten von (9.28) und schreiben für  $\delta\varepsilon(\vec{r})$  die Variation der Dielektrizitätskonstanten aufgrund der Präsenz mikroskopischer Dipole

$$\vec{p}_i = \gamma_{\text{pol}} \vec{E}(\vec{r}_i) \quad (9.30)$$

an der Position  $\vec{r}_i$ ,

$$\delta\varepsilon(\vec{r}) = \sum_i 4\pi\gamma_{\text{pol}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i). \quad (9.31)$$

Einsetzen in (9.28) und quadrieren gemäss (9.24) liefert den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 |\gamma_{\text{pol}}|^2 |\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon}_i|^2 S(\vec{q}). \quad (9.32)$$

Die inkohärente Summation ergibt den Strukturfaktor  $S(\vec{q}) = N$  und wir approximieren  $\gamma_{\text{pol}} \approx (\varepsilon - 1)/4\pi n$  ( $n$  ist die Dichte der streuenden Moleküle). Somit erhalten wir den Wirkungsquerschnitt pro Molekül in Abhängigkeit des Brechungsindex  $n_B$ <sup>2</sup>

$$\sigma|_{\text{Molekül}} = \frac{k^4}{6\pi n^2} |\varepsilon - 1|^2 = \frac{2}{3\pi} \frac{k^4}{n^2} (n_B - 1), \quad (9.33)$$

Mit dem Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  pro Molekül verliert der einfallende Strahl auf der Weglänge  $dz$  den Bruchteil  $ndz\sigma$  seiner Intensität,

$$\begin{aligned} dI &= -In\sigma dz, \\ I &= I_0 e^{-n\sigma z}, \end{aligned} \quad (9.34)$$

und wir erhalten für den Dämpfungsfaktor

$$\alpha(\omega) = \frac{2\omega^4}{3\pi n c^4} (n_B - 1)^2, \quad (9.35)$$

das berühmte Rayleighsche  $\omega^4$ -Gesetz. Damit verstehen wir sofort das Himmelsblau und die rote Abendsonne, vgl. Abb. 9.8: kurzwelliges, hochfrequentes, blaues Licht wird stärker gestreut als langwelliges, niederfrequentes rotes:

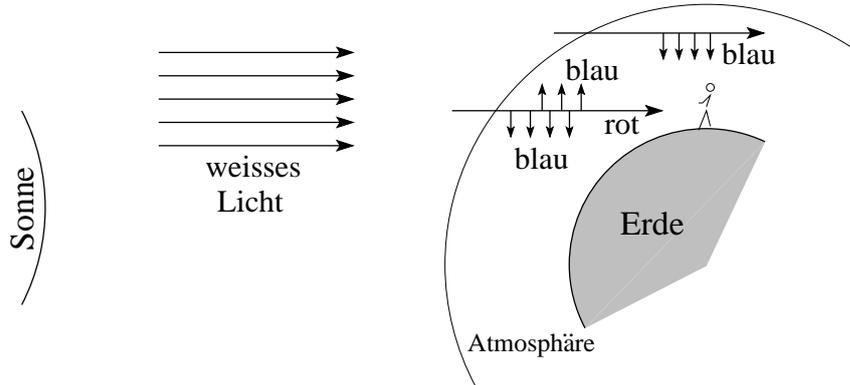


Abb. 9.8: Weisses Licht (mit allen Frequenzen) von der Sonne links fließt auf die Atmosphäre der Erde. Die Blauanteile werden gestreut, die roten Anteile bleiben übrig.

Quantitativ ergibt sich für die Dämpfung der Farben durch die Erdatmosphäre (siehe auch Abb. 9.10):

| Farbe            | Mittags | Abends/Morgens |
|------------------|---------|----------------|
| Rot (6500 Å)     | 0.96    | 0.21           |
| Grün (5200 Å)    | 0.90    | 0.024          |
| Violett (4100 Å) | 0.76    | 0.000065       |

<sup>2</sup>Wir nutzen  $(\varepsilon - 1)^2 = (n_B^2 - 1)^2 = (n_B + 1)^2(n_B - 1)^2 \approx 4(n_B - 1)^2$ .

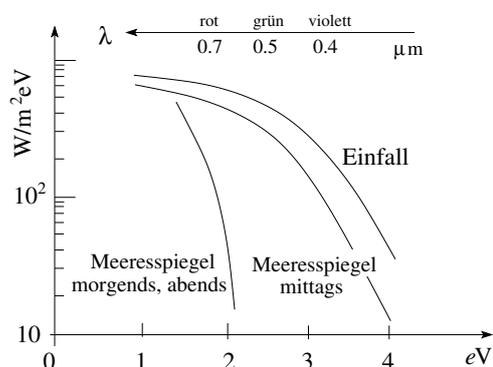


Abb. 9.9: Dämpfung in Abhängigkeit von Wellenlänge und Einfallswinkel.

Zur *Polarisation* bemerken wir, dass gemäss (9.8) zur Mittagszeit das im Zenit beobachtete Licht unpolarisiert ist, währenddem das flach einfallende gestreute Licht polarisiert ist, vgl. Abb. 9.10. Beachte, dass im Dämpfungs-

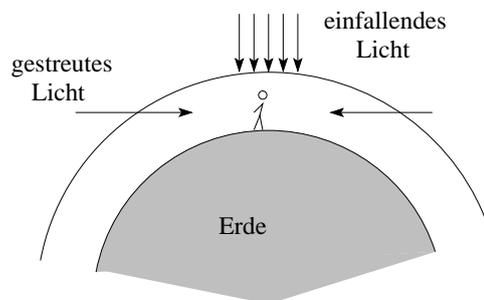


Abb. 9.10: Einfallendes Licht von oben ist unpolarisiert, von der Seite einfallendes gestreutes Licht, ist vollständig polarisiert; in Realität beträgt die Polarisation bei  $\lambda = 550\text{nm}$  aber nur gerade 75 %.

faktor  $\alpha$ , (9.35), die Atomizität via der Moleküldichte  $n$  ( $\approx 2.7 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  N.T.P) eingeht.

### 9.6.2 Kritische Opaleszenz

Die *kritische Opaleszenz* beruht auf Dichteschwankungen  $\delta n(\vec{r})$  die eine Variation in der Dielektrizitätskonstanten nach sich ziehen,

$$\delta \varepsilon(\vec{r}) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \delta n(\vec{r}) = \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{3n} \delta n(\vec{r}), \quad (9.36)$$

wo wir die Clausius-Mosotti Relation gebraucht haben. Mit (9.28) erhalten wir wiederum

$$\frac{\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{A}_s}{D_0} = \vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon}_i k^2 \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{12\pi n \varepsilon} \int_V \delta n(\vec{r}') e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad (9.37)$$

und der Dämpfungsfaktor ergibt sich zu (der Faktor  $8\pi/3$  ergibt sich aus der Winkelmittlung über  $|\vec{\varepsilon}^* \cdot \vec{\varepsilon}_i|^2$ )

$$\alpha = \frac{1}{V} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (9.38)$$

$$= \frac{8\pi}{3} \frac{1}{144\pi^2} \frac{k^4}{n^2} \left| \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{\varepsilon} \right|^2 \underbrace{\int_V d^3r d^3r' e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r} + \vec{r}')} \langle \delta n(\vec{r}) \delta n(\vec{r}') \rangle}_{S(\vec{q})}.$$

Der *Strukturfaktor*  $S(\vec{q})$  hängt mit der *Kompressibilität*  $\kappa_T = -V^{-1} \partial_p V|_T$  zusammen gemäss

$$S(q) = \frac{n^2 \kappa_T T}{1 + q^2 \xi^2} \quad (\text{Ornstein-Zernicke}). \quad (9.39)$$

Dabei beschreibt  $\xi$  diejenige Längenskala über welche die *Fluktuationen*  $\delta n(\vec{r})$  via Wechselwirkungen zwischen den Molekülen *korreliert* sind. Am kritischen Punkt des Gas-Flüssigkeits-Überganges divergiert die Kompressibilität  $\kappa_T$  und das Medium wird *undurchsichtig* für  $q \rightarrow 0$ :

$$\alpha(q) = \frac{1}{6\pi} k^4 \left| \frac{(\varepsilon - 1)(\varepsilon + 2)}{3} \right|^2 \frac{\kappa_T T}{1 + q^2 \xi^2}, \quad (9.40)$$

$$\xi(T) \sim \frac{1}{|T - T_c|^{1/2}} \Big|_{V_c}$$

$$\kappa_T \sim \frac{1}{|T - T_c|} \Big|_{V_c}$$

Nahe beim Phasenübergang divergiert die Korrelationslänge  $\xi(T)$  und wir

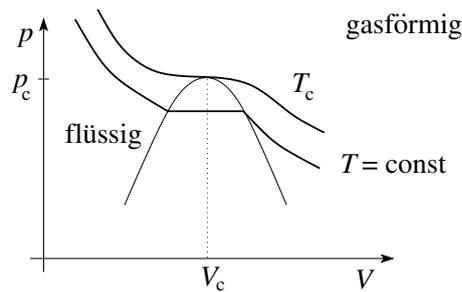


Abb. 9.11: Phasendiagramm zur kritischen Opaleszenz. Bei  $(V_c, p_c)$  ist  $\kappa = -V_c^{-1} \partial_p V|_{T_c} = \infty$ .

müssen die  $q$ -Abhängigkeit berücksichtigen: währenddem kleine  $q$ -Werte (sichtbares Licht ist langwellig auf der atomaren Skala) bei kleinen Werten von  $\xi$  schwach gedämpft sind, werden diese mit der Zunahme von  $\xi$  in der Nähe des kritischen Punktes stark gedämpft (siehe Rosenfeld, Theory of Electrons, Kap.V.6).

## Kapitel 10

# Beugung/Diffraktion von Licht

Im letzten Kapitel haben wir uns mit der *Streuung* von (langwelligem) Licht an kleinen Objekten befasst,  $\lambda \gg d$ . Hier konzentrieren wir uns auf den gegenteiligen Limes  $\lambda \ll d$ , d.h., wir betrachten die *Beugung* von Licht an den *Rändern* grosser Objekte. Wir können Beugungsphänomene oft als Korrekturen zur geometrischen Optik auffassen, ein typisches Beispiel ist der Durchgang von Licht durch die Apertur eines Schirmes, vgl. Abb. 10.1. Für  $\lambda \rightarrow 0$  gilt die *geometrische* oder *Strahlungsoptik* und wir erhalten scharfe Schatten; endliche Wellenlängen  $\lambda > 0$  führen zu Beugungseffekten

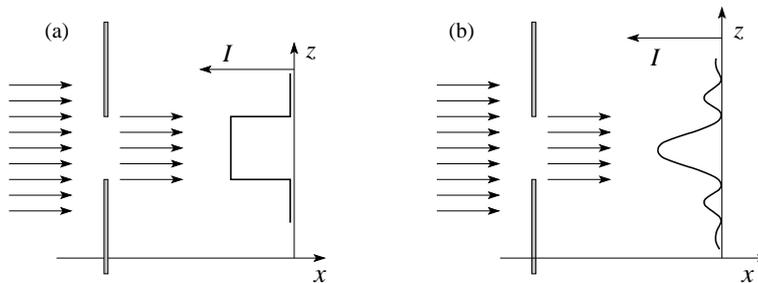


Abb. 10.1: Intensitätsverteilung des Lichtes nach dem Durchgang durch einen Spalt der Breite  $d > \lambda$  für den Fall der geometrischen Optik (links) und der Wellenoptik (rechts, Beugung).

in der Wellenoptik, wobei die langwellige Strahlung (rot) stärker *gebeugt* wird als die kurzwellige (blau). Dies ist umgekehrt zum *Prisma*, wo die blauen Strahlen stärker *gebrochen* werden.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>So sind die *Höfe* von Sonne und Mond aussen rot und damit Beugungserscheinungen an Wassertröpfchen einer Nebelschicht; die *Halos* um Sonne und Mond sind aussen blau und entstehen durch Brechung an Eiskristallen in den Zirruswolken.

Mit Beugungserscheinungen lässt sich problemlos eine interessante Optikvorlesung ausfüllen. Hier beschränken wir uns auf einige Beispiele: Wir starten mit der skalaren Diffraktionstheorie (= Beugungstheorie), d.h. statt Vektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  betrachten wir ein komplexes skalares Feld  $u(\vec{r})$ , welches der Wellengleichung genügt. Dies ist nicht nur eine akademische Vereinfachung: Zum ersten gilt alles, was hier erarbeitet wird, auch für die Quantenmechanik, wo  $u = \Psi(\vec{r})$  die komplexe Wellenfunktion für ein Teilchen darstellt (zum Beispiel Diffraktion von He-Atomen). Zweitens kann man zeigen, dass die *Intensitätsverteilung*  $I(\vec{r})$  von unpolarisiertem Licht gerade durch  $I = |u(\vec{r})|^2$  gegeben ist, wo  $u$  unser skalares Wellenfeld ist. Wir leiten die Kirchhoff-Gesetze der Beugung her und diskutieren ihre (In-)Konsistenz und den Zusammenhang zum Huygens Prinzip. Wir definieren die Begriffe der Fraunhofer- und der Fresnelbeugung und Diskutieren den Übergang vom Licht zum Schatten, beides in der Strahlen- und in der Wellenoptik. Schliesslich folgen einige Beispiele zu Fraunhofer- und Fresnelbeugung. Besondere Aufmerksamkeit gilt der Beugung an der Halbebene, welche sich exakt lösen lässt (Wiener-Hopf Methode, siehe Übungen.<sup>2</sup>). Zum Abschluss noch einige Bemerkungen zum vektoriellen Beugungsproblem, der Beugung von polarisierten elektromagnetischen Wellen.

## 10.1 Kirchhoff'sche Beugungstheorie

Das *Huygens-Fresnel* Prinzip besagt, dass sich der künftige Verlauf einer beliebig vorgegebenen Wellenfläche bestimmen lässt, indem man von jedem ihrer Punkte eine (phasenkorrelierte) Kugelwelle ausgehen lässt und deren Umhüllende konstruiert. Eine hübsche Anwendung dieses Prinzips liefert die Brechungsgesetze von Snellius an der Grenzschicht zweier Medien. Mit seiner Analyse hat Kirchhoff gezeigt, dass das Huygens Prinzip eine Folgerung der optischen Differentialgleichungen für das Wellenfeld ist.

Unser (Beugungs-)Problem definieren wir wie folgt: Es sei  $u(\vec{r}, t)$  ein (monochromatisches) skalares Wellenfeld,

$$u(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) e^{-i\omega t},$$

welches die Helmholtzgleichung erfüllt,

$$(\Delta + k^2) u(\vec{r}) = 0, \quad k = \omega/c. \quad (10.1)$$

Dabei ist  $c$  die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und  $\varepsilon$  und  $\mu$  haben wir beide gleich 1 gesetzt.

Typische Randbedingungen sind folgende: Eine *Quelle* (z.B., eine Punktquelle bei  $P_0$ , welche eine Kugelwelle  $\exp[i(kr - \omega t)]/r$  aussendet) erzeugt ein

<sup>2</sup>Es gibt nur wenige analytisch exakt lösbare Beugungsprobleme.

Wellenfeld, das auf einen *Schirm*  $S$  mit Aperturen  $S_A$  trifft, vgl. Abb. 10.2. Das vom Schirm reflektierte oder absorbierte Licht interessiert uns nicht. Das durch die Apertur durchtretende und gebeugte Licht wird durch einen Detektor (in  $P$ ) aufgefangen. Uns interessiert die im Detektor  $P$  ankommende Strahlungsintensität.<sup>3</sup> Wir wenden den Greenschen Satz im 'Äusseren' auf

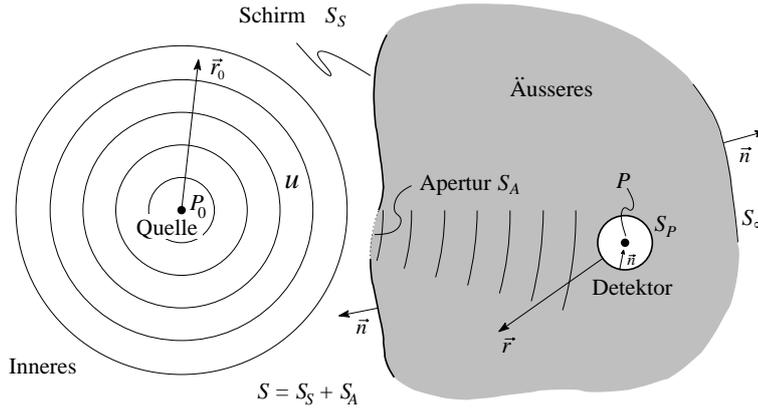


Abb. 10.2: Geometrie zur Kirchhoffschen Beugungstheorie: Die von der Quelle  $P_0$  im 'Innern' generierten Kugelwellen treffen auf den Schirm  $S$  mit Apertur  $S_A$ ,  $S = S_A + S_S$ ; die Strahlen propagieren weiter zum Detektor  $P$  im 'Aussenraum'. Der Schirm wird im Unendlichen durch  $S_\infty$  geschlossen. Die bezüglich  $P_0$  und  $P$  definierten Koordinaten werden mit  $\vec{r}_0$  und  $\vec{r}$  bezeichnet.

die beiden Funktionen  $u$  und  $v$  an, wo  $u$  das durch die Quelle  $P_0$  erzeugte Feld im Aussenraum, und  $v$  das Testfeld

$$v = \frac{e^{(ikr)}}{4\pi r} \quad (10.2)$$

(mit der Zeitabhängigkeit  $\propto \exp(-i\omega t)$ ) bezeichnet; das Testfeld erfüllt die Wellengleichung  $(\Delta + k^2)v = 0$ , wobei  $\vec{r}$  von  $P$  aus gemessen wird. Der Greensche Satz

$$\int_{V_{\text{Aussen}}} d^3r (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{S+S_p+S_\infty} d^2r \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right). \quad (10.3)$$

lässt sich wie folgt auswerten: die linke Seite verschwindet, ebenso das Integral über  $S_\infty$  auf der rechten Seite, denn mit  $v = \exp(ikr)/4\pi r$  und  $|\vec{r} - \vec{r}'| \sim r$  auf  $S_\infty$  mit  $\vec{r}'$  im Endlichen ist

$$\int_{S_\infty} d\Omega (u\partial_n v - v\partial_n u)r^2 = \int_{S_\infty} \frac{d\Omega}{4\pi} e^{ikr} [r(iku - \partial_n u) - u]. \quad (10.4)$$

<sup>3</sup>Oft besteht der Detektor aus einem zweiten Beobachtungsschirm.

Weiter ist  $u \sim f(\Omega) \exp(ikr)/r$ , so dass die rechte Seite in

$$\int_{S_\infty} \frac{d\Omega}{4\pi} e^{ikr} \left[ r \left( f \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) - f \frac{e^{ikr}}{r} \right] \rightarrow 0$$

übergeht. Das Integral über  $S_P$  liefert gerade  $u$  im Punkt  $P$ ,  $u_P$ , da wir mit der Testfunktion

$$v = \frac{e^{ikr}}{4\pi r} \quad (10.5)$$

die Greensche Funktion des freien Raumes mit Quelle in  $P$  gewählt haben. Wir erhalten das *Integraltheorem von Helmholtz und Kirchhoff*,

$$u_P = \frac{1}{4\pi} \int_S d^2r \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right). \quad (10.6)$$

Die Beziehung (10.6) ist exakt, ergibt aber keine Lösung des Problems, da wir  $u$  auf  $S$  nicht kennen. Vielmehr gilt es, eine selbstkonsistente Lösung der Integralgleichung (10.6) zu finden, ein im allgemeinen sehr schwieriges Problem.

Die *Kirchhoff-Approximation* geht nun einen Schritt weiter und nimmt an, dass das Wellenfeld  $u(\vec{r})$

1. auf dem Schirm  $S_S$  verschwindet und
2. ungestört durch die Appertur  $S_A$  tritt (für  $d \gg \lambda$  vernachlässigen wir Randeffekte des Schirmes).

Mathematisch ergeben sich daraus die Beziehungen (vgl. Abb. 10.3):

$$\text{auf } S_S : \quad u = 0, \quad \partial_n u = 0; \quad (10.7)$$

$$\text{auf } S_A : \quad u = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0}, \quad \partial_n u = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \left[ ik - \frac{1}{r_0} \right] (-\cos \vartheta_0). \quad (10.8)$$

Evaluieren wir analog  $v$  und  $\partial_n v$  auf  $S_A$ ,

$$\text{auf } S_A : \quad v = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}, \quad \partial_n v = \frac{e^{ikr}}{r} \left[ ik - \frac{1}{r} \right] \cos \vartheta, \quad (10.9)$$

so erhalten wir in führender Ordnung in  $1/kr_0$ ,  $1/kr$  das Resultat

$$u_P \approx \frac{A}{2i\lambda} \int_{S_A} d^2r \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r_0 r} [\cos \vartheta + \cos \vartheta_0]. \quad (10.10)$$

Die Kirchhoff-Approximation (10.10) ist sehr elegant aber leider auch inkonsistent (und trotzdem brauchbar). Aus der Riemannschen Funktionentheorie folgt: Wenn ein 2D Potential ( $\Delta u = 0$ ,  $u$  harmonisch, analytisch) entlang eines Kurvenstückes mitsamt seiner Normalenableitung verschwindet, so ist

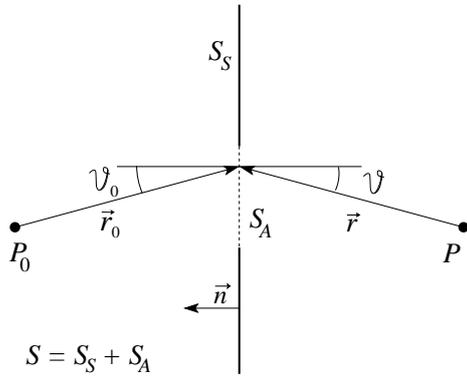


Abb. 10.3: Definition der in der Kirchhoff-Approximation benutzten Geometrie.

$u \equiv 0$ . Dieser Satz lässt sich auf Lösungen der Wellengleichung verallgemeinern und gilt zudem auch in 3D, wenn statt eines Kurven- ein Flächenstück betrachtet wird. Auch reproduziert (10.10) auf  $S_A$  nicht die in (10.7) vorgegebene Abhängigkeit für  $u$ . Abhilfe leistet die Substitution der Testfunktion  $v$  (= freie Greenfunktion) durch die echte Greenfunktion mit

$$\begin{aligned} \text{Dirichlet Randbedingungen auf } S : G_D & \quad \text{oder} \\ \text{Neumann Randbedingungen auf } S : G_N. & \end{aligned} \tag{10.11}$$

Die obige Analyse lässt sich trivial für den planaren Schirm wiederholen, siehe Abb. 10.4, wo

$$\begin{aligned} G_D &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} - \frac{e^{ikr_s}}{4\pi r_s}, \\ G_N &= \frac{e^{ikr}}{4\pi r} + \frac{e^{ikr_s}}{4\pi r_s}. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Im Rahmen der Kirchhoff-Approximation ergeben sich die Resultate

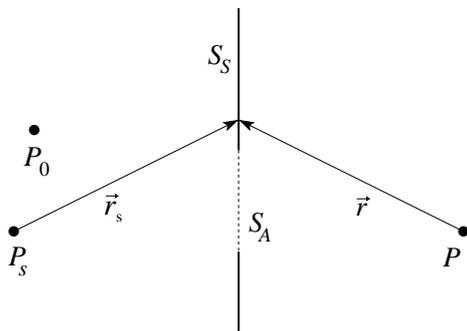


Abb. 10.4: Spiegelquelle in  $P_s$  zur Definition der Greenschen Funktion zum planaren Schirm.

$$u_P = \frac{A}{2i\lambda} \int_{S_A} d^2r \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r_0 r} \begin{cases} \cos \vartheta + \cos \vartheta_0, & (v = e^{ikr}/4\pi r), \\ 2 \cos \vartheta, & (v = G_D), \\ 2 \cos \vartheta_0, & (v = G_N). \end{cases} \tag{10.13}$$

Die Gleichung (10.13) erklärt, warum die Kirchhoffapproximation trotz ihrer Inkonsistenzen gute Resultate liefert: Die uns interessierenden Werte von  $u_P$  liegen in mehr oder weniger direkter Verbindung zur Quelle  $P_0$  (sonst ist  $P$  im Schatten und daher  $u_P \sim 0$ ). Daher ist  $\cos \vartheta \approx \cos \vartheta_0$  und alle drei Formeln in (10.13) sind in etwa gleichwertig. Wir werden mit dem Ausdruck

$$u_P \approx \frac{A}{i\lambda} \int_{S_A} d^2r \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r_0 r} \cos \vartheta \quad (10.14)$$

weiterfahren. Die Gleichung (10.14) entspricht genau dem *Huygens Prinzip*: Die auf die Öffnung  $S_A$  auftreffende Welle pflanzt sich via Ausstrahlung von phasenkorrelierten Partialwellen fort, welche in  $P$  interferieren und dort die Amplitude  $u_P$  erzeugen.<sup>4</sup>

## 10.2 Fraunhofer- und Fresnelbeugung

Wir betrachten ein generisches Beugungsproblem an der Apertur  $S_A$  eines Schirmes  $S_S$  und führen Koordinaten ein, wie in Abb. 10.5 gezeigt. Die Ko-

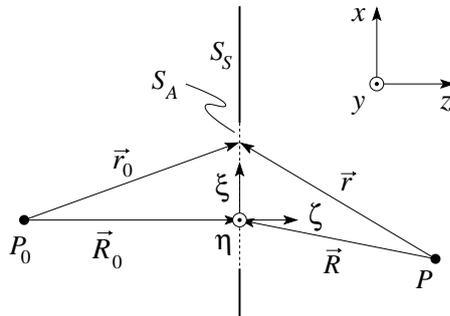


Abb. 10.5: Definition der Koordinaten  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  in der Apertur zur Darstellung der Phase  $\Phi(\xi, \eta)$ .

ordinaten ( $\xi, \eta, \zeta = 0$ ) überstreichen die Apertur. Mit  $R_0, R \gg d$ , wobei  $d$  die Dimension der Apertur ist, können wir den Nenner  $1/r_0 r$  in (10.14) ersetzen durch  $1/R_0 R$ . Für die Summe  $r + r_0$  im Exponenten ist diese 0-te Approximation ungenügend. Der Exponentialfaktor  $\exp[ik(r + r_0)]$  überstreicht bei Variation von  $r_0$  und  $r$  in der Apertur mehrmals den Einheitskreis in der

<sup>4</sup>Beachte, dass der Ausdruck (vgl. (10.6))

$$u_P = -\frac{1}{4\pi} \int_S d^2r u \frac{\partial G_D}{\partial n} \quad (10.15)$$

die auf  $S$  vorgegebenen Werte von  $u$  konsistent reproduziert. Einsetzen von (10.7) für  $u$  und (10.12) für  $G_D$  erzeugt im Fernbereich  $kr \gg 1$  den Ausdruck (10.14).

komplexen Ebene<sup>5</sup> Wir entwickeln deshalb den Exponenten gemäss

$$r = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2]^{\frac{1}{2}} \quad (10.16)$$

$$\approx \underbrace{R}_{R^1} - \underbrace{\alpha\xi - \beta\eta}_{R^0} + \underbrace{\frac{1}{2R}[\xi^2 + \eta^2 - (\alpha\xi + \beta\eta)^2]}_{R^{-1}}, \quad (10.17)$$

wobei  $\alpha = x/R$ ,  $\beta = y/R$  die Richtungskosinus für die Verbindungslinie  $0 \rightarrow P$  bezeichnen, vgl. Abb. 10.6. Ebenso lässt sich  $r_0$  mit Hilfe des Rich-

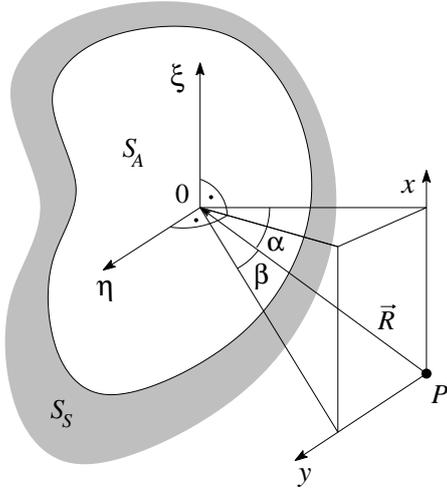


Abb. 10.6: Definition der Richtungskosinus  $\alpha$  und  $\beta$  in der Entwicklung der Phase  $\Phi$ .

tungskosinus  $-\alpha_0$ ,  $-\beta_0$  zu  $0 \rightarrow P_0$  entwickeln,

$$r_0 \approx R_0 + \alpha_0\xi + \beta_0\eta + \frac{1}{2R_0}[\xi^2 + \eta^2 - (\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2]. \quad (10.18)$$

Für den Phasenfaktor erhalten wir damit

$$e^{ik(r+r_0)} \approx e^{ik(R+R_0)} e^{-ik\Phi(\xi,\eta)} \quad (10.19)$$

mit der Phasenfunktion

$$\Phi(\xi, \eta) = (\alpha - \alpha_0)\xi + (\beta - \beta_0)\eta - \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \frac{\xi^2 + \eta^2}{2} \quad (10.20)$$

$$+ \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2R} + \frac{(\alpha_0\xi + \beta_0\eta)^2}{2R_0}. \quad (10.21)$$

Schliesslich ist auch der Kosinusfaktor langsam veränderlich und wir erhalten das Schlussresultat

$$u_P \approx \frac{A \cos \vartheta}{i\lambda R_0 R} e^{ik(R+R_0)} \int_{S_A} d\xi d\eta e^{-ik\Phi(\xi,\eta)}. \quad (10.22)$$

<sup>5</sup>Beachte, dass wir den Limes  $d \gg \lambda$  betrachten; nur dann können wir Randeffekte (wie in (10.14) getan) vernachlässigen; wenn  $d \sim \lambda$  bricht unsere Approximation (10.7) zusammen.

### 10.2.1 Fraunhofer Beugung

Man definiert als *Fraunhofer Beugung* den Limes  $R_0, R \rightarrow \infty$ , d.h., die Quelle  $P_0$  und der Beobachter  $P$  werden ins Unendliche geschickt, vgl. Abb. 10.7. Die Phasenfunktion vereinfacht sich dann dramatisch zu

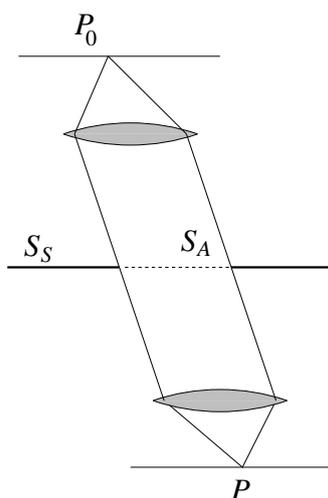


Abb. 10.7: Geometrie der Fraunhoferschen Beugung mit dem Quellpunkt  $P_0$  und dem Beobachtungspunkt  $P$  im Unendlichen, realisiert durch ein geeignetes Paar von Linsen.

$$\Phi \approx (\alpha - \alpha_0)\xi + (\beta - \beta_0)\eta, \quad (10.23)$$

ist also linear in  $\xi$  und  $\eta$ .

### 10.2.2 Fresnel Beugung

Sind entweder die Quelle  $P_0$  oder der Beobachter  $P$  oder beide im Endlichen, so spricht man von *Fresnel Beugung*. Durch geeignete Wahl des Ursprungs des  $\xi, \eta$  Koordinatensystems, vgl. Abb. 10.8, setzt man

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0 \quad (10.24)$$

(beachte, dass der Ursprung abhängig von  $P$  wird) und  $\Phi$  wird quadratisch in  $\xi$  und  $\eta$ , was uns auf die Fresnelintegrale vom Typ

$$F(w) = \int_0^w dt \exp(it^2/2) \quad (10.25)$$

führen wird. Wir werden für beide Fälle, Fraunhofer- und Fresnel Beugung verschiedene Beispiele betrachten; zuerst aber noch einige grundsätzliche Aussagen.

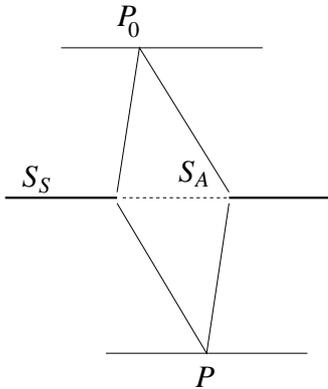


Abb. 10.8: Geometrie der Fresnelbeugung mit dem Quellpunkt  $P_0$  und dem Beobachtungspunkt  $P$  im Endlichen. Der Schnittpunkt '0' von Schirmebene und Sichtlinie ist abhängig vom Beobachtungspunkt  $P$ .

### 10.3 Babinetsches Prinzip

Wir definieren den zum Schirm  $S = S_S + S_A$  komplementären Schirm  $S_c = S_{cS} + S_{cA}$ , wobei

$$S_{cS} = S_A, \quad S_{cA} = S_S.$$

Es gilt damit

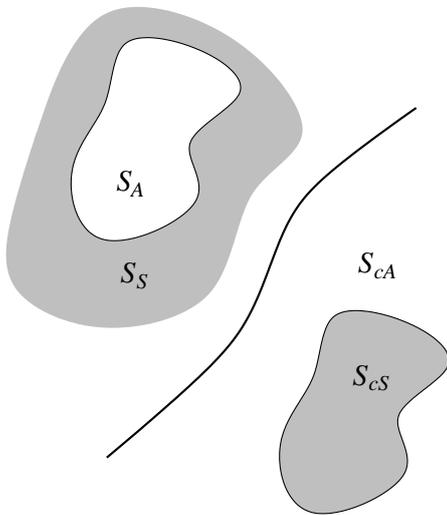


Abb. 10.9: Komplementärer Schirm  $S_{cS}$  mit komplementärer Apertur  $S_{cA}$  zum Schirm definiert durch  $S_A$  und  $S_S$ .

$$S = S_A + S_{cA} = S_c. \tag{10.26}$$

Das Prinzip von Babinet besagt, dass sich die zu  $S_c$  gehörige Amplitude  $u_{cP}$  aus der zu  $S$  gehörigen Amplitude  $u_P$  durch die triviale Manipulation

$$u_{cP} = u_{0P} - u_P \tag{10.27}$$

ergibt, wobei

$$u_{0P} = A \frac{e^{ikr_0}}{r_0} \Big|_{\text{in } P}$$

das ungestörte Quellfeld ist. Zum Beweis gehen wir auf das (exakte) Integraltheorem von Helmholtz und Kirchhoff (10.6) zurück. Im Rahmen des Huygens Prinzips finden wir

$$\begin{aligned}
 u_P + u_{cP} &= \frac{1}{4\pi} \int_{S_A} d^2r \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{S_{cA}} d^2r \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_S d^2r \left( \frac{\partial u}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \\
 &= u_{0P}
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt als Folge des Integraltheorems von Helmholtz und Kirchhoff (10.6). In der *Fraunhofer Beugung* ist  $u_{p0} = 0$  weg von  $Q_0$  (vgl. Abb. 10.10) und es ergeben sich gleiche Intensitäten,  $I_{cP} = I_P$ . Im allgemeinen sind Korrekturen durch Interferenzterme zu erwarten,  $I_{cP} = I_P + \text{Interferenzterme}$ .

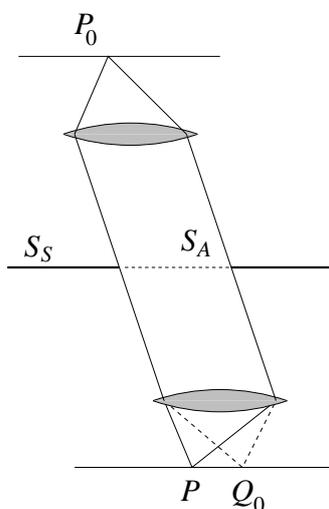


Abb. 10.10: Zur Fraunhofer Streuung und dem Babinet Prinzip: es ist  $u_{0P} = 0$  überall ausser im Brennpunkt  $Q_0$ .

## 10.4 Optische Intensität

In der Elektrodynamik treten an Stelle von Skalarfeldern  $u$  die Vektorfelder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ . Analog zur Integralbeziehung (10.6) kann man z.B. für das  $\vec{E}$ -Feld

schreiben (mit  $e^{ikr}/4\pi r \rightarrow G$ ; schreibe (10.6) für jede Komponente von  $\vec{E}$ )

$$\begin{aligned} \vec{E}_P &= \int_S d^2r [G \partial_n \vec{E} - \vec{E} \partial_n G] \\ &\left( \text{oder expliziter in Koordinaten,} \right. \\ \vec{E}(\vec{r}) &= \left. \int_S d^2r' [G(\vec{r}, \vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{E}(\vec{r}') - \vec{E}(\vec{r}') (\vec{n}' \cdot \vec{\nabla}' G(\vec{r}, \vec{r}'))] \right). \end{aligned} \quad (10.28)$$

Die Behandlung der Felder erlaubt es, Polarisierungseffekte in der Diffraktionstheorie elektromagnetischer Wellen zu beschreiben (beachte, dass sich das  $\vec{B}$ -Feld via  $\vec{B} = \hat{k} \times \vec{E}$  ergibt (Fernzone)); wir werden später darauf zurückkommen. In der Optik ist man an Beugungsphänomenen von unpolarisiertem Licht interessiert, insbesondere dessen zeitgemittelten Intensitätsverteilung

$$I = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{E} \times \vec{H} \rangle. \quad (10.29)$$

Man kann zeigen (siehe z.B. den Text von Born und Wolf), dass sich die Intensität  $I$  aus dem Amplitudenquadrat

$$I_P = |u_P|^2 \quad (10.30)$$

ergibt, wo  $u$  gerade die Lösung des skalaren Wellenproblems darstellt. Entsprechend normieren wir  $u$  gemäss (es ist  $p = \alpha - \alpha_0$ ,  $q = \beta - \beta_0$  und wir nutzen  $u \propto 1/R$ )

$$\int_{\text{Detektorschirm}} dp dq |u(p, q)|^2 = \frac{E}{R^2} \quad (10.31)$$

Mit (10.22) gilt im Fraunhofer-Limes

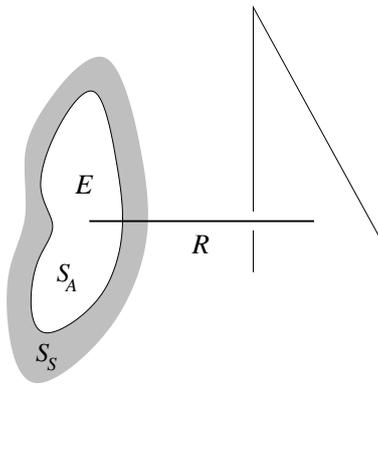


Abb. 10.11: Die durch die Apertur  $S_A$  fliessende Energie  $E$  trifft auf den in der Distanz  $R$  positionierten Detektorschirm auf.

$$\begin{aligned}
u(p, q) &= C \int_{S_A} d\xi d\eta e^{-2\pi i(p\xi + q\eta)/\lambda} \\
&= \int d\xi d\eta C(\xi, \eta) e^{-2\pi i(p\xi + q\eta)/\lambda}, \quad C(\xi, \eta) = \begin{cases} C & \text{in } S_A, \\ 0 & \text{auf } S_S. \end{cases}
\end{aligned}$$

Mit Parseval gilt (benutze, dass  $u$  und  $C$  Fouriertransformierte sind)

$$\underbrace{\int d\xi d\eta |C(\xi, \eta)|^2}_{C^2 \cdot S_A} = \frac{1}{\lambda^2} \underbrace{\int dpdq |u(p, q)|^2}_{E/\lambda^2 R^2}$$

wobei  $S_A$  die Fläche von  $S_A$  ist. Die Amplitude  $u$  lässt sich dann schreiben als

$$u(p, q) = \frac{1}{\lambda R} \sqrt{\frac{E}{S_A}} \int_{S_A} d\xi d\eta e^{-ik(p\xi + q\eta)}. \quad (10.32)$$

Mit der Intensität im Zentrum  $I_0 \equiv |u(0, 0)|^2$  erhalten wir

$$\begin{aligned}
I_0 &= \frac{1}{\lambda^2 R^2} \frac{E}{S_A} S_A^2 = \frac{E S_A}{\lambda^2 R^2} = C^2 S_A^2 \\
\Rightarrow u(p, q) &= \frac{\sqrt{I_0}}{S_A} \int_{S_A} d\xi d\eta e^{-ik(p\xi + q\eta)} \quad (10.33)
\end{aligned}$$

## 10.5 Licht und Schatten

In unserem täglichen Leben erscheint das Phänomen des Schattens als recht trivial, eine Folge unserer auf der geometrischen Optik beruhenden Wahrnehmung. In der Wellenmechanik andererseits ist das Phänomen des Schattens durchaus nichttrivial. Wir beginnen mit der Untersuchung des Schattenwurfes im Limes der geometrischen Optik.

### 10.5.1 Geometrische Optik, Eikonalapproximation

Gemäss (10.4) konzentrieren wir uns auf das skalare Problem, welches uns die Intensität liefert. Das Skalarfeld  $u(\vec{r})$  genügt der Wellengleichung

$$(\Delta + k^2)u = 0, \quad k^2 = \varepsilon\mu\omega^2/c^2 = 4\pi^2/\lambda^2. \quad (10.34)$$

Wir setzen  $\mu = 1$ , nehmen  $\varepsilon(\vec{r})$  ortsabhängig und führen die Konstante  $k_0^2 = \varepsilon_0\omega^2/c^2 = 4\pi^2/\lambda_0^2$  ein. Die Wellengleichung lässt sich dann schreiben als

$$\left[ \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} \Delta + \frac{\varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon_0} \right] u(\vec{r}) = 0, \quad (10.35)$$

wobei  $\varepsilon(\vec{r})/\varepsilon_0$  die relative Änderung der Brechungseigenschaften des Mediums beschreibt. Der Grenzfall der geometrischen Optik ergibt sich aus der

Wellenoptik im Limes  $\lambda_0 \rightarrow 0$ . Dieser Limes in (10.35) ist singulär (der Koeffizient der höchsten Ableitung verschwindet; die Lösungen  $\sin kr$ ,  $\cos kr$  werden singulär). Um trotzdem Schlüsse ziehen zu können, machen wir den Ansatz (Debye, Wentzel-Kramers-Brillouin; Phasenintegralnäherung, Quasiklassische Näherung, Eikonalnäherung)

$$\begin{aligned} u(\vec{r}) &= A(\vec{r})e^{ik_0S(\vec{r})} & (10.36) \\ A &= \text{Amplitudenfaktor,} \\ S &= \text{Eikonal.} \end{aligned}$$

Während  $k_0 \rightarrow \infty$  geht, werden  $A(\vec{r})$  und die Eikonalfunktion  $S(\vec{r})$  anständig bleiben. Einsetzen von (10.36) in (10.35) liefert in Ordnung  $\lambda_0^2$  folgende Differentialgleichungen für das Eikonal und die Amplitude<sup>6</sup>

$$(\vec{\nabla}S)^2 = \frac{k^2}{k_0^2} = \frac{\varepsilon(\vec{r})}{\varepsilon_0} \equiv n^2(\vec{r}), \quad \mathcal{O}(\lambda_0^2) \rightarrow S, \quad (10.37)$$

$$\vec{\nabla} \ln A \cdot \vec{\nabla} S = -\frac{1}{2}\Delta S, \quad \mathcal{O}(\lambda_0) \rightarrow A. \quad (10.38)$$

Die erste Gleichung in (10.37) ist die Differentialgleichung des Eikonals  $S$ ; deren Lösung determiniert den Gradienten von  $\ln A$  in Richtung  $\vec{\nabla}S$ , aber nicht orthogonal dazu. Entsprechend kann  $A$  in Richtung  $\perp \vec{\nabla}S$  springen. Die Flächen  $S = \text{const}$  sind Flächen konstanter Phase = Wellenflächen, vgl. Abb. 10.12. Deren Normalvektoren sind durch  $\vec{\nabla}S$  gegeben und bestimmen die *Strahlrichtungen* der *geometrischen Optik*. Im homogenen Medium mit  $n = \text{const}$ . ist  $S$  linear,

$$\begin{aligned} S &= n(\alpha x + \beta y + \gamma z) \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \\ \vec{\nabla}S &= (\alpha, \beta, \gamma) = \text{Strahlrichtung.} \end{aligned} \quad (10.39)$$

Die folgenden singulären Lösungen ( $n = \text{const}$ .)

$$\begin{aligned} S &= nr, \quad \vec{\nabla}S = \frac{n}{r}\vec{r}, \\ S &= n\rho, \quad \vec{\nabla}S = \frac{n}{\rho}(x, y), \end{aligned} \quad (10.40)$$

---

6

$$\begin{aligned} \partial_x u &= ik_0 u \partial_x S + u \partial_x \ln A, \\ \partial_x^2 u &= -k_0^2 u (\partial_x S)^2 + 2ik_0 u \left[ \frac{1}{2} \partial_x^2 S + (\partial_x S)(\partial_x \ln A) \right] + \mathcal{O}(k_0^0), \\ \rightarrow \Delta u + k^2 u &= -k_0^2 u \left[ (\vec{\nabla}S)^2 - \frac{k^2}{k_0^2} \right] + 2ik_0 u \left[ \frac{1}{2} \Delta S + \vec{\nabla} \ln A \cdot \vec{\nabla} S \right] + \dots \end{aligned}$$

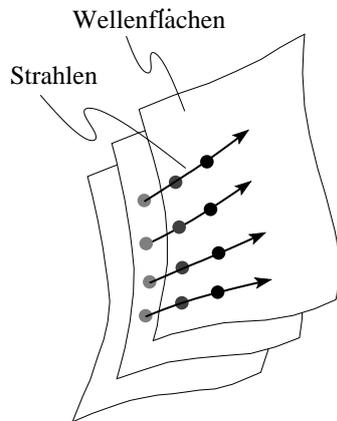


Abb. 10.12: Die Strahlrichtungen in der geometrischen Optik sind als Orthogonale zu den Wellenflächen  $S = \text{const.}$  (Eikonalfächen) definiert.

gehören zu Punktquellen ( $\rightarrow$  Kugelwelle), und zu Linienquellen ( $\rightarrow$  Zylinderwelle). In beiden Fällen verlaufen die Strahlen geradlinig. Im inhomogenen Medium mit  $n = n(\vec{r})$  verlaufen die Strahlen gekrümmt.

Der *Schatten* in der geometrischen Optik entsteht folgendermassen, vgl. Abb. 10.13: Von einer Lichtquelle gehen (im homogenen Medium) geradlinige Strahlen aus. Treffen sie auf einen Schirm auf, der keine Strahlen durchlässt, so entsteht dahinter ein Schatten, welcher geradlinig durch die Strahlrichtungen begrenzt wird. Senkrecht zur Strahlrichtung fällt die Amplitude  $A(\vec{r})$  abrupt auf 0, konsistent mit (10.37). Im Limes

$$\lambda \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty \quad (10.41)$$

erhalten wir eine scharfe Schattengrenze.

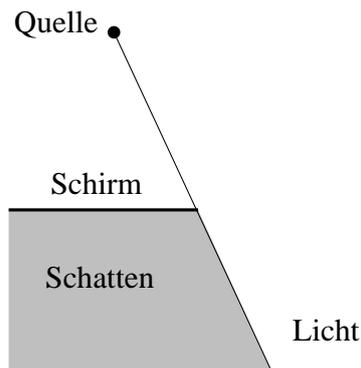


Abb. 10.13: Scharfe Schattengrenze im Limes  $\lambda \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$  (geometrische Optik) hinter einem von einer Quelle beleuchteten Schirm.

### 10.5.2 Schatten in der Wellenoptik

Die Entstehung des Schattens in der Wellenoptik ist schwieriger zu verstehen. Wir können nicht in aller Schärfe darauf eingehen und beschreiben

hier nur die Grundidee. Ausgehend von (10.14) konstruiert man sich gemäss dem Huygens Prinzip die Amplitude  $u_P$  hinter dem beleuchteten Schirm  $S = S_A + S_S$ . Wählt man den Punkt  $P_1$  in Sichtverbindung zur Quelle  $P_0$ ,

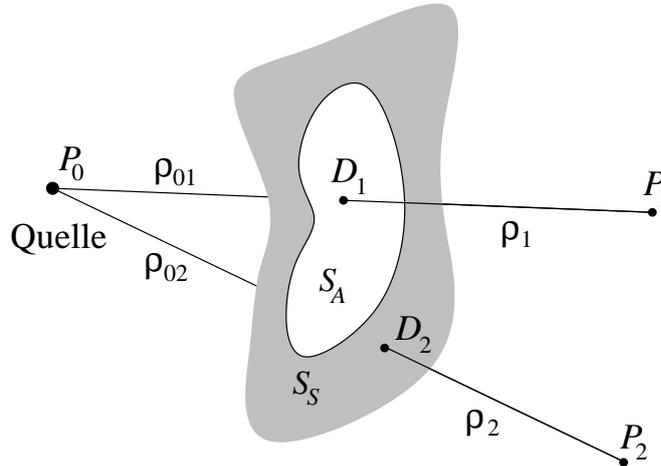


Abb. 10.14: Zur Entstehung des Schattens in der Wellenoptik: Die Quelle in  $P_0$  hat Sichtkontakt mit dem Beobachter bei  $P_1$ , nicht jedoch mit  $P_2$ . Die Punkte  $D_1$  und  $D_2$  auf dem Schirm definieren stationäre Punkte der Phase  $\Phi$  (des Eikonals  $S$ ). Liegt der stationäre Punkt  $D$  ausserhalb der Apertur so befindet sich der zugehörige Punkt  $P$  im Schatten.

d.h.,  $D_1 \in S_A$ , so findet man im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  das Resultat

$$u_{P_1} = A \frac{e^{ik(\rho_{01} + \rho_1)}}{\rho_{01} + \rho_1}. \quad (10.42)$$

Wählt man andererseits  $P_2$  ohne geradlinige Sichtverbindung zu  $P_0$ , d.h.  $D_2 \in S_S$ , so interferieren sich alle Wellenzüge im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  zu 0,

$$u_{P_2} = 0, \quad (10.43)$$

und wir sind in der Schattengzone. Wiederum erscheint die Schattengrenze scharf —  $D$  ist entweder in  $S_A$  oder in  $S_S$ . Somit liefert die Fresnel Theorie von Licht und Schatten im Limes  $\lambda \rightarrow 0$  dasselbe Resultat wie die Geometrische Optik, nämlich dass sich das Licht im allgemeinen geradlinig fortpflanzt. Für  $\lambda > 0$  wird die Schattengrenze aufgeweicht - wir werden noch genauer untersuchen, wie das geschieht (siehe Beugung an der Halbebene).

### Spezialfall: Beugung hinter der Kreisscheibe

Eine Ausnahme vom obigen Resultat erhalten wir, wenn die Phase  $k(r + r')$  auf einem endlichen Teil der Schirmkante konstant ist (im allgemeinen

sind dies elliptisch gekrümmte Teile der Schirmkante, welche bei geeignetem Lichteinfall aktiv werden). Als einfachsten Spezialfall diskutieren wir die Kreisscheibe mit  $P_0, P$  auf der Achse, vgl. Abb. 10.15. Mit (10.14) erhalten wir

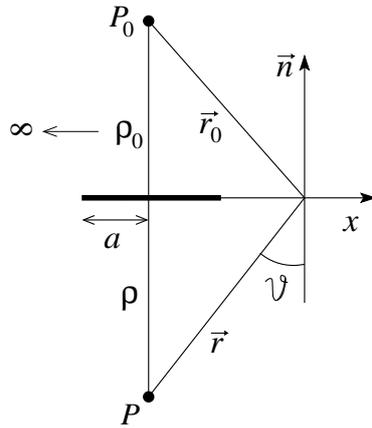


Abb. 10.15: Zur Beugung hinter der Kreisscheibe mit Radius  $a$ ; die Quelle  $P_0$  und der Detektor  $P$  sind im Abstand  $\rho_0$  und  $\rho$  auf der Achse positioniert; das Signal  $u_P$  ergibt sich aus den Partialwellen ausgehend von Punkten auf der  $x$ -Achse.

$$\begin{aligned}
 u_P &= \frac{A}{i\lambda} \int_a^\infty dx 2\pi x \frac{e^{ik(r+r_0)}}{r_0 r} \cos \vartheta, \\
 &\quad (r^2 = \rho^2 + x^2, \quad \cos \vartheta = \rho/r, \quad r_0 \approx \rho_0) \\
 &= \frac{2\pi A\rho}{i\lambda\rho_0} e^{ik\rho_0} \int_{\sqrt{\rho^2+a^2}}^\infty dr r e^{ikr}/r^2 \\
 &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{2\pi A\rho}{i\lambda\rho_0} e^{ik\rho_0} \left\{ \frac{1}{ik} \frac{e^{ikr}}{r} \Big|_{\sqrt{\cdot}}^\infty + \int_{\sqrt{\cdot}}^\infty \underbrace{dr \frac{e^{ikr}}{ikr^2}}_{\text{klein für } ka \gg 1} \right\} \\
 &= \frac{2\pi A\rho}{\lambda} \frac{e^{ik\rho_0}}{k\rho_0} \frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+a^2}}}{\sqrt{\rho^2+a^2}}. \tag{10.44}
 \end{aligned}$$

Am Scheibenrand definieren wir die Erregung  $u_a = Ae^{ik\rho_0}/\rho_0$ ,  $I_a = |u_a|^2$  und erhalten die Schlussresultate

$$\begin{aligned}
 u_P &= u_a \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}} e^{ik\sqrt{\rho^2+a^2}}, \\
 I_P &= \frac{\rho^2}{\rho^2+a^2} I_a. \tag{10.45}
 \end{aligned}$$

Zentral hinter der Scheibe sieht man also in grosser Entfernung keinen Scheibenschatten — nur direkt hinter der Scheibe herrscht Dunkelheit, währenddem weit weg die Intensität auf der Mittellinie diejenige am Kreisrand erreicht. Man kann sagen, dass die Lichtwellen gleichsam um den Scheibenrand herumschlagen und auf der Mittelachse positiv interferieren, im Gegensatz

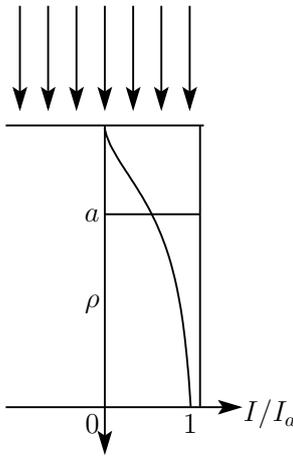


Abb. 10.16: Intensität des gebeugten Lichtes hinter der Kreisscheibe mit Radius  $a$ . Beachte, dass weit hinter der Scheibe auf der Achse die volle Intensität am Rand beobachtet wird; weg von der Achse verschwindet die Intensität und erholt sich erst wieder beim Austritt aus dem Schatten der Kreisscheibe.

zu unseren Erwartungen gemäss (10.5). Beachte aber, dass dieses singuläre Verhalten *nur auf der Mittelachse* realisiert ist — weg von der Achse treten wir sofort in den Kreisschatten ein.

### Spezialfall: Kreisförmige Blende

Für die komplementäre Blende erhalten wir

$$\begin{aligned}
 u_P &= \frac{2\pi A\rho}{i\lambda\rho_0} e^{ik\rho_0} \int_{\rho}^{\sqrt{\rho^2+a^2}} dr \frac{e^{ikr}}{r} \\
 &= u_a \left[ e^{ik\rho} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}} e^{ik\sqrt{\rho^2+a^2}} \right], \\
 I &= I_a \left[ \frac{a^2+2\rho^2}{a^2+\rho^2} - \frac{2\rho}{\sqrt{a^2+\rho^2}} \cos k(\sqrt{\rho^2+a^2}-\rho) \right] \\
 &\stackrel{a \ll \rho}{\approx} 4I_a \sin^2 \frac{ka^2}{4\rho}. \tag{10.46}
 \end{aligned}$$

Auf der Mittellinie hinter der Blende ergibt sich somit eine grosse Anzahl von Dunkelstellen und die Intensität nimmt auf grossen Distanzen ab gemäss  $I(\rho) \approx I_a (ka^2/2\rho)^2$ . Weitere interessante Fragestellungen betreffen die Anzahl Dunkelstellen hinter dem Schirm, die Intensität direkt hinter dem Schirm ( $\rho < a$ ), und die Relation zwischen 10.5.2, 10.5.2 und dem Babinet'sches Prinzip, siehe Übungen.

## 10.6 Fraunhofer Beugung

Wir visieren mit einem auf 'unendlich' eingestellten Fernrohr durch die Beugungsöffnung auf eine 'unendlich' entfernte Lichtquelle, siehe 218 (Lichtquel-

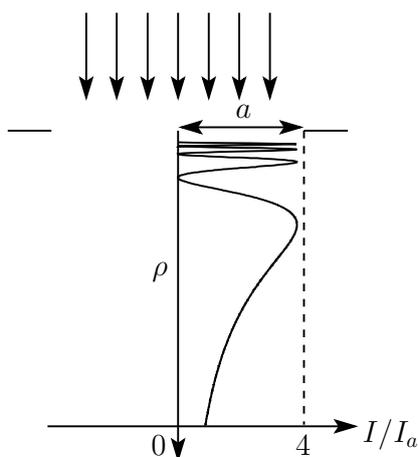


Abb. 10.17: Intensität hinter einer kreisförmigen Blende mit Radius  $a$ .

le in der Brennebene der Kollimatorlinse), vgl. Abb. 10.18. Wir gehen von

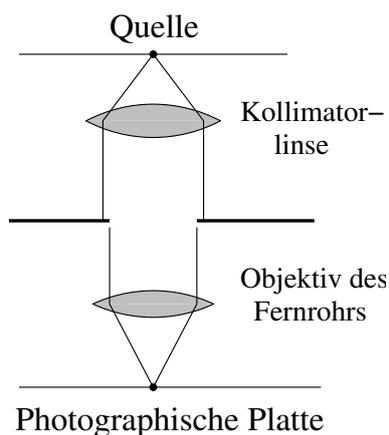


Abb. 10.18: Fraunhofer Beugung: Licht von der Quelle wird von einer Kollimatorlinse parallel ausgerichtet, tritt durch den Schirm hindurch und wird durch das Objektiv des Fernrohres auf eine photographische Platte oder ein Okular fokussiert, von wo aus es als ebene Welle ins Auge gelangt.

der Fraunhofer Formel (10.33) aus,

$$u(p, q) = \frac{\sqrt{I_0}}{\mathcal{S}_A} \int_{\mathcal{S}_A} d\xi d\eta e^{-ik(p\xi + q\eta)}, \quad (10.47)$$

$$p = \alpha - \alpha_0, \quad q = \beta - \beta_0$$

Dabei sind  $\xi, \eta$  Koordinaten in der Apertur  $\mathcal{S}_A$ ,  $\mathcal{S}_A$  die Fläche von  $\mathcal{S}_A$  und  $I_0$  die Intensität im Zentrum. Die sich ergebende Aufgabe ist trivial: Finde die 2D Fouriertransformierte der Charakteristischen Funktion auf  $\mathcal{S}_A$ .

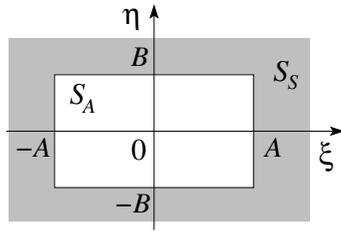


Abb. 10.19: Fraunhofersche Beugung an einem Schirm mit rechteckiger Apertur der Dimension  $2A \times 2B$ .

### 10.6.1 Rechteck

$$\begin{aligned} \int_{S_A} d\xi d\eta e^{-ik(p\xi+q\eta)} &= \frac{2 \sin kpA}{kp} \frac{2 \sin kqB}{kq}, \\ u(p, q) &= \sqrt{I_0} \frac{\sin kpA}{kpA} \frac{\sin kqB}{kqB}, \\ I(p, q) &= I_0 \left( \frac{\sin kpA}{kpA} \right)^2 \left( \frac{\sin kqB}{kqB} \right)^2. \end{aligned} \quad (10.48)$$

Einige Charakteristika der Funktion  $f(x) = ((\sin x)/x)^2$ :

$$\begin{aligned} \text{Minima:} & \quad x = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots \\ \text{Maxima:} & \quad 0, \tan x = x \rightarrow \sim \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \pm \frac{7\pi}{2}, \dots \\ \text{Werte:} & \quad 1, \quad 0.047, 0.017, 0.008 \end{aligned}$$

Die *Breite der Struktur* (Abstand zwischen Maximum und erstem Minimum) ist ausgedrückt in der Winkelskala

$$kpA = \pi, \quad (10.49)$$

$$\rightarrow p = \alpha - \alpha_0 = \pi/kA, \quad (10.50)$$

*invers* zur Apertur (die Beugungsstruktur im Winkel ist gerade die Fouriertransformierte der Apertur). Die Intensität ist in Abb. 10.20 in einem Grauskalenplot aufgetragen.

### 10.6.2 Spalt

Die Beugung am Spalt ergibt sich aus dem Grenzwert

$$B \gg A \quad (10.51)$$

des Rechtecks. Das bedeutet, dass sich die Lichtverteilung entlang  $q$  zusammenzieht, siehe Abb. 10.21. Durch einen einfachen Trick bekommen wir ein 1D-Resultat: Wir nehmen statt eines Quellenpunktes eine Quelllinie, so dass

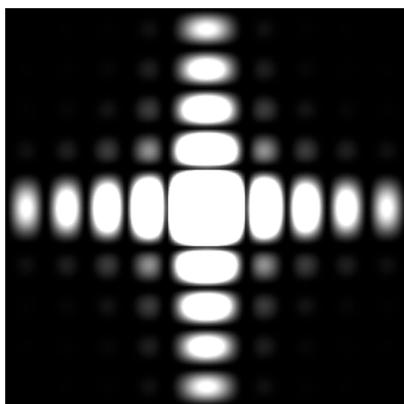


Abb. 10.20: Berechnete Lichtverteilung bei der Beugung am Rechteck; zum Vergleich mit dem Experiment sei auf den Artikel von H. Lipson, C.A. Taylor, and B.J. Thompson verwiesen (siehe auch Sommerfeld 'Optik'. Daten zu einer Apertur von  $8 \text{ mm} \times 7 \text{ mm}$  und einer Wellenlänge  $\lambda = 579 \text{ nm}$  (gelbe Quecksilberlampe), 50-fache Vergrößerung, der Mittelbereich überbelichtet.

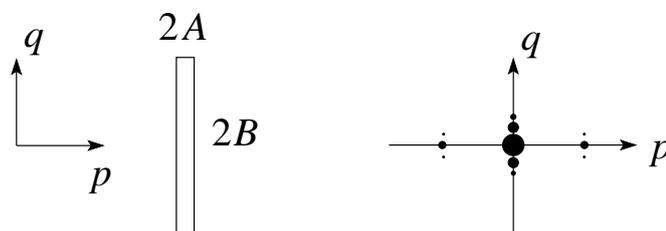


Abb. 10.21: Geometrie des Spalts und schematische Zeichnung des Fraunhoferschen Beugungsmusters.

wir die Intensität in (10.48) über die Winkel  $q$  integrieren können. Mit (wir nehmen  $q_0$  und  $B$  gross und somit  $q_0 kB \gg 1$ )

$$\int_{-q_0}^{q_0} \frac{d(kqB)}{kB} \left( \frac{\sin kqB}{kqB} \right)^2 \approx \frac{\pi}{kB}$$

erhalten wir die Intensitätsverteilung

$$I(p) = I_0 \left( \frac{\sin kpA}{kpA} \right)^2. \quad (10.52)$$

### 10.6.3 Kreis

Wir wählen die Koordinaten (vgl. Abb. 10.22)

$$\begin{aligned} \xi &= \rho \cos \phi, & p &= s \cos \psi \\ \eta &= \rho \sin \phi, & q &= s \sin \psi \end{aligned}$$

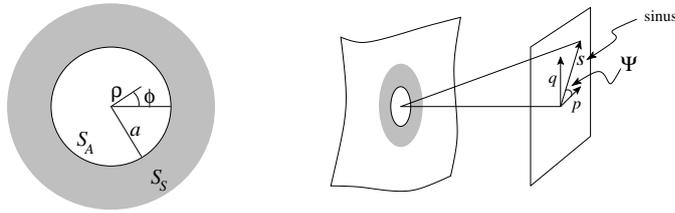


Abb. 10.22: Fraunhoferbeugung an einer kreisförmigen Apertur mit Radius  $a$  (links) und zugehörige Winkel (rechts).

$$\int_{S_A} d\xi d\eta e^{-ik(p\xi+q\eta)} = \int_0^a \rho d\rho \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-ik\rho s \cos(\phi-\psi)}}_{2\pi J_0(k\rho s) \text{ Besselfunktion 0-ter Ordnung.}}$$

$$= 2\pi \frac{kas}{k^2 s^2} J_1(aks), \quad \left[ \int_0^\rho d\rho' \rho' J_0(\rho') = \rho J_1(\rho) \right]$$

$$\rightarrow u_s = \frac{\sqrt{I_0}}{\pi a^2} 2\pi \frac{a}{ks} J_1(aks) = \frac{2\sqrt{I_0}}{aks} J_1(aks), \quad (10.53)$$

$$\rightarrow I(s) = I_0 \frac{4}{a^2 k^2 s^2} [J_1(aks)]^2, \quad [J_1(x) \approx x/2]. \quad (10.54)$$

Die theoretischen Beugungsbilder sind in Abb. 10.23 dargestellt.

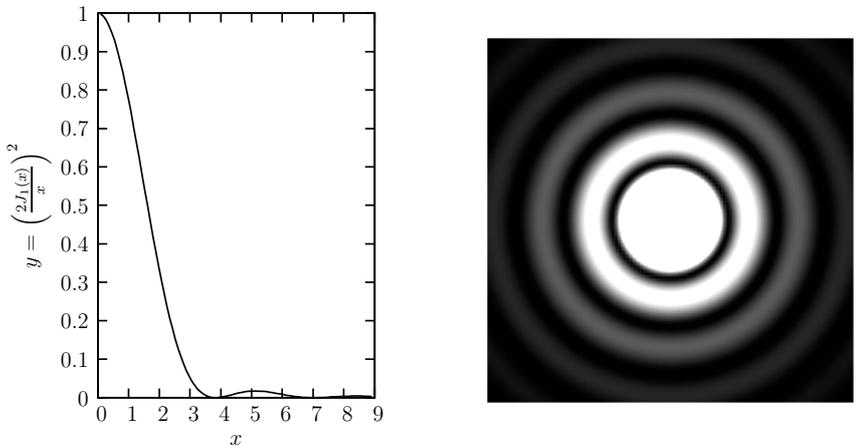


Abb. 10.23: Fraunhoferbeugung an einer kreisförmigen Apertur mit Radius  $a$ . Links: graphische Darstellung der Intensitätsverteilung  $y = (2J_1(x)/x)^2$ . Rechts: dasselbe als grauskalen Plot. Der Durchmesser der Apertur beträgt 6mm. Zum Vergleich mit dem Experiment sei auf den Artikel von H. Lipson, C.A. Taylor, and B.J. Thompson verwiesen (siehe auch Sommerfeld ‘Optik’). Daten zu einer Apertur mit einem Durchmesser von 6 mm und einer Wellenlänge  $\lambda = 579\text{nm}$  (gelbe Quecksilberlampe), 50-fache Vergrößerung, der Mittelbereich überbelichtet.

## 10.7 Fresnel Beugung: Spalt und Halbebene

Die Fresnelsche Analyse verbessert die Resultate der Fraunhoferbeugung und erlaubt uns die Beugung in endlicher Distanz vom Schirm zu beschreiben. Ausgehend von (10.22) untersuchen wir die Beugung am Spalt und an der Halbebene. Zu berechnen ist

$$u_P = \frac{A \cos \vartheta}{i\lambda R_0 R} e^{ik(R+R_0)} \int_{S_A} d\xi d\eta e^{-ik\Phi(\xi,\eta)}; \quad (10.55)$$

wir wählen ein günstiges Koordinatensystem mit der Länge  $2h$  des Spaltes  $\parallel y$ , vgl. die 3D-Abb. 10.24, die Quelle zentral zum Spalt. In Abb. 10.25

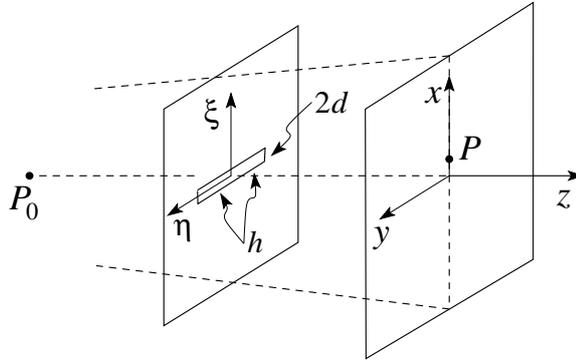


Abb. 10.24: Geometrie zur Fresnelbeugung am Spalt.

zeichnen die Mittelebene des Spaltes. Wir messen  $\xi$  und  $\eta$  vom Durchstoßpunkt  $D$  aus; damit wird das  $(\xi, \eta)$ -Koordinatensystem zwar  $P$ -abhängig, aber dafür ist  $\alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$  und somit  $p = q = 0$ , also verschwinden die linearen Terme in  $\Phi(\xi, \eta)$ . Damit  $\xi$  und  $\eta$  klein bleiben, beschränken wir die Untersuchung auf das Gebiet  $P \in S_A^*$ . Mit unseren Definitionen gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0, & \beta &= \beta_0 \\ \alpha^2 &= \sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \vartheta \equiv 1 - \gamma^2. \end{aligned} \quad (10.56)$$

Die Phasenfunktion  $\Phi(\xi, \eta)$  reduziert sich zu

$$\Phi = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) [\xi^2 + \eta^2 - \alpha^2 \xi^2] = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right) (\gamma^2 \xi^2 + \eta^2). \quad (10.57)$$

Für die Amplitude  $u_P$  erhalten wir den Ausdruck

$$u_P = \frac{A\gamma}{i\lambda R_0 R} e^{ik(R+R_0)} \int_{-d-\xi_D}^{d-\xi_D} d\xi e^{i\Phi_\xi \xi^2} \int_{-h}^h d\eta e^{i\Phi_\eta \eta^2}, \quad (10.58)$$

wobei wir die Phasen

$$\Phi_\xi = \frac{\gamma^2 k}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right), \quad \Phi_\eta = \frac{k}{2} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R_0} \right).$$

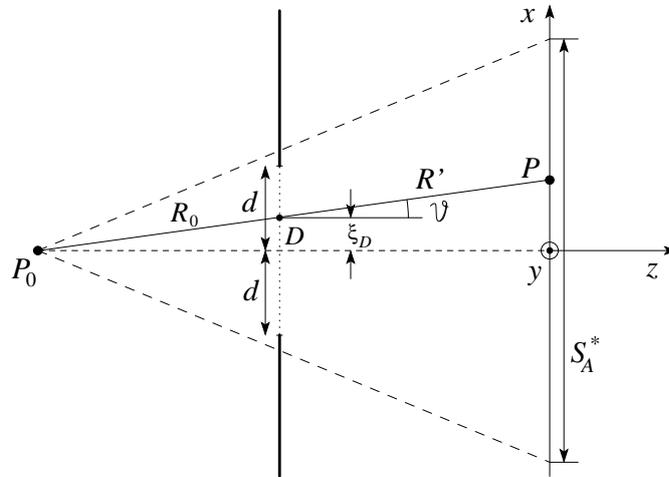


Abb. 10.25: Fresnelbeugung am Spalt der Breite  $2d$ : Definitionen der relevanten Winkel und Längen. Beachte, dass das Koordinatensystem  $\xi, \eta$  im Spalt am Durchschnittspunkt  $D$  fixiert ist und sich somit mit dem Detektor in  $P$  verschiebt.

definiert haben. Zur Lösung des Problems müssen wir die *Fresnelintegral*

$$\begin{aligned} F(w) &= \int_0^w dt e^{i\pi t^2/2} & (10.59) \\ &= C(w) + iS(w) \end{aligned}$$

berechnen (vgl. Gauss'sches Fehlerintegral  $\text{Erf}(w) = \int_0^w dt e^{-t^2}$ ). Es gilt<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} F(w \rightarrow 0) &= w \left[ 1 + \frac{i}{1!3} \frac{\pi}{2} w^2 - \frac{1}{2!5} \left( \frac{\pi}{2} w^2 \right)^2 - \frac{i}{3!7} \left( \frac{\pi}{2} w^2 \right)^3 + \dots \right], \\ F(w \rightarrow \infty) &= \frac{1+i}{2} + \frac{e^{i\pi w^2/2}}{i\pi w} \left[ 1 + \frac{1}{i\pi w^2} + \frac{1 \cdot 3}{(i\pi w^2)^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(i\pi w^2)^3} + \dots \right], \\ F(0) &= 0, \quad F(\infty) = \frac{1+i}{2}. \end{aligned}$$

Die Entwicklungen für Real- und Imaginärteile von  $F$ ,  $C$  und  $S$  folgen sofort. Beachte, vgl. Abb. 10.26, wie  $F$  für  $w \rightarrow \pm\infty$  in die Punkte  $\pm(1-i)/2$  hineinspiralisiert (Cornu Spirale).

Mit

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{\frac{2\Phi_\xi}{\pi}} (-d - \xi_D), & w_2 &= \sqrt{\frac{2\Phi_\xi}{\pi}} (d - \xi_D), \\ W &= \sqrt{\frac{2\Phi_\eta}{\pi}} h \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Die Reihe zu  $F(w \rightarrow \infty)$  ist asymptotisch.

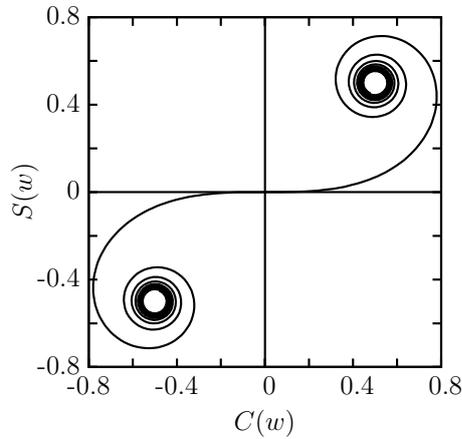


Abb. 10.26: Cornu Spirale  
 $F(w) = C(w) + iS(w) = \int_0^w dt \exp(i\pi t^2/2)$ ; es ist  $F(w \rightarrow 0) \sim w[1 + i\pi w^2/6 + \dots]$  und  $F(\pm\infty) = \pm(1+i)/2$ .

erhalten wir die Lösung

$$u_P = A \frac{e^{ik(R+R_0)}}{i(R+R_0)} F(\infty) [F(w_2) - F(w_1)], \quad (10.60)$$

wobei wir

$$W = \sqrt{\frac{2h^2(R+R_0)}{\lambda R_0 R}} \sim \frac{h}{\sqrt{\lambda R}} \gg \frac{d}{\sqrt{\lambda R}} \sim 1$$

unendlich gesetzt haben (die letzte Gleichung garantiert ein nichttriviales Resultat). Mit der primären Lichterregung in  $P$ ,

$$u_0 = A \frac{e^{ik(R+R_0)}}{R+R_0},$$

erhalten wir das Schlussresultat

$$u_P = \frac{1-i}{2} u_0 [F(w_1) - F(w_2)]. \quad (10.61)$$

Mit Hilfe der *Cornu* Spirale lässt sich dieses Resultat wunderbar einfach deuten: Wir zeichnen  $F = C + iS$  als Punkt in der komplexen Ebene. Die Abbildung  $w \in \mathbb{R} \rightarrow F(w) \in \mathbb{C}$  bildet die reelle Achse längentreu auf die Cornu Spirale ab, denn

$$\left| \frac{dF}{dw} \right| = |e^{i\pi w^2/2}| = 1 \rightarrow |dF| = |dw|. \quad (10.62)$$

Weiter ist  $F(0) = 0$ ,  $F(\pm\infty) = \pm(1+i)/2$ ,  $F(w) = -F(-w)$ ,  $\partial_w F|_0 = 1 \rightarrow F$  wächst nur im Realteil,  $\partial_w^2 F|_0 = 0 \rightarrow F$  hat einen Wendepunkt im Ursprung. Die Tangente ergibt sich aus

$$\tan \vartheta = \frac{dS}{dC} = \frac{\partial_w S}{\partial_w C} = \tan \frac{\pi}{2} w^2. \quad (10.63)$$

Also ist  $\vartheta = (\pi/2)w^2$  und wir haben

$$\begin{aligned} F \perp C - \text{Achse bei } w^2 = 1, 3, \dots \\ F \parallel C - \text{Achse bei } w^2 = 2, 4, \dots \end{aligned}$$

Nach (10.61) ist das Amplitudenverhältnis hinter dem Spalt gegeben durch

$$\sqrt{2} \left| \frac{u_P}{u_0} \right| = |F(w_2) - F(w_1)|; \tag{10.64}$$

dies ist gerade die *Länge der Sehne* zwischen den zu  $w_1, w_2$  gehörigen Punkten auf der Cornu Spirale. Mit

$$w_2 - w_1 = 2\gamma d \sqrt{\frac{R + R_0}{\lambda R R_0}} \approx \text{const} \sim \frac{d}{\sqrt{\lambda R}} \tag{10.65}$$

müssen wir lediglich gleich lange Sehnenstücke aus der Spirale herausgreifen, vgl. Abb. 10.27. Welches Sehnenstück relevant ist, wird durch die Koordinate  $\xi_D$  von  $D$  bestimmt.

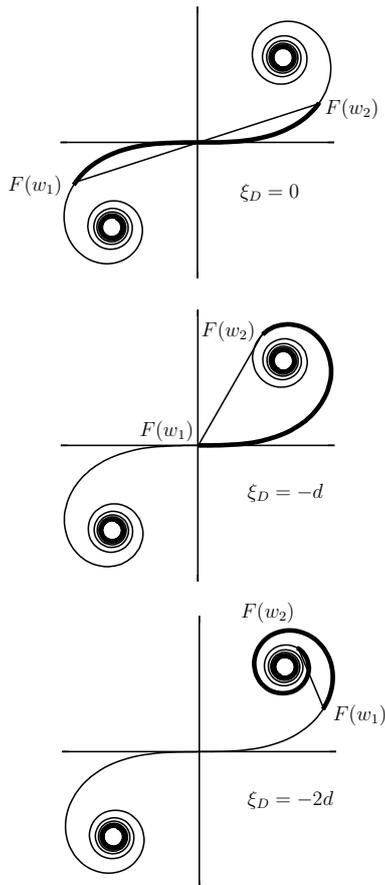


Abb. 10.27: Die Differenzlänge  $|F(w_2) - F(w_1)|$  ist gleich der Länge der Sehne zwischen den zu  $w_1$  und  $w_2$  gehörigen Punkten auf der Cornuspirale. In dieser Abbildung ist die Distanz  $w_2 - w_1 \approx d/\sqrt{\lambda R}$  festgehalten. Oben: Maximale Intensität in der Mitte des Spaltes. Unten: Zerfall der Intensität weg von der Mitte.

/subsubsectionBeugung an der Halbebene

Für die Halbebene lassen wir den Spalt  $d \rightarrow \infty$  unendlich breit werden, wobei wir aber eine Halbebene (die untere) festhalten. Weiter rücken wir  $P_0$  ins Unendliche, lassen also eine ebene Welle auf den Schirm auffallen, vgl. Abb. 10.28. Die Parameter  $w_1$  und  $w_2$  ergeben sich dann zu

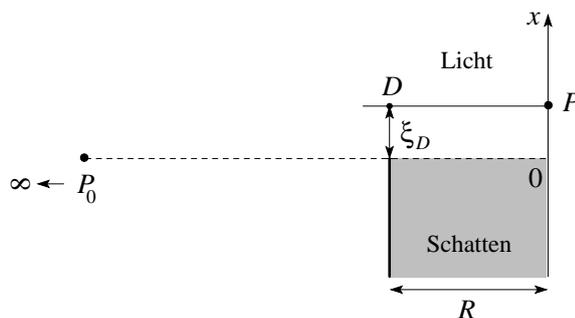


Abb. 10.28: Geometrie und Definitionen zur Beugung an der Halbebene.

$$\begin{aligned} \rightarrow w_1 &= \frac{-x}{\sqrt{\frac{\lambda R}{2}}} \equiv -w, \\ w_2 &= \infty, \\ \rightarrow \sqrt{2} \left| \frac{u_P}{u_0} \right| &= |F(w) - F(-\infty)|. \end{aligned} \quad (10.66)$$

In der Cornu Spirale beginnen wir jetzt bei  $F = -(1+i)/2$  und lassen den Kurvenparameter im Schattengebiet  $x < \infty$  bis zu 0 wachsen, vgl. Abb. 10.29. An der Licht-Schattengrenze erhalten wir  $|u_P| = |u_0|/2$ . Für  $x > 0$

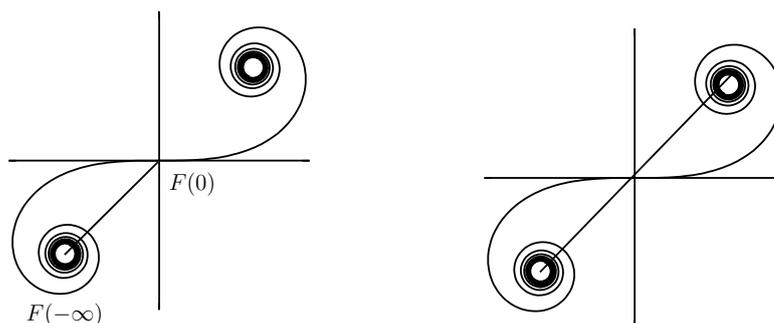


Abb. 10.29: Im Beugungsproblem zur Halbebene starten wir am Punkt  $F(w = -\infty) = -(1+i)/2$ . Die Intensität wächst monoton und erreicht bei  $w = 0$  die halbe Intensität (links). Die Intensität im Lichtbereich oszilliert wenn der Endpunkt in den Punkt  $F(w = \infty) = (1+i)/2$  hineinspiralisiert.

treten wir ins Licht ein und erhalten nach einigen Oszillationen, vgl. Abb.

**10.30** die volle Intensität zurück. Der Licht-Schatten Übergang ist somit nicht abrupt, sondern auf die Distanz

$$\Delta w \sim 1 \sim \Delta x / \sqrt{\lambda R} \quad (10.67)$$

ausgeschmiert; beachte, dass  $\Delta x \rightarrow 0$  für  $\lambda \rightarrow 0$ . Dass wir alle obigen Limites

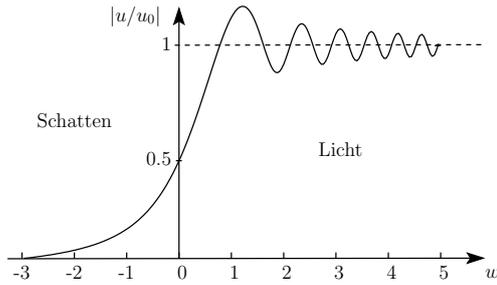


Abb. 10.30: Intensitätsverlauf beim Übergang vom Licht zum Schatten in der Fresnelbeugung.

machen durften, ist nicht trivial. Das Problem der Halbebene lässt sich aber exakt lösen und bestätigt die Richtigkeit der obigen Analyse. Die exakte Lösung ist ein wunderschönes Stück theoretischer Physik.

## 10.8 Vektorielle Beugungstheorie

Wir wollen uns nur kurz mit der vektoriellen Beugungstheorie beschäftigen; eine ausführliche Diskussion findet man im Buch von Jackson. Hier das Interessanteste in Kürze.

Ausgehend von (10.28) leitet man mit Hilfe von Vektoridentitäten ein praktisches Vektoranalogon zur Kirchhoffschen Integralformel her [entsprechend (10.6)]

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_S d^2r' [ik(\vec{n}' \times \vec{B})G + (\vec{n}' \times \vec{E}) \times \vec{\nabla}' G + (\vec{n}' \cdot \vec{E})\vec{\nabla}' G]. \quad (10.68)$$

Eine analoge Formel für  $\vec{B}$  erhält man durch die Substitution  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$ ,  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ . Für einen *perfekt leitenden planaren Schirm* lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen zu

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \times \int_{S_A} d^2r' [\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}')] \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad (10.69)$$

wobei  $\vec{n}$  hier von der Quelle weg zeigt und  $\vec{r}$  *hinter* dem Schirm liegt. Die *Kirchhoff-Approximation* ergibt sich dann durch Einsetzen des ungestörten einfallenden Feldes  $\vec{E}_i$  in der Apertur  $S_A$ .

Natürlich gilt auch ein *Babinet'sches Prinzip*: Die komplementären Probleme ergeben sich gemäss

**Original:**  $\vec{E}_i, \vec{B}_i, S_A$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \times \int_{S_A} d^2 r' [\vec{n} \times \vec{E}(\vec{r}')] \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (10.70)$$

**Komplement:**  $\vec{E}_{ci} = -\vec{B}_i, \vec{B}_{ci} = \vec{E}_i, S_{cA} = S_S,$

$$\vec{B}_{ci}' = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \times \int_{S_S} d^2 r' [\vec{n} \times \vec{B}_{ci}'(\vec{r}')] \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

wobei  $\vec{B}_c' = \vec{B}_c - \vec{B}_{ci}$  hinter dem Schirm gemessen wird ( $\vec{B}_{ci}$  = einfallendes Feld ohne Schirm).

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{E} - \vec{B}_c &= -\vec{E}_i, \\ \vec{B} + \vec{E}_c &= -\vec{B}_i, \text{ hinter dem Schirm.} \end{aligned} \quad (10.71)$$

Beachte das Spiel der wechselnden Polarisierungen.

Will man elektromagnetische Strahlung an einem *3D-Objekt streuen* (kein Schirm), so empfiehlt sich ein *Streuformalismus*: Man setzt für das gestreute  $\vec{E}$ -Feld asymptotisch an

$$\vec{E}_s(\vec{r}) \rightarrow \frac{e^{ikr}}{r} \vec{F}(\vec{k}, \vec{k}_i). \quad (10.72)$$

Dabei beschreibt  $\vec{k}_i$  die einfallende und  $\vec{k}$  die gestreute Welle. Mit Hilfe von (10.68) leitet man eine Integralbeziehung für die Streuamplitude  $\vec{F}$  her,

$$\vec{F}(\vec{k}, \vec{k}_i) = \frac{1}{4\pi i} \vec{k} \times \int_S d^2 r' e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}'} [\hat{k} \times (\vec{n}' \times \vec{B}_s) - \vec{n}' \times \vec{E}_s]. \quad (10.73)$$

Für die Streufelder  $\vec{E}_s, \vec{B}_s$  auf dem Streuobjekt macht man dann geeignete Approximationen, z.B. wählt man für eine perfekt leitende Oberfläche in der illuminierten Zone

$$\begin{aligned} \vec{E}_{s,\parallel} &= -\vec{E}_{i,\parallel}, & \vec{E}_{s,\perp} &= \vec{E}_{i,\perp}, \\ \vec{B}_{s,\perp} &= -\vec{B}_{i,\perp}, & \vec{B}_{s,\parallel} &= \vec{B}_{i,\parallel}, \end{aligned} \quad (10.74)$$

und in der Schattenzone

$$\vec{E}_s = -\vec{E}_i, \quad \vec{B}_s = -\vec{B}_i.$$

Das Kapitel 9.13 im Jackson gibt eine interessante Anwendung — die Streuung an einer leitenden Kugel mit  $kR = 2\pi R/\lambda = 10$ . Schliesslich gilt das *optische Theorem*:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \text{Im} \vec{\varepsilon}_i^* \cdot \vec{f}(\vec{k}_i, \vec{k}_i), \quad (10.75)$$

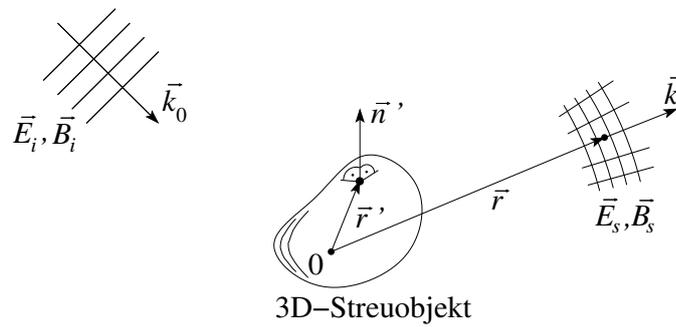


Abb. 10.31: Einfallende  $(\vec{E}_i, \vec{B}_i)$  und gestreute  $(\vec{E}_s, \vec{B}_s)$  Felder bei der Streuung an einem 3D-Objekt.

mit

$$\vec{f}(\vec{k}, \vec{k}_i) = \frac{\vec{F}(\vec{k}, \vec{k}_i)}{E_i}.$$

Dabei ist  $\sigma$  der totale Wirkungsquerschnitt und  $E_i$  ist die Amplitude der einfallenden Welle. Das Theorem besagt, dass die in Vorwärtsrichtung fehlende Intensität gestreut worden ist (ein Erhaltungssatz) und gibt damit einen Zusammenhang zwischen Wirkungsquerschnitt  $\sigma$  und Streuamplitude  $F$  in Vorwärtsrichtung.



# Kapitel 11

## Relativitätstheorie

### 11.1 Von Galilei zu Lorentz

Die Geschichte der *Relativität* beginnt mit Galilei-Newton und der Galilei-Invarianz der Newton Mechanik: Wir betrachten ein System von  $N$  Massenpunkten  $m_i$  an den Positionen  $\vec{r}_i$ . Deren Dynamik ist dann gegeben durch die Newton Gleichungen

$$m_i \partial_t^2 \vec{r}_i = G \sum_{j \neq i}^N \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2} \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}, \quad (11.1)$$

welche unter der Galilei-Transformation

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R\vec{r} + \vec{v}t + \vec{r}_0, \\ t' &= t + t_0 \end{aligned} \quad (11.2)$$

invariant sind (denn  $\partial_t^2 = \partial_{t'}^2$ ,  $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = |\vec{r}_i' - \vec{r}_j'|$ ,  $\vec{r}_i, \vec{r}_i - \vec{r}_j$  transformieren als Galileivektoren gleich). Die Gleichungen (11.2) definieren eine 10-parametrische Gruppe (Galilei Gruppe): Die Translationen  $\vec{r}_0, t_0$  sind trivial, aus ihnen folgt die Homogenität in Raum und Zeit. Da  $t'$  entkoppelt ist, wirkt  $\vec{v}t$  wie eine zeitabhängige Translation in  $\vec{r}'$ . Einzig der Term  $\vec{r}' = R\vec{r}$  ist nicht trivial: Wir müssen sicherstellen, dass die *Distanzen* erhalten sind. Mit der Definition der Länge

$$|\vec{r}| = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle_E = \sum_i x_i^2$$

und

$$\langle \vec{r}', \vec{r}' \rangle_E = \langle R\vec{r}, R\vec{r} \rangle_E = \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle_E$$

verlangen wir  $R^T R = 1$ ,  $R$  eine Rotation. Entsprechend können wir Vektoren definieren, welche sich unter Rotation verhalten wie

$$\vec{A}' = R\vec{A};$$

wir nennen diese Objekte Dreier-Vektoren (oder ‘Galileivektoren’). In einem mechanischen Weltbild verlangen wir dann, dass alle Naturgesetze *Galilei-invariant* sein müssen: Die Natur verhält sich gleich für zwei Beobachter, welche sich mit *konstanter Geschwindigkeit*  $\vec{v}$  relativ zueinander bewegen<sup>1</sup>. Mit dem Auftritt der Elektrodynamik und der Maxwellgleichungen erfährt dieses mechanische Weltbild einen Widerspruch: Die Maxwellgleichungen zeichnen eine Geschwindigkeit  $c$  aus, diejenige des Lichtes. Transformieren wir mit (11.2) auf ein zum ursprünglichen System mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegtes System, so erhalten wir *nicht* die ursprünglichen Gleichungen zurück. Zum Beispiel transformiert sich die Wellengleichung

$$(c^2\Delta - \partial_t^2)f(\vec{r}, t) = 0 \quad (11.3)$$

zu

$$(c^2\Delta' - \partial_{t'}^2 - 2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}')\partial_{t'} - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}')^2)f(\vec{r}', t') = 0.$$

Es ergibt sich damit die Frage, in welchem System die Maxwellgleichungen gelten. Die naheliegende Idee ist die Postulierung des Äthers, der das Medium für die Propagation elektromagnetischer Wellen konstituiert.

Alle Versuche, die Existenz des Äthers nachzuweisen, schlugen fehl; das

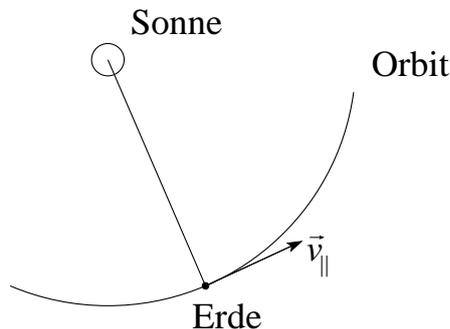


Abb. 11.1: Idee des den Weltraum durchdringenden Äthers: Im Experiment soll die zusätzliche Geschwindigkeit  $\vec{v}_{\parallel}$  der Erde gegenüber dem Äther bei ihrem Umlauf um die Sonne gemessen werden.

berühmteste Experiment ist wahrscheinlich dasjenige von Michelson und Morley; sie zeigten 1887, dass  $\Delta c = |c_{\perp} - c_{\parallel}| < 5 \text{ km/s}$ , obwohl  $v_{\parallel}^{\text{Erde}} \approx 30 \text{ km/s}$  misst. Die kühne Konsequenz aus dieser Tatsache wurde von Lorentz, Poincaré und Einstein gezogen: Nimmt man konsequent an, dass die Lichtgeschwindigkeit  $c$  in allen (Inertial-)Systemen<sup>2</sup> gleich sei, so muss für zwei solche Systeme gelten, dass

$$c^2t^2 - r^2 = c^2t'^2 - r'^2 \quad (11.4)$$

erfüllt ist.<sup>3</sup> Statt  $r^2 = r'^2$  (Newton'sche Mechanik) muss für die Elektrodynamik die Gleichung (11.4) erfüllt sein. Damit wird Ort und Zeit auf die

<sup>1</sup>Man spricht von Inertialsystemen

<sup>2</sup>Inertialsysteme sind unbeschleunigte, relativ zueinander gleichförmig bewegte Systeme.

<sup>3</sup>Betrachte zwei Systeme, welche sich relativ zueinander gleichförmig bewegen. Zur Zeit

gleiche Stufe gebracht, d.h. beim Übergang zwischen Inertialsystemen werden Ort und Zeit gemischt und die Zeit verliert ihre isolierte (absolute) Bedeutung. Analog zum Galilei-Newton-Weltbild gehen wir zu einem Einstein-Minkowski-Weltbild über, indem wir von der getrennten Raum/Zeit zu einer 4-dimensionalen Raum-Zeit übergehen. Statt 3-er Vektoren  $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$  plus Zeit  $t \in \mathbb{R}$  betrachten wir den Minkowskiraum mit den 4-er Vektoren  $(ct, \vec{r}) \in \mathbb{M}^4$  als Grundlage. Die Metrik  $\eta_{ij} = \delta_{ij}$  des  $\mathbb{R}^3$  erweitern wir dabei zur Metrik

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} \eta_{00} = -1, \\ \eta_{0i} = \eta_{i0} = 0, \quad \forall i \neq 0, \\ \eta_{ij} = \delta_{ij}, \end{cases} \quad (11.5)$$

des Minkowski-Raumes<sup>4</sup>. Verlangen wir jetzt, dass beim Übergang zwischen Inertialsystemen<sup>5</sup> die Länge ( $x^0 = ct$ )

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= c^2 dt^2 - \underbrace{d\vec{r}^2}_{\eta_{ij} dx^i dx^j} \end{aligned} \quad (11.6)$$

erhalten bleibt, so garantieren wir die Gültigkeit von (11.4). Damit erhalten wir für die Inertialsysteme  $x = (ct, \vec{r})$  und  $x' = (ct', \vec{r}')$ , mit dem linearen Zusammenhang

$$x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta + a^\alpha, \quad (11.7)$$

die Bedingung

$$\langle x', y' \rangle_M = \langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_M = \langle x, y \rangle_M.$$

Mit der Metrik  $\eta_{\alpha\beta}$ ,

$$\langle x, y \rangle_M = -\eta_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \quad (11.8)$$

erhalten wir für alle  $x^\gamma, y^\delta$

$$\begin{aligned} -\eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma x^\gamma \Lambda^\beta_\delta y^\delta &= -\eta_{\gamma\delta} x^\gamma y^\delta \\ \Rightarrow \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta \eta_{\alpha\beta} &= \eta_{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (11.9)$$

(in Matrixschreibweise gilt äquivalent  $A^T g A = g$ , mit  $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ ,  $A_{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\beta$ ) als Bedingung an die Transformationen  $\Lambda$ . Die *Rotationen* der Galilei-Gruppe mit  $R^T \mathbb{1} R = \mathbb{1}$  werden durch die *Lorentztransformationen*  $A^T g A = g$  ersetzt. Auf die Struktur der Lorentzgruppe ( $4 \times 4$  Matrizen mit  $A^T g A =$

$t = t' = 0$  werde im Punkt  $\vec{r} = \vec{r}' = 0$  ein Lichtpuls im Ruhesystem  $(t, \vec{r})$  ausgesandt; dann befindet sich die Wellenfront im System  $(t, \vec{r})$  bei  $c^2 t^2 = r^2$ , diejenige im System  $(t', \vec{r}')$  bei  $c^2 t'^2 = r'^2$ .

<sup>4</sup>Indices aus dem griechischen Alphabet ( $\alpha, \beta, \dots$ ) gehen von 0 bis 3, solche aus dem lateinischen von 1 bis 3.

<sup>5</sup>Wir gehen zur ko-/kontravarianten Schreibweise über, siehe folgender Abschnitt; gemäss Einstein Summenkonvention wird über doppelt vorkommende Indices summiert.

$g$ ) plus Translationen  $\vec{a}$  (10-parametrische Gruppe, wie die Galilei-Gruppe) werden wir noch zu sprechen kommen.

Spinnen wir den Faden weiter, so können wir ein neues Weltbild definieren: Im Einstein-Minkowski-Weltbild sollen alle Naturgesetze *Lorentzinvariant* sein. Wiederum bedeutet dies, dass zwei relativ zueinander bewegte Beobachter die identischen Naturgesetze (identische physikalische Gleichungen) vorfinden; nur dass jetzt die Systeme gemäss (11.7) und nicht gemäss (11.2) transformieren. Dies bedeutet, dass wir alle Naturgesetze als Tensorgleichungen im Minkowskiraum formulieren müssen. Für die Elektrodynamik werden wir zeigen, dass die Maxwellgleichungen die entsprechende Struktur besitzen und damit Lorentzinvariant sind (dies haben wir schliesslich via (11.4,11.7) und (11.9) so eingerichtet). Die Newton Mechanik aber müssen wir verallgemeinern mit dem Ziel, eine Lorentzinvariante Einsteinsche Mechanik zu erhalten. Das neue Einstein-Minkowski-Weltbild vermag dann Mechanik und Elektrodynamik widerspruchsfrei als Lorentzinvariante Theorien zu formulieren. Die Newton Mechanik wird dann als nichtrelativistischer Limes der Einstein-Mechanik für  $v \ll c$  folgen. Damit haben wir den Rahmen der *speziellen Relativitätstheorie* abgesteckt. Das verbleibende Mysterium ist die Frage nach der Absolutheit der Inertialsysteme. Was definiert ein Inertialsystem im Raum? Betrachte zum Beispiel zwei Beobachter auf der Erde, relativ zueinander bewegt mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  und zwei Beobachter im fallenden Lift, auch relativ zueinander bewegt. Welches Paar bewegt sich im Inertialsystem? Diese Frage wird uns zur *allgemeinen Relativitätstheorie* führen.

## 11.2 Vektoren und Tensoren

### 11.2.1 Ko- und kontravariante Vektoren

Wir beziehen uns auf die Diskussion von krummlinigen Koordinaten im Abschnitt 2.4 und betrachten einen Vektor in zwei verschiedenen Koordinatensystemen: für die Komponenten  $\vec{a}$  und  $\vec{a}'$  (alt und neu) gilt der Zusammenhang (2.28):

$$a'_i = \gamma_{ij} a_j = \frac{h_j}{h'_i} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} a_j = \frac{h'_i}{h_j} \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} a_j. \quad (11.10)$$

Dabei sind die Transformationskoeffizienten  $\gamma_{ij} = \text{Längen/Längen}$  dimensionslos. Es ist oft angebracht, andere Transformationsregeln zu verwenden, welche die Längenskalen verschieden auf Komponenten und Basisvektoren verteilen (der resultierende Formalismus der Tensoranalysis wird vorab in der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) gebraucht, erweist sich aber auch in der speziellen Relativitätstheorie als nützlich). Zwei Möglichkeiten bieten

sich an:

$$\vec{a} = \underbrace{\sum_i a_i \vec{e}_i = \sum_i a'_i \vec{e}'_i}_{\substack{\text{gleiche} \\ \text{zugrundliegende} \\ \text{Längeneinheit}}} \quad (11.11)$$

$$\begin{array}{cc} \parallel & \parallel \\ \textit{kontravariant} & \textit{kovariant} \\ \sum_i \underbrace{\left(\frac{a_i}{h_i}\right)}_{\equiv A^i} \underbrace{(h_i \vec{e}_i)}_{\equiv \hat{e}_i} & \sum_i \underbrace{(a_i h_i)}_{\equiv A_i} \underbrace{\left(\frac{\vec{e}_i}{h_i}\right)}_{\equiv \hat{e}^i} \end{array}$$

Damit übergeben wir die Längenskalen  $h_i$  in geeigneter Weise an die Basisvektoren; die Art und Weise wie die Längen übergeben werden ist in der Position der Indices, oben versus unten, kodiert. Als Folge vereinfachen sich die Transformationsregeln für die *Komponenten*  $A^i$  und  $A_i$  dramatisch,

$$\begin{aligned} A'^i &= \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} A^j & A'_i &= \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \\ \left( = \frac{h_j^2}{h_i'^2} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A^j \right) & & \left( = \frac{h_i'^2}{h_j^2} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} A_j \right). \end{aligned} \quad (11.12)$$

Offensichtlich sind die Vektoren

$$dx^i \text{ kontravariant,} \quad \partial_{x^i} \text{ kovariant,}$$

denn

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j, \quad \frac{\partial}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (11.13)$$

weshalb wir in den Differentialen  $dx^i$  den Index  $i$  oben schreiben.<sup>6</sup> Wir wechseln zwischen ko- und kontravarianten Komponenten eines Vektors, indem

<sup>6</sup>Die Matrix  $J^i_j = \partial x^i / \partial x'^j$  ist gerade die Jacobimatrix der Transformation

$$\begin{aligned} x^i : \{x'^j\} &\longrightarrow x^i(x'^1, \dots, x'^n) \\ \text{alt: neu} &\longrightarrow \text{alt(neu)}, \end{aligned} \quad (11.14)$$

wo die alten Koordinaten durch die neuen ausgedrückt werden. Es ist (mit  $(x \rightarrow \xi, x' \rightarrow x)$ )

$$\begin{aligned} G &= J^T J && \text{der metrische Tensor,} && (11.15) \\ A'_i &= J^j_i A_j && \text{die Transformationsregel für kovariante Vektoren,} \\ A'^i &= J'^i_j A^j && \text{die Transformationsregel für kontravariante Vektoren,} \end{aligned}$$

wobei  $J'^i_j = \partial x'^i / \partial x^j$  die Jacobimatrix der Transformation  $x'^i : x^j \rightarrow x'^i(x^j)$  (alt  $\rightarrow$  neu) ist. Mit

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^k} = J'^i_j J^j_k = \delta^i_k \quad (11.16)$$

ist  $J'$  gerade die Inverse von  $J$ .

wir auf die Metrik  $g_{ij}$  zurückgreifen (für krummlinige orthogonale Koordinaten ist  $g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$ )

$$\begin{aligned} a_i &= A^i h_i = \frac{A_i}{h_i} \longrightarrow A_i = h_i^2 A^i = g_{ij} A^j \\ \text{und mit } g^{ij} g_{jk} &= \delta^i_k \longrightarrow A^i = g^{ij} A_j. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Dabei bezeichnet  $g^{ij}$  die Inverse von  $G$ ,  $(G)_{ij} = g_{ij}$ .<sup>7</sup>

Obige Zusammenhänge gelten auch allgemein für nicht-orthogonale Transformationen mit  $g_{ij} \neq h_i^2 \delta_{ij}$ . Beachte auch, dass der metrische Tensor  $g'_{kl}$  zu Recht kovariante Indizes trägt,

$$ds^2 = \eta_{ij} d\xi^i d\xi^j = \underbrace{\eta_{ij} \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^k} \frac{\partial \xi^j}{\partial x'^l}}_{g'_{kl}} dx'^k dx'^l$$

und wir erhalten das Transformationsverhalten

$$\begin{aligned} g'_{kl} &= \eta_{ij} \frac{\partial \xi^i}{\partial x'^k} \frac{\partial \xi^j}{\partial x'^l} = \eta_{ij} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^s} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^r} \frac{\partial x^s}{\partial x'^k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} \\ &= \underbrace{\frac{\partial x^s}{\partial x'^k} \frac{\partial x^r}{\partial x'^l} g_{sr}}_{\text{kovariante Indizes } s, r} \end{aligned} \quad (11.18)$$

Man sagt auch, ' $g_{ij}$  ist ein kovarianter Tensor zweiter Stufe', oder ' $g_{ij}$  ist ein zweifach kovarianter Tensor'.<sup>8</sup> Die Verallgemeinerung zu  $n$ -fach kontra-,  $m$ -fach kovarianten Tensoren

$$T^{i_1, \dots, i_n}{}_{j_1, \dots, j_m} \quad (11.19)$$

(oder Multilinearformen) ist trivial: die Indices  $i_1, \dots, i_n$  transformieren mit  $\partial_{x'^r} x'^{i_l}$  während die Indices  $j_1, \dots, j_m$  mit  $\partial_{x'^j} x^{s_l}$  transformieren,

$$\begin{aligned} T^{i_1, \dots, i_n}{}_{j_1, \dots, j_m}(\vec{x}') &= \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{r_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_n}}{\partial x^{r_n}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial x'^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{s_m}}{\partial x'^{j_m}} \\ &\quad \times T^{r_1, \dots, r_n}{}_{s_1, \dots, s_m}(\vec{x}) [\vec{x}(\vec{x}')]. \end{aligned} \quad (11.20)$$

<sup>7</sup>Beachte:

$$\begin{aligned} g'_{kl} &= (G')_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^l} g_{ij} = J^i{}_k J^j{}_l g_{ij} = (J^T G J)_{kl}, \\ g_{kl} &= (G)_{kl} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^l} \eta_{ij} = J^i{}_k J^j{}_l \delta_{ij} = (J^T J)_{kl}. \end{aligned}$$

<sup>8</sup>Für orthogonale Transformationen finden wir konsistent mit den früheren Resultaten

$$\begin{aligned} \longrightarrow g'_{ij} &= h_i'^2 \delta_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} g_{mn} = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^m}{\partial x'^j} h_m^2 \delta_{mn}, \\ h_i'^2 &= \left( \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \right)^2 h_m^2, \quad \text{vgl. (2.29), (2.32)}. \end{aligned}$$

Ein Skalarfeld  $\Psi$  hat keine Indizes und transformiert gemäss

$$\Psi'(\vec{x}') = \Psi[\vec{x}(\vec{x}')].$$

### 11.2.2 4-er Vektoren, Tensoren in der SRT

In der speziellen Relativitätstheorie arbeiten wir im vier-dimensionalen Minkowski Raum der sich durch die nichttriviale Metrik

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}. \quad (11.21)$$

auszeichnet. Die Koordinatensysteme die wir betrachten sind euklidisch im ‘Raum’; die ‘Zeit’ erscheint als dazu orthogonale vierte Komponente. Transformationen die zwischen diesen Inertialsystemen vermitteln sind die Lorentztransformationen  $\partial_{x^\beta} x'^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta$ . In der speziellen Relativitätstheorie definieren wir kontravariante und kovariante 4-er Vektoren als Objekte, welche unter Wechsel des Inertialsystems transformieren gemäss

$$V^{\alpha'} = \Lambda^\alpha_\beta V^\beta \quad U_{\alpha'} = \Lambda_\alpha^\beta U_\beta, \quad (11.22)$$

wobei  $\Lambda^\alpha_\beta$  die Koordinatentransformation

$$x^{\alpha'} = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta \quad (11.23)$$

zwischen den Inertialsystemen vermittelt. Die Matrix  $\Lambda_\alpha^\beta$  erhält man durch rauf- und runterziehen der Indizes via

$$\Lambda_\alpha^\beta = \eta_{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \Lambda^\gamma_\delta, \quad (11.24)$$

wobei

$$\eta^{\beta\delta} \equiv \eta_{\beta\delta}, \quad \eta^{\beta\delta} \eta_{\alpha\delta} = \delta^\beta_\alpha.$$

Die Matrix  $\Lambda_\alpha^\beta$  ist die Inverse von  $\Lambda^\beta_\alpha$ , denn

$$\begin{aligned} \Lambda_\alpha^\gamma \Lambda^\alpha_\beta &= \eta_{\alpha\delta} \eta^{\gamma\epsilon} \Lambda^\delta_\epsilon \Lambda^\alpha_\beta \\ &= \eta^{\gamma\epsilon} \underbrace{\eta_{\alpha\delta} \Lambda^\delta_\epsilon \Lambda^\alpha_\beta}_{\eta_{\beta\epsilon}} \\ &= \eta_{\beta\epsilon} \eta^{\gamma\epsilon} = \delta^\gamma_\beta. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Beachte, dass  $\Lambda_\alpha^\beta$  nicht die Transponierte von  $\Lambda^\beta_\alpha$  ist.<sup>9</sup> Der Koordinatenvektor  $x = (x^0, x^1, x^2, x^3) \doteq x^\mu$  ist kontravariant, der Gradient  $\partial_\mu = d/dx^\mu$  kovariant. Zu jedem kontra-/kovarianten Vektor lässt sich ein korrespondierender ko-/kontravarianter Vektor definieren,<sup>10</sup>

$$V_\alpha \equiv \eta_{\alpha\beta} V^\beta, \quad U^\alpha = \eta^{\alpha\beta} U_\beta. \quad (11.31)$$

Zwei häufig gebrauchte Beispiele sind

$$\begin{aligned} x^\mu = (ct, \vec{r}) &\longleftrightarrow x_\mu = (-ct, \vec{r}), \\ \partial_\mu = (c^{-1}\partial_t, \vec{\nabla}) &\longleftrightarrow \partial^\mu = \left(-\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla}\right). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Die Verallgemeinerung von 4-er Vektoren zu Multilinearformen (11.19) ist trivial: die kontravarianten Indices transformieren mit  $\Lambda^\alpha_\beta$ , die kovarianten mit der Inversen  $\Lambda_\alpha^\beta$ . Z.B., transformiert der 1-fach kontra-, 2-fach kovariante Tensor  $T^\gamma_{\alpha\beta}$  gemäss

$$T'^\gamma_{\alpha\beta} = \Lambda^\gamma_\delta \Lambda_\alpha^\epsilon \Lambda_\beta^\xi T^\delta_{\epsilon\xi}. \quad (11.33)$$

Es gelten folgende Regeln:

<sup>9</sup>Die Inverse kann auch via (11.9) und Übergang zur Tensorschreibweise hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} A^T g A &= g \quad \Big| \cdot g^T \\ (A^T)^{-1} \cdot \Big| A^T g A g^T &= g g^T = \mathbb{1} \\ g A g^T &= (A^T)^{-1} \end{aligned} \quad (11.26)$$

$$\begin{aligned} ((A^T)^{-1})_{\alpha\beta} &= g_{\alpha\gamma} A_{\gamma\delta} g^{\delta\beta} \\ &= \eta_{\alpha\gamma} \eta_{\beta\delta} \Lambda^\gamma_\delta \\ &= \eta_{\alpha\gamma} \eta^{\beta\delta} \Lambda^\gamma_\delta = \Lambda_\alpha^\beta = (A^{-1})_{\beta\alpha}. \end{aligned} \quad (11.27)$$

Beachte also, dass  $\Lambda^\alpha_\beta = A_{\alpha\beta}$ , aber

$$\Lambda_\alpha^\beta = (A^{-1})_{\beta\alpha}. \quad (11.28)$$

Der Übergang von Matrix- zu Tensorschreibweise ist nicht ganz trivial. Beachte auch, dass die Reduktion von (11.26) auf  $\mathbb{R}^3$  und die Galileigruppe ein altbekanntes Resultat liefert: Mit  $A \rightarrow R$ ,  $g \rightarrow \mathbb{1}$  erhalten wir

$$(R^T)^{-1} = R \rightarrow R^T R = \mathbb{1}. \quad (11.29)$$

<sup>10</sup>Beachte, dass  $V_\alpha$  wirklich kovariant ist, denn

$$\begin{aligned} V'_\alpha = \eta_{\alpha\beta} V'^\beta &= \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\gamma V^\gamma \\ &= \eta_{\alpha\beta} \eta^{\gamma\delta} \Lambda^\beta_\gamma V_\delta \\ &= \Lambda_\alpha^\delta V_\delta. \end{aligned} \quad (11.30)$$

1. Die Linearkombination zweier Tensoren ist ein Tensor, z.B.

$$T^\alpha{}_\beta = aS^\alpha{}_\beta + bR^\alpha{}_\beta, \quad (11.34)$$

wobei  $a, b$  beliebige skalare Grössen sind.

2. Das direkte Produkt zweier Tensoren ist ein Tensor, z.B.

$$A^\alpha{}_\beta B^\gamma = T^\alpha{}_\beta{}^\gamma. \quad (11.35)$$

3. Die Kontraktion zweier Indizes reduziert einen Tensor auf einen Tensor mit um zwei verminderter Stufe, z.B.

$$T^{\alpha\gamma} = T^\alpha{}_\beta{}^{\gamma\beta}. \quad (11.36)$$

4. Die Differentiation eines Tensors ergibt einen Tensor, z.B.

$$T_\alpha{}^{\beta\gamma} = \partial_\alpha T^{\beta\gamma} \quad (11.37)$$

5. Folgende Tensoren werden häufig gebraucht:

der Minkowski Tensor  $\eta_{\alpha\beta}$ ,

der Lévi-Civita Tensor

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \{0123\} \text{ und gerade Permutationen} \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (11.38)$$

der Nulltensor.

Eine *Tensorgleichung* ist forminvariant, d.h. sie hat in jedem Inertialsystem die identische Form. Folglich müssen alle physikalischen Gesetze als *Tensorgleichungen* formuliert werden, damit sie *Lorentzinvariant* sind.

Als Beispiel betrachten wir die Wellengleichung

$$(-c^{-2}\partial_t^2 + \Delta = -\partial_0^2 + \partial_i^2)\psi = 0 \quad (11.39)$$

Sie ist trivial Lorentzinvariant, denn sie lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned} (-\partial_0^2 + \partial_i^2)\psi &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \psi = 0. \end{aligned} \quad (11.40)$$

Die Kontraktion  $\partial_\mu \partial^\mu$  ist ein Lorentzinvarianter Skalar, die Gleichung (11.40) ist daher Lorentzinvariant. Ziel ist es, alle Naturgesetze in tensorielle Form zu bringen, womit sie automatisch Lorentzinvariant sind.

### 11.2.3 Zusammenhang mit linearer Algebra

#### Einleitung

Tensoren sind eine Verallgemeinerung der Vektoren/Matrizen, welche aus der linearen Algebra bekannt sind. Ein Vektor  $v$  ist ein Element eines Vektorraumes  $v \in V \simeq \mathbb{R}^n$ . Aus der linearen Algebra kennen wir zwei Typen von Matrizen. Zum einen verwendet man Matrizen  $A$  für lineare Abbildungen  $w = Av$ , mit  $v$  und  $w$  Vektoren, zum anderen tauchen Matrizen  $Q$  bei quadratischen Formen (Skalarprodukt)  $Q(v) = v^T Q v$  auf. Die zwei Typen von Matrizen sind verschiedene Objekte ( $A$  bildet einen Vektor auf einen Vektor ab,  $Q$  bildet einen Vektor auf einen Skalar ab) wie man im Tensorformalismus sehr schön sieht;  $w^l = A^l_k v^k$  und  $Q(v) = v^k Q_{kl} v^l$  (wir verwenden die Einsteinsche Summenkonvention).

#### Dualraum

Weiterhin braucht man den Begriff des Dualraums  $V^*$ . In endlichen Dimensionen ist der Dualraum (fast) dasselbe wie der wirkliche Raum  $V^* \simeq V$ . Der Dualraum  $V^*$  von  $V$  ist der Raum aller linearen Abbildungen von  $V \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine Basis  $e_k$  in  $V$  induziert über die Beziehung

$$\epsilon^l(e_k) = \delta_k^l = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (11.41)$$

eine Basis  $\epsilon^l$  in  $V^*$ , und umgekehrt. Ist ein Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  auf dem Raum  $V$  definiert, so kann man mit  $v^*(w) = (v, w) \quad \forall w \in V$  jedem Vektor  $v$  einen Dualvektor  $v^*$  zuordnen, und umgekehrt. In einer Basis ausgeschrieben gilt  $g_{kl} = (e_k, e_l)$ ,  $v = v^k e_k$ ,  $v^* = g_{kl} v^k \epsilon^l$ . Mit  $v_k$  wollen wir die Komponenten des dualen Vektors bezeichnen,  $v^* = v_k \epsilon^k$ . Wir sehen, dass  $v_k = g_{lk} v^l = g_{kl} v^l$ , dies wird im Tensorformalismus hoch-/runterziehen von Indizes genannt.

#### Tensoren

Tensoren  $T$  erweitern den Begriff des Skalars/Vektors/Dualvektors/Matrix ... Mathematisch kann man beliebige Räume miteinander tensorieren. In der Physik ist es nur von Interesse Vektorräume  $V$  mit ihren Dualräumen  $V^*$  zu tensorieren, d.h.,

$$T \in \mathcal{T} = (V^*)^{\otimes r} \otimes V^{\otimes s} = \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \dots}_{r \text{ mal}} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \dots}_{s \text{ mal}} \quad (11.42)$$

ist ein Tensor der Stufe  $(r, s)$ , d.h. ein  $r$ -fach kovarianter,  $s$ -fach kontravarianter Tensor. Der Tensorraum  $\mathcal{T}$  ist ein Vektorraum mit der Basis  $e^{k_1, \dots, k_r}_{l_1, \dots, l_s}$

$= \epsilon^{k_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{k_r} \otimes e_{l_1} \otimes \dots \otimes e_{l_s}$ ,  $\dim \mathcal{T} = n^{r+s}$ . In dieser (kanonischen Basis) kann  $T$  geschrieben werden als  $T = T_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s} \epsilon^{k_1, \dots, k_r} e_{l_1, \dots, l_s}$

### Basiswechsel

Wir untersuchen nur Koordinatentransformationen  $e \xrightarrow{S} e'$ ,  $S$  invertierbar. Die Transformationsmatrix  $S^k_l = (S)_{kl}$  wird definiert durch  $e_k = S^l_k e'_l$ ; die Komponenten eines Vektors werden daher transformiert wie  $v'^k = S^k_l v^l$ , denn  $v = v^k e_k \stackrel{!}{=} v'^k e'_k$ . *Vorsicht*:  $S$  ist eine Transformationsmatrix und kein Tensor, denn die Transformationsmatrizen haben kein entsprechendes Transformationsverhalten unter Basistransformation. Das Transformationsverhalten der Dualbasis ist gegeben durch  $\epsilon'^k = S^k_l \epsilon^l$ , denn damit bleibt die Definitionsgleichung Gl. (11.41) invariant:

$$\begin{aligned} \epsilon'^l(e'_k) &= S^l_m \epsilon^m(e'_k) = S^l_m (S^{-1})^n_k \epsilon^m(e_n) \\ &= S^l_n (S^{-1})^n_k = \delta_k^l = \epsilon^l(e_k). \end{aligned} \quad (11.43)$$

Die Koordinaten des dualen Vektors transformieren sich demnach wie  $v_k = S^l_k v'_l$ . Die Notation wird vereinfacht, wenn man ein neues Symbol für die Komponenten der inversen Transformationsmatrix einführt. (*Vorsicht*: dies hat nichts mit dem hoch-/runterziehen von Tensorindizes zu tun):

$$S^k_l = (S)_{kl} \quad S^l_k = (S^T)_{kl} \quad (11.44)$$

$$S_l^k = (S^{-1})_{kl} \quad S_k^l = (S^{-T})_{kl}, \quad (11.45)$$

dann werden die Transformationsverhalten der Komponenten von Dualvektoren und Vektoren einfach zu:  $v'^k = S^k_l v^l$  und  $v'_k = S_k^l v_l$ .

### Koordinatentransformation von Tensoren

Die Komponenten eines  $(r,s)$ -Tensor  $T_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s}$  zeigen folgendes Transformationsverhalten. Die ersten  $r$  Indizes transformieren wie duale Vektoren (kovariant), die restlichen  $s$  Indizes wie Vektoren (kontravariant), d.h.

$$T'_{k_1, \dots, k_r}^{l_1, \dots, l_s} = S_{k_1}^{m_1} \dots S_{k_r}^{m_r} S^{l_1}_{n_1} \dots S^{l_s}_{n_s} T_{m_1, \dots, m_r}^{n_1, \dots, n_s}. \quad (11.46)$$

### Operationen mit Tensoren

**Äusseres Produkt:** Gegeben der  $(r_1, s_1)$ -Tensor  $T^{(1)}$  und der  $(r_2, s_2)$ -Tensor  $T^{(2)}$ , dann erhält man einen  $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ -Tensor durch

$$T_{k_1, \dots, k_{r_1+r_2}}^{l_1, \dots, l_{s_1+s_2}} = T_{k_1, \dots, k_{r_1}}^{(1) \quad l_1, \dots, l_{s_1}} T_{k_{r_1+1}, \dots, k_{r_1+r_2}}^{(2) \quad l_{s_1+1}, \dots, l_{s_1+s_2}} \quad (11.47)$$

**Inneres Produkt:** Gegeben der  $(r, s)$ -Tensor  $T^{(1)}$ , dann erhält man einen  $(r - 1, s - 1)$ -Tensor  $T$  durch

$$T_{k_1, \dots, k_{r-1}}^{l_1, \dots, l_{s-1}} = T_{k_1, \dots, m, \dots, k_{r-1}}^{(1) l_1, \dots, m, \dots, l_{s-1}} \quad (11.48)$$

### Beispiele

- Der Kronecker-Tensor  $\delta_k^l$ , vgl. Gl. (11.41), sieht wegen Gl. (11.43) in jedem Bezugssystem gleich aus:  $\delta_k^l = S_k^m S_n^l \delta_m^n = S_k^m S_m^l = \delta_k^l$ .
- Der vollständig antisymmetrische (Levi-Civita) Tensor  $\varepsilon_{k,l,m}$  in  $\mathbb{R}^3$  sieht auch in jedem Bezugssystem (ausgenommen gespiegelte Systeme) gleich aus.
- Eine lineare Abbildung  $A$ , vgl. Einleitung, bildet Vektoren auf Vektoren ab, d.h., es ist ein  $(1,1)$ -Tensor. Die Komponenten der linearen Abbildung  $A^k_l$  (Matrix) transformieren sich folgendermassen:

$$A'^k_l = S^k_m S_l^n A^m_n, \quad (11.49)$$

oder in Matrixschreibweise, vgl. Gl. (11.44),  $A' = SAS^{-1}$ .

- Im Unterschied dazu transformiert eine quadratische Form  $Q(v) = Q_{kl}v^k v^l$  wie

$$Q'_{kl} = S_k^m S_l^n Q_{mn}, \quad (11.50)$$

in Matrixschreibweise  $Q' = S^{-T}QS^{-1} = \tilde{S}^T Q \tilde{S}$ ,  $\tilde{S} = S^{-1}$ . Die Transformationsverhalten von linearen Abbildungen  $A$  und quadratischen Formen  $Q$  ist daher unterschiedlich, ausser für orthogonale Transformationen  $S = O$ . Bei linearen Abbildungen weiss man, dass man immer ein Bezugssystem finden kann, in dem die Matrix diagonal wird (für komplexe Transformationen). Bei quadratischen Formen kann man sogar ein orthonormiertes Bezugssystem (orthogonale Transformationsmatrix) finden, in der die Matrix der quadratischen Form diagonal ist. Lässt man allgemeine Transformationen zu, kann man die Matrix der quadratischen Form immer auf die Normalform

$$Q = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

bringen. Man kann daher zwei quadratische Formen (potentielle und kinetische Energie eines harmonischen Systems), wovon eine (kinetische Energie) positiv definit ist, immer gleichzeitig diagonalisieren (Eigenmoden).

### 11.3 Die Lorentzgruppe

Wir definieren die Lorentzgruppe  $\mathcal{L}$  als Menge der  $4 \times 4$  Matrizen  $A$  oder  $\Lambda$  mit

$$\begin{aligned} A^T g A &= g, \\ \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta &= \eta_{\gamma\delta}, \end{aligned} \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix}. \quad (11.51)$$

Transformationen aus  $\mathcal{L}$  lassen Winkel und Längen im  $\mathbb{M}^4$  invariant,

$$\langle \Lambda x, \Lambda y \rangle_M = \langle x, y \rangle_M \quad (11.52)$$

für alle  $x, y \in \mathbb{M}^4$ . Die Matrizen  $\Lambda$  erfüllen die Gesetze der Assoziativität, Existenz der Identität und der Inversen und bilden damit eine Gruppe. Die Gruppe zerfällt in 4 Klassen,

|                            | det | $\Lambda^0_0$ |                                |
|----------------------------|-----|---------------|--------------------------------|
| $\mathcal{L}_+^\uparrow$   | 1   | $> 1$         | eigentlich, orthochron         |
| $\mathcal{L}_+^\downarrow$ | 1   | $< -1$        | eigentlich, nicht-orthochron   |
| $\mathcal{L}_-^\uparrow$   | -1  | $> 1$         | uneigentlich, orthochron       |
| $\mathcal{L}_-^\downarrow$ | -1  | $< -1$        | uneigentlich, nicht-orthochron |

wobei zur Klassifizierung die beiden Bedingungen

1.  $\det(A^T g A) = (\det A)^2 \det g = \det g$  und somit

$$\det A = \pm 1, \quad (11.53)$$

2.  $(A^T g A)_{00} = -A_{00}^2 + \sum_j (A_{j0})^2 = g_{00} = -1$ , folglich ist

$$A_{00}^2 = 1 + \sum_j (A_{j0})^2 \geq 1, \quad (11.54)$$

herangezogen werden. Von diesen Klassen lassen sich nur  $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$  stetig auf  $\mathbb{1}$  deformieren; die anderen Klassen erhält man aus  $\mathcal{L}_+^\uparrow$  durch die Kombination mit den Transformationen *Parität*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -\mathbb{1}_3 \end{pmatrix},$$

und *Zeitumkehr*

$$T = \begin{pmatrix} -1 & \\ & \mathbb{1}_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_-^\uparrow = P\mathcal{L}_+^\uparrow, \quad \mathcal{L}_-^\downarrow = T\mathcal{L}_+^\uparrow, \quad \mathcal{L}_+^\downarrow = PT\mathcal{L}_+^\uparrow. \quad (11.55)$$

Es genügt somit  $\mathcal{L}_+^\dagger$  zu studieren.

Wir suchen *infinitesimale Erzeugende*<sup>11</sup>  $\lambda$ ,

$$A = e^{-\theta\lambda}, \quad (11.59)$$

welche folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} A^T g A &= g \\ \xrightarrow{\theta \text{ klein}} (1 - \theta\lambda^T)g(1 - \theta\lambda) &= g \\ \Rightarrow \lambda^T g + g\lambda &= 0, \end{aligned} \quad (11.60)$$

oder ausgeschrieben,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{00} & \lambda_{10} & \lambda_{20} & \lambda_{30} \\ \lambda_{01} & \lambda_{11} & \lambda_{21} & \lambda_{31} \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{32} \\ \lambda_{03} & \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda_{00} & \lambda_{01} & \lambda_{02} & \lambda_{03} \\ \lambda_{10} & -\lambda_{11} & -\lambda_{12} & -\lambda_{13} \\ \lambda_{20} & -\lambda_{21} & -\lambda_{22} & -\lambda_{23} \\ \lambda_{30} & -\lambda_{31} & -\lambda_{32} & -\lambda_{33} \end{pmatrix}.$$

Wir finden, dass die Diagonalelemente verschwinden,  $\lambda_{\mu\mu} = 0$ , und es verbleiben 6 Freiheitsgrade, welche 3 symmetrische

$$\begin{aligned} \omega_{10} = \omega_{01} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{20} = \omega_{02} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{30} = \omega_{03} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (11.61)$$

<sup>11</sup>Betrachte eine Drehung im Raum um die Achse  $\hat{\omega} [= (0, 0, 1)]$  und dem kleinen Winkel  $\delta\theta$ ,

$$\vec{x}' = \vec{x} + \delta\theta \hat{\omega} \times \vec{x}. \quad (11.56)$$

In Matrixschreibweise ( $\hat{\omega} \times \rightarrow \hat{\omega}_{12}$ ) erhalten wir den Ausdruck

$$\vec{x}' = \vec{x} - \delta\theta \hat{\omega}_{12} \vec{x}, \quad (11.57)$$

oder äquivalent  $\delta\vec{x} = -\delta\theta \hat{\omega}_{12} \vec{x}$ . Die Differentialgleichung der Form  $\partial_\theta x/x = -\omega_{12}$  hat die Lösung  $\ln x = -\omega_{12}\theta + \text{const.}$ , woraus sich via Analogie für die Drehung um den (grossen) Winkel  $\theta$  der Ausdruck

$$R_z(\theta) = e^{-\omega_{12}\theta} \quad (11.58)$$

ergibt.

und 3 antisymmetrische

$$\begin{aligned}\omega_{12} = -\omega_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{23} = -\omega_{32} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega_{31} = -\omega_{13} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

Generatoren erzeugen. Kompakt können wir diese schreiben als

$$(\omega_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\epsilon^{\lambda\sigma\alpha}{}_\beta \quad (11.62)$$

mit  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  total antisymmetrisch und  $\epsilon_{0123} = 1$ .

Die allgemeinste Lorentztransformation aus  $\mathcal{L}_+^\dagger$  ergibt sich dann mit  $\epsilon \equiv (\xi_i, \theta_j)$ ,  $\lambda = (\omega_{\alpha\beta})$  aus

$$A \approx \mathbb{1} - \xi_i \omega_{i0} - \frac{1}{2} \theta_i \epsilon_{ijk} \omega_{jk} \quad (11.63)$$

und anschließender Exponenzierung,

$$A = \exp(-\xi_i \omega_{i0} - \frac{1}{2} \theta_i \epsilon_{ijk} \omega_{jk}).$$

*Rotationen* werden durch die anti-symmetrischen Erzeuger  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  parametrisiert durch  $\theta_j$  generiert, z.B., erhält man die Rotation um die  $z$ -Achse aus  $\vec{\xi} = 0$ ,  $\vec{\theta} = (0, 0, \theta)$ ; mit

$$\omega_{12}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ergibt die Exponenzierung

$$\begin{aligned}R_z(\theta) &= \exp[-(\theta/2)(\omega_{12} - \omega_{21})] = \exp(-\theta\omega_{12}) \\ &= \mathbb{1}_4 - \theta\omega_{12} + \frac{1}{2!}\theta^2\omega_{12}^2 + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (11.64)$$

*Boosts* werden durch die Parameter  $\xi_i$  erzeugt, z.B. finden wir die Boosts entlang der  $x$ -Achse aus  $\vec{\xi} = (\xi, 0, 0)$ ,  $\theta = 0$  mit

$$\begin{aligned}\omega_{10}^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ L_x(\xi) &= \exp(-\xi\omega_{10}) = \mathbb{1}_4 - \xi\omega_{10} + \frac{\xi^2}{2!}\omega_{10}^2 + \dots \\ L_x(\xi) &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11.65)$$

Mit der *Reparametrisierung* (benutze, dass  $\cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi = 1$ )

$$\begin{aligned}\tanh \xi &= v/c, & \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, & \beta &= v/c, \\ \sinh \xi &= \gamma\beta, \\ \cosh \xi &= \gamma, \end{aligned} \quad (11.66)$$

erhalten wir

$$L_x(v) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oder ausgeschrieben gemäss (11.62),

$$\begin{aligned}x'^0 &= \gamma x^0 - \gamma\beta x^1, \\ x'^1 &= -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1, \\ x'^2 &= x^2, \\ x'^3 &= x^3. \end{aligned} \quad (11.67)$$

Im Limes  $v/c \rightarrow 0$  erhalten wir  $\gamma \approx 1$ ,  $\gamma\beta = v/c$ ,

$$\begin{aligned}t' &= t, \\ x'^1 &= x^1 - vt, \end{aligned} \quad (11.68)$$

die Galilei-Transformation von  $(t, \vec{r})$  nach  $(t', \vec{r}')$ , wobei  $(t', \vec{r}')$  bezüglich  $(t, \vec{r})$  mit Geschwindigkeit  $v$  entlang der positiven  $x$ -Achse fliegt. Dies gibt uns die Interpretation des Parameters  $v$  als Relativgeschwindigkeit zwischen den Inertialsystemen. Die allgemeinste Rotationsmatrix findet man in den

Mechanikbüchern<sup>12</sup> Der allgemeinste Boost hat die Form

$$L(\vec{\beta}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & \frac{1+(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_2 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{1+(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_3 & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & \frac{1+(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt die Transformation

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}), \\ \vec{x}' &= \vec{x} + \frac{(\gamma-1)}{\beta^2}(\vec{\beta} \cdot \vec{x})\vec{\beta} - \gamma x^0 \vec{\beta}. \end{aligned} \quad (11.69)$$

Schliesslich zitieren wir noch die Kommutationsregeln für die infinitesimalen Erzeugenden der Lorentzgruppe, mit  $[A, B] = AB - BA$  und

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= S_3, & \omega_{10} &= K_1, \\ \omega_{23} &= S_1, & \omega_{20} &= K_2, \\ \omega_{31} &= S_2, & \omega_{30} &= K_3, \end{aligned}$$

wobei die  $S_i$  Rotationen und die  $K_i$  Boosts sind, findet man

$$\begin{aligned} [S_i, S_j] &= \epsilon_{ijk} S_k, \\ [S_i, K_j] &= \epsilon_{ijk} K_k, \\ [K_i, K_j] &= -\epsilon_{ijk} S_k. \end{aligned} \quad (11.70)$$

Durch Einsetzen der Lorentztransformationen (11.67) oder (11.69) in die Wellengleichung (11.3) lässt sich deren Lorentzinvarianz zeigen. Wir umgehen diese Rechnung indem wir zur Formulierung der Naturgesetze durch Tensorgleichungen übergehen.

## 11.4 Eigenzeit und Lichtkegel

Der Übergang zum Minkowski-Einstein-Weltbild verwischt die Eindeutigkeit der Zeit — die Zeit wird eine relative Grösse, abhängig vom System, in dem sich der Beobachter bewegt. Allerdings bleibt eine Zeit ausgezeichnet: Die im Ruhesystem des Beobachters (Zeitmessers) verstrichene Zeit

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 - d\vec{r}^2 \\ &= -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \quad (11.71)$$

<sup>12</sup>Z.B. im Buch von Goldstein, Seite 121: Die Drehung wird durch Eulerwinkel  $\phi, \theta, \psi$  definiert, wobei sich die allgemeinste Drehung als Produkt von Drehungen um  $z$  (mit  $\phi$ ), dann um  $x$  (mit  $\theta$ ), dann nochmals um  $z$  (mit  $\psi$ ). Vorsicht, es sind verschiedene Definitionen anzutreffen.

ist Lorentzinvariant, denn

$$\begin{aligned} c^2 d\tau'^2 &= -\eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} & (11.72) \\ \text{mit (11.7)} &= -\eta_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} \\ \text{mit (11.9)} &= -\eta_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = c^2 d\tau^2. \end{aligned}$$

Dass  $d\tau$  gerade die Zeit im Ruhesystem ist, versteht man einfach, gilt doch im Ruhesystem, dass  $dx^i = 0$  (keine Bewegung) und daher

$$d\tau^2 = dt^2 \Big|_{\text{Ruhesystem}} = \text{Eigenzeit}^2$$

die Eigenzeit darstellt. Fliegt also ein Kollege mit seiner Uhr an mir vorbei, so läuft seine Uhr langsamer im Vergleich zur eigenen (Zeitdilatation):

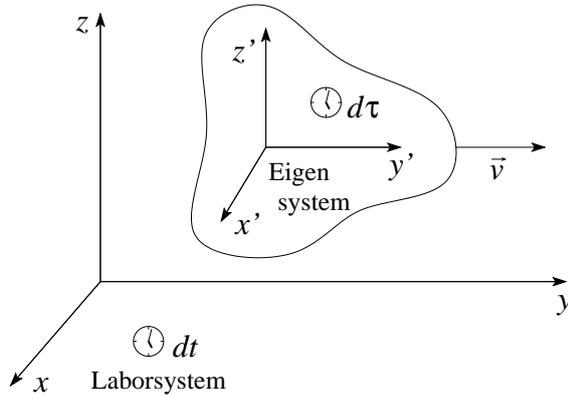


Abb. 11.2: Zur Eigenzeit: Die Zeit vergeht langsamer für eine bewegte Uhr.

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= c^2 dt^2 - dy^2 \\ &= c^2 dt^2 - v^2 dt^2 \\ &= c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dt^2 \\ \Rightarrow dt &= \frac{d\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \stackrel{(11.66)}{=} \gamma d\tau > d\tau. \end{aligned} \quad (11.73)$$

Die eigene Zeit ist also immer die schnellste, insbesondere lebt ein Teilchen in seiner Eigenzeit, für ein geladenes Pion sind dies  $\tau_0 \approx 2.56 \cdot 10^{-8}$  s. Gemäss Galilei-Newton-Weltbild würde es somit höchstens  $c\tau_0 \approx 3 \cdot 10^8 \cdot 2.56 \cdot 10^{-8}$  m  $\approx 7.7$  m weit fliegen. Bei einer Energie von 200 GeV wird die Lebenszeit im Labor um einen Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{E}{mc^2} \approx 1400$$

verlängert und das Teilchen fliegt etwa  $v\gamma\tau_0 \approx c\gamma\tau_0 \approx 11$  km weit.

Ein anderes beliebtes Beispiel ist der Kollege der auf die Reise geschickt wird und erst nach der Zeit

$$t = \int_0^{\text{seine Reisezeit}} \gamma d\tau \gg \text{unsere Lebenszeit} \quad (11.74)$$

zurückkehrt. Daraus lassen sich hübsche Scheinparadoxa konstruieren. Das Problem liegt oft beim Zurückkehren, ein unmögliches Unterfangen in gegenseitigen Inertialsystemen, man braucht dazu zumindest das Gravitationsfeld eines Planeten.

Ein weiteres neuartiges Konzept ist der *Lichtkegel*, vgl. Abb. 11.3. Mit der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit lassen sich zwei Ereignisse  $x_1$  und  $x_2$  nur dann kausal verbinden, wenn  $(\Delta t = t_2 - t_1, \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$

$$c^2 (\Delta t)^2 - |\Delta \vec{r}|^2 \geq 0 \quad (11.75)$$

ist. Ansonsten kann kein Signal  $x_1$  und  $x_2$  verbinden. Die Bedingung (11.75) definiert dann den *Lichtkegel*, denjenigen Ausschnitt der Raum-Zeit, welcher von einem Punkt aus erreicht werden kann (auch Vorwärtslichtkegel genannt). Ebenso lässt sich in der Vergangenheit eine Zone definieren, welche

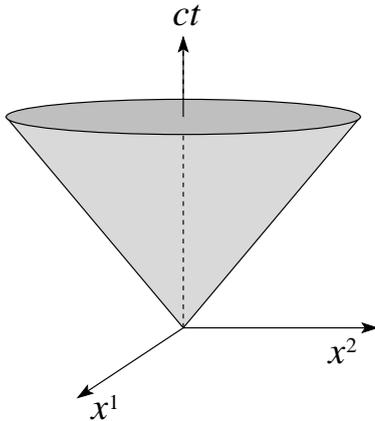


Abb. 11.3: Lichtkegel, gezeichnet für zwei Raum Dimensionen: In der Zeit  $t$  können sich Lichtstrahlen nur bis zum Radius  $ct$  ausbreiten. Punkte innerhalb des Kegels können in einem Kausalzusammenhang zu dem Ereignis bei  $(0,0)$  stehen, nicht jedoch solche ausserhalb.

ein Ereignis beeinflussen kann. Damit teilt sich die Raum-Zeit in die Gebiete gemäss Abb. 11.4 auf. Man nennt 2 Ereignisse *zeitlich separiert*, falls

$$\Delta s_{12}^2 = -\eta_{\mu\nu} \Delta x_{12}^\mu \Delta x_{12}^\nu > 0 \quad (11.76)$$

und *örtlich separiert*, falls

$$\Delta s_{12}^2 < 0. \quad (11.77)$$

Für zeitlich separierte Ereignisse lässt sich eine Lorentztransformation finden, so dass  $|\Delta \vec{r}_{12}| = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = 0$  und  $\Delta s_{12}^2 = c^2 \Delta t_{12}^2$  ist. Ebenso gilt für örtlich separierte Ereignisse, dass die Distanz auf  $\Delta s_{12}^2 = -|\Delta \vec{r}_{12}|^2$  reduziert werden kann, indem auf ein entsprechend geeignetes Inertialsystem

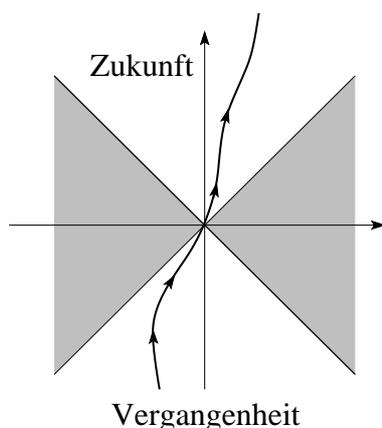


Abb. 11.4: Aufteilung der Raumzeit in Vergangenheit, Zukunft (mit  $ds^2 > 0$ ), Lichtkegel (mit  $ds^2 = 0$ ) und akausale Regionen ausserhalb des Lichtkegels (mit  $ds^2 < 0$ ). Ein materiebefahenes Objekt kann sich nur innerhalb des Lichtkegels auf einer Weltlinie bewegen.

transformiert wird. Ist  $\Delta s_{12}^2 = 0$  so sind die Ereignisse *lichtartig separiert* und eine Kommunikation ist auf Lichtsignale eingeschränkt. Beachte, dass diese Klassifizierung von Ereignisspaaren Lorentzinvariant ist,  $\Delta s_{12}^2$  ist eine Invariante.

## 11.5 Dopplereffekt

Betrachte eine Lichtquelle, welche Strahlung der Frequenz  $\nu_q = 1/T_q$  aussendet,  $T_q$  die Periode in der Eigenzeit der Quelle. Die Quelle bewege sich relativ zum Beobachter mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$ . Wir berechnen die Frequenz  $\nu$  der beobachteten Strahlung:

1. Im System des Beobachters verstreicht zwischen der Aussendung zweier Maxima die Zeit  $T' = \gamma T_q$ , siehe (11.73).
2. Während dieser Zeit hat sich die Quelle relativ zum Beobachter um die Distanz  $\vec{v} \cdot \hat{r} T'$  verschoben.

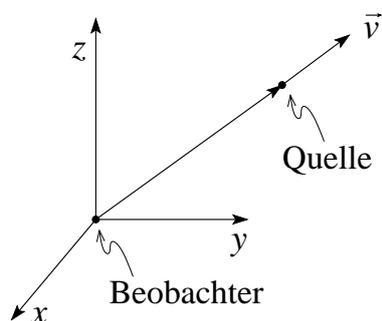


Abb. 11.5: Dopplereffekt: Die Quelle entfernt sich in radialer Richtung mit der Geschwindigkeit  $\vec{v} \cdot \hat{r}$

Aufeinander folgende Wellenmaxima kommen dann mit der Periode

$$T = \left(1 + \frac{\vec{v} \cdot \hat{r}}{c}\right) T' = \left(1 + \vec{\beta} \cdot \hat{r}\right) \gamma T_q$$

an. Damit erhalten wir die Frequenz im System des Beobachters als

$$\nu = \nu_q \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \vec{\beta} \cdot \hat{r}}. \quad (11.78)$$

Die *Zeitdilatation* produziert immer eine (relativistische) Rotverschiebung via dem Faktor  $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$ . Der *kinematische Faktor*  $(1 + \vec{\beta} \cdot \hat{r})^{-1}$  erzeugt eine zusätzliche Rotverschiebung, wenn sich die Quelle entfernt. Stürzt die Quelle direkt auf den Beobachter zu, so ergibt sich eine netto Blauverschiebung,

$$\nu = \nu_q \sqrt{\frac{1 + v/c}{1 - v/c}} > \nu_q.$$

## 11.6 Addition von Geschwindigkeiten

Betrachte ein Teilchen, welches sich im System  $x'$  mit Geschwindigkeit  $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$  bewegt. Welches ist seine Geschwindigkeit  $d\vec{r}/dt = \vec{u}$  im System  $x$ , welches sich bezüglich  $x'$  mit Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, vgl. Abb. 11.6? Wir konstruieren aus  $\vec{u} = d\vec{r}/dt$  den 4-er Vektor

$$U = \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right). \quad (11.79)$$

Mit dem 4-er Vektor  $dx^\mu = (c dt, d\vec{r})$  und der Lorentzinvarianten Eigenzeit

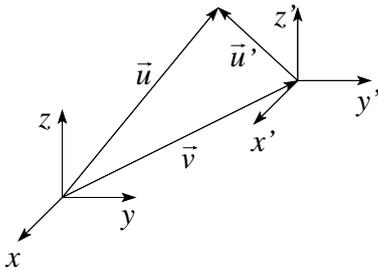


Abb. 11.6: Koordinatensysteme zum Problem der relativistischen Geschwindigkeitsaddition.

$d\tau$  des Teilchens ist  $U$  eine 4-er Geschwindigkeit und transformiert gemäss (11.22) kontravariant. Die Transformation (11.69) schreiben wir um zu

$$\begin{aligned} V^{0'} &= \gamma(V^0 - \vec{\beta} \cdot \vec{V}), \\ V_{\parallel}' &= (\vec{\beta}/\beta)\vec{V}' = \gamma(V_{\parallel} - \beta V^0), \\ \vec{V}_{\perp}' &= -\vec{\beta} \times (\vec{\beta} \times \vec{V}') \\ &= \vec{V}_{\perp}, \end{aligned} \quad (11.80)$$

vgl. (11.67), und die inverse Transformation ergibt sich aus  $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ ,  $V \rightarrow V'$ ,  $V' \rightarrow V$  zu

$$\begin{aligned} V^0 &= \gamma(V^{0'} + \vec{\beta} \cdot \vec{V}'), \\ V_{\parallel} &= \gamma(V'_{\parallel} + \beta V^{0'}), \\ \vec{V}_{\perp} &= \vec{V}'_{\perp}. \end{aligned} \quad (11.81)$$

Mit (11.81) erhalten wir  $U$  aus  $U' = (c\partial_{\tau}t', \partial_{\tau}\vec{r}')$ ,

$$\begin{aligned} U^0 &= \gamma_v(U^{0'} + \vec{\beta} \cdot \vec{U}'), \\ U_{\parallel} &= \gamma_v(U'_{\parallel} + \beta U^{0'}), \\ \vec{U}_{\perp} &= \vec{U}'_{\perp}. \end{aligned}$$

Schliesslich gehen wir zu den Geschwindigkeiten zurück,

$$\begin{aligned} \vec{u}' &= \frac{d\vec{r}'}{dt'} = \frac{d\vec{r}'}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt'} = \vec{U}' \frac{1}{\gamma_{u'}}, & \vec{u} &= \frac{\vec{U}}{\gamma_u}, \\ U^{0'} &= c \frac{dt'}{d\tau} = c\gamma_{u'}, & U^0 &= c\gamma_u; \\ \Rightarrow c\gamma_u &= \gamma_v(c\gamma_{u'} + \vec{\beta} \cdot \vec{u}'\gamma_{u'}) & \Rightarrow \frac{\gamma_{u'}}{\gamma_u} &= \frac{1}{\gamma_v(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{u}'/c)}, \\ \gamma_u u_{\parallel} &= \gamma_v(\gamma_{u'} u'_{\parallel} + \beta c\gamma_{u'}), \\ \gamma_u \vec{u}_{\perp} &= \gamma_{u'} \vec{u}'_{\perp}, \end{aligned} \quad (11.82)$$

und wir erhalten die Regel zur Addition von Geschwindigkeiten,

$$\begin{aligned} u_{\parallel} &= \frac{u'_{\parallel} + v}{1 + \vec{\beta} \cdot \vec{u}'/c}, \\ \vec{u}_{\perp} &= \frac{\vec{u}'_{\perp}}{\gamma_v(1 + \vec{\beta} \cdot \vec{u}'/c)}. \end{aligned} \quad (11.83)$$

Für  $\vec{v} \rightarrow 0$  erhalten wir das Galileireultat

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}, \quad \vec{v} \rightarrow 0 \quad (11.84)$$

zurück. Für parallele Geschwindigkeiten reduziert sich (11.83) zu

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2} \quad (11.85)$$

und mit  $u' \rightarrow c$  geht auch  $u \rightarrow (c + v)/(1 + v/c) = c$ . Daraus folgt das Einstein'sche Postulat, dass die Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Quelle unabhängig ist, d.h. dass Licht in jedem System mit der universellen Geschwindigkeit  $c$  propagiert.

Aus der obigen Rechnung haben wir zwei Tatsachen lernen können:

1. *Technisch:* Man manipuliert Grössen, welche nicht tensoriellen Charakter haben, indem man diese Grössen via Tensoren ausdrückt und selbige gemäss den Tensortransformationsregeln manipuliert.
2. *Physikalisch:*
  - (a) Die relativistische Addition der Geschwindigkeit garantiert, dass keine Geschwindigkeiten grösser  $c$  auftreten können.
  - (b) Das Licht propagiert in jedem System mit der universellen Geschwindigkeit  $c$  (unabhängig von der Bewegung der Quelle).

## 11.7 Relativistische Mechanik

Wir wollen Newtons Mechanik so verallgemeinern, dass ihre Gesetze Lorentzinvariant sind und sich ins Einstein-Minkowski-Weltbild einfügen. Wir brauchen den Standardtrick: Für kleine Geschwindigkeiten ( $\vec{v} \rightarrow 0$ ) gilt das Newton Gesetz

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (11.86)$$

Ziel ist, dieses Gesetz tensoriell zu schreiben, so dass sich sein Limes  $v \rightarrow 0$  auf das Newton Gesetz reduziert. Wir schreiben die rechte Seite von (11.86) als 4-er Vektor  $m d^2 x^\alpha / d\tau^2$ . In der Tensorgleichung (diese ergibt eine manifest kovariante Mechanik)

$$f^\alpha = m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} \quad (11.87)$$

müssen wir den relativistischen Ausdruck für die Kraft  $f^\alpha$  finden. Im (momentanen) Ruhesystem des Teilchens ist  $d^2 x^0 / d\tau^2 = 0$  und  $\vec{f} = \vec{F} =$  Newtonsche Kraft; für  $\vec{v} = 0$  reduziert sich (11.87) auf (11.86). Zweitens soll sich  $f^\alpha$  transformieren wie ein kontravarianter Vektor, vgl. Abb. 11.7

$$f^\alpha = \Lambda^\alpha_{\beta(-\vec{v})} F^\beta \quad (11.88)$$

$$F^\beta = (F^0, \vec{F}) \quad \text{mit} \quad F^0 = m \frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0,$$

wobei  $\vec{v}$  gerade die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Der Lorentzboost  $\Lambda^\alpha_{\beta(-\vec{v})}$  transformiert die Kraft  $\vec{F}$  zurück ins Laborsystem, so dass  $f^\alpha$  ein kontravarianter 4-er Vektor wird (gemäss Definition (11.88)). Damit erhalten wir die relativistische Kraft (benutze (11.69))

$$\begin{aligned} f^0 &= \gamma \vec{\beta} \cdot \vec{F}, \\ \vec{f} &= \vec{F} + (\gamma - 1) \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{F}}{\beta^2} \vec{\beta}. \end{aligned} \quad (11.89)$$

Mit (11.87) und (11.89) können wir  $x(\tau)$  berechnen und durch Eliminati-

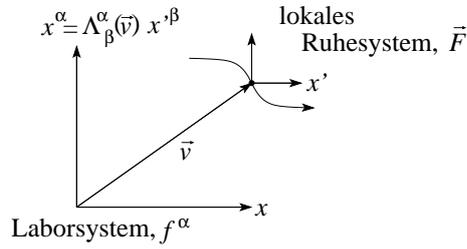


Abb. 11.7: Der Lorentzboost  $\Lambda(-\vec{v})$  transformiert die Kraft  $\vec{F}$  im lokalen Ruhesystem zurück ins Laborsystem.

on von  $\tau$  via  $t(\tau) = x_0(\tau)/c$  erhalten wir die Bahn  $\vec{r}(t)$  im Laborsystem. Beachte, dass wir für die Integration von (11.87) die Anfangsbedingungen  $x^\alpha(\tau = \tau_0)$  und  $dx^\alpha/d\tau(\tau = \tau_0)$  brauchen, wobei die Bedingung

$$\begin{aligned} c^2 d\tau^2 &= -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \\ \rightarrow c^2 &= -\eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}, \end{aligned} \quad (11.90)$$

erfüllt sein muss. Die Bedingung (11.90) ist immer erfüllt, denn

$$\frac{d}{d\tau} c^2 = -\frac{d}{d\tau} \eta_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}$$

ergibt

$$0 = -2\eta_{\alpha\beta} f^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (11.91)$$

Dieser Ausdruck ist ein Lorentzskalar, verschwindet im Ruhesystem und ist somit gleich 0 in jedem Inertialsystem.

Als nächstes wollen wir die *erhaltenen Grössen* der Energie  $E$  und des Impulses  $\vec{p}$  finden. Wir haben bereits bemerkt, dass  $U = (c dt/d\tau, d\vec{r}/d\tau)$  ein 4-er Geschwindigkeitsvektor ist. Entsprechend definieren wir den 4-er Impuls

$$p^\alpha = mU^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (11.92)$$

Wir identifizieren  $cp^0 = E$  mit der *Energie* und  $p^i$  mit den *Impulskomponenten* des Teilchens. Mit

$$\begin{aligned} E &= cp^0 = c^2 m \frac{dt}{d\tau} = mc^2 \gamma = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\approx mc^2 + mv^2/2 + \dots \end{aligned} \quad (11.93)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m \frac{d\vec{r}}{d\tau} = m\gamma\vec{v} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &\approx m\vec{v} + \dots \end{aligned} \quad (11.94)$$

erhalten wir im nichtrelativistischen Limes  $v/c \rightarrow 0$  die wohlbekanntesten Ausdrücke für die Energie  $E$  und den Impuls  $\vec{p}$  zurück (bis auf eine triviale Verschiebung  $mc^2$ , der Ruheenergie). Beachte, dass die Erhaltung des 4-er Vektors

$$\sum_n p_n^\alpha \text{initial} = \sum_n p_n^\alpha \text{final},$$

$\sum_n \Delta p_n^\alpha = 0$ , eine Lorentzinvariante ist, d.h., ist Energie und Impuls in einem System erhalten (z.B. im Ruhesystem des Schwerpunktes), so gilt dies in allen Inertialsystemen.

Schliesslich können wir in (11.93, 11.94) die Geschwindigkeit  $v$  eliminieren, um die relativistische Dispersion eines massiven Teilchens zu erhalten,

$$E(\vec{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}. \quad (11.95)$$

Für masselose Teilchen setzen wir  $m = 0$  (und  $v = c$ )<sup>13</sup> und erhalten die Dispersionsrelation

$$E(\vec{p}) = c|\vec{p}|. \quad (11.96)$$

## 11.8 Kovarianz (Lorentzinvarianz) der Elektrodynamik

Zur Vorbereitung konstruieren wir aus der Ladungs- und Stromdichte

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}, t) &= \sum_n e_n \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \\ \vec{j}(\vec{r}, t) &= \sum_n e_n \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) \frac{d\vec{r}_n(t)}{dt} \end{aligned} \quad (11.97)$$

die 4-er Stromdichte  $j^\alpha(x)$ . Dazu definieren wir  $x_n^0(t) = ct$  und führen das Integral

$$\int dt' \delta^4(x - x_n(t'))$$

ein. Schliesslich ersetzen wir die Zeit  $t'$  durch die Eigenzeit<sup>14</sup> und erhalten

$$\begin{aligned} j^\alpha(x) &= \int d\tau \sum_n e_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} \\ &= (c\rho, \vec{j}). \end{aligned} \quad (11.98)$$

<sup>13</sup> $v = p/m\gamma = E/cm\gamma = mc^2\gamma/mc\gamma = c$

<sup>14</sup>Beachte, dass  $dt' dx_n^\alpha/dt' \equiv d\tau dx_n^\alpha/d\tau$  und  $dt' dx_n^0/dt' = cdt'$

Mit dem Skalar  $\delta^4(x-x(t))$  und dem 4-er Vektor  $dx_n^\alpha$  ist  $j^\alpha$  eine 4-er Stromdichte. Es gilt der Erhaltungssatz<sup>15</sup>

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0, \quad (11.99)$$

Wir schreiben die inhomogenen Maxwellgleichungen durch die Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$  in der Lorentzzeichnung,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \varphi - \Delta \varphi &= 4\pi \rho = \frac{4\pi}{c} j^0, \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \Delta \vec{A} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}, \\ \frac{1}{c} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= 0, \end{aligned} \quad (11.100)$$

wobei  $j$  wieder die 4-er Stromdichte ist und

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta = -\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \partial_\mu \partial^\mu = \square$$

ist der skalare Laplace-Operator in  $\mathbb{M}^4$  (d'Alembert-Operator). Das Object  $(\varphi, \vec{A})$  definiert also ein 4-er Potential und (11.100) lässt sich dann kompakt schreiben als

$$\begin{aligned} \square A^\alpha &= \frac{4\pi}{c} j^\alpha \\ \partial_\alpha A^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (11.101)$$

Wir erhalten damit manifest kovariante Gleichungen (Tensorgleichungen). Als nächstes drücken wir die Felder  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  durch das 4-er Potential  $A^\alpha$  aus,

$$\begin{aligned} E_i &= -\frac{\partial}{c \partial t} A^i - \frac{\partial}{\partial x^i} A^0 \stackrel{(11.32)}{=} \partial^0 A^i - \partial^i A^0 \\ B_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} A^k = \begin{pmatrix} \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 \\ \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 \\ \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

---

<sup>15</sup>Denn

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} &= \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n) \frac{dx_n^i}{dt} \\ &= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n) \frac{dx_n^i}{dt} \\ &= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_n) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}). \end{aligned}$$

## 11.8. KOVARIANZ (LORENTZINVARIANZ) DER ELEKTRODYNAMIK 267

Die 6 Feldkomponenten definieren auf natürliche Weise den antisymmetrischen Feldstärketensor (beachte (11.34) bis (11.38))

$$F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.102)$$

Aus  $F^{\alpha\beta}$  konstruieren wir den zugehörigen kovarianten Feldstärketensor

$$F_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11.103)$$

sowie den dualen Tensor (folgt aus der Dualität der Maxwellgleichungen,  $\mathcal{F}^{\alpha\beta}$  ergibt sich aus  $F^{\alpha\beta}$  durch die Substitution  $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$  und  $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$ )

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\psi\delta}F_{\psi\delta} = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & -E_3 & E_2 \\ -B_2 & E_3 & 0 & -E_1 \\ -B_3 & -E_2 & E_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11.104)$$

Wir konstruieren die Maxwellgleichungen in Tensorform. Sie resultieren durch Kontraktion des Feldstärketensors mit einer (kovarianten) Ableitung. Daraus resultieren Ableitungen 1. Ordnung in den Feldstärken als 4er-Vektoren. Für die inhomogenen Maxwellgleichungen findet man die Form

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c}j^\beta \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - (1/c)\partial_t\vec{E} &= (4\pi/c)\vec{j}. \end{aligned} \quad (11.105)$$

Die homogenen Maxwellgleichungen ergeben sich aus der Kontraktion des dualen Feldstärketensors mit einer (kovarianten) Ableitung,

$$\partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + (1/c)\partial_t\vec{B} &= 0. \end{aligned} \quad (11.106)$$

Dies ist äquivalent zur Form

$$\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} = 0 \quad (11.107)$$

mit  $\alpha, \beta, \gamma$  beliebig aus 0,1,2,3. Mit (11.98), (11.105), (11.106) haben wir die Maxwellgleichungen in tensorielle Form gebracht, womit die Kovarianz (Lorentzinvarianz) der Elektrodynamik gezeigt ist.

Abschliessend wollen wir die Verbindung zur Mechanik kovariant schreiben: Ein guter (Tensor-) Ansatz für die Lorentzkraft

$$\vec{F} = q \left( \underbrace{\vec{E}}_{F^{\alpha\beta}} + \underbrace{\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}}_{U^\gamma} \right)$$

ergibt sich zu

$$f^\alpha = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tau}. \quad (11.108)$$

Damit erhalten wir die relativistische Bewegungsgleichung für ein massives, geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld (vergleiche 11.7),

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{q}{c} \eta_{\beta\gamma} F^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tau}. \quad (11.109)$$

## 11.9 Transformation elektromagnetischer Felder

Wiederum müssen wir aus den 3-er Vektoren  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  (im Galilei-Sinn) eine Tensorgröße bilden, welche wir dann trivial transformieren können. Offensichtlich kennen wir diesen Tensor bereits; es ist der zweifach kontravariante Feldstärketensor  $F^{\alpha\beta}$ . Wir sehen, dass der Aufbau einer Tensorgröße aus  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  diese Felder intrinsisch miteinander verknüpft — im relativistischen Weltbild macht es keinen Sinn,  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  gesondert zu betrachten; relevant ist ihre Kombination in  $F^{\alpha\beta}$ .

Das Transformationsgesetz für  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  ergibt sich aus demjenigen für  $F^{\alpha\beta}$ ,

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\gamma \Lambda^\beta_\delta F^{\gamma\delta}. \quad (11.110)$$

Damit erhalten wir die Transformationen

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= \gamma(\vec{E} + \vec{\beta} \times \vec{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{E}) \vec{\beta}, \\ \vec{B}' &= (\vec{B} - \vec{\beta} \times \vec{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} (\vec{\beta} \cdot \vec{B}) \vec{\beta}. \end{aligned} \quad (11.111)$$

Das Resultat (11.111) verallgemeinert die Transformationsregel (5.6). Für eine Transformation entlang der Achse  $x^1$  vereinfacht sich das Resultat zu

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1, & B'_1 &= B_1, \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3), & B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3), \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2), & B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \quad (11.112)$$

Ein hübsches *Beispiel* ist die *vorbeifliegende Ladung*, vgl. Abb. 11.8: In ihrem Ruhesystem  $x'$  erzeugt sie ein elektrisches Feld  $\vec{E}' = q\vec{r}'/r'^3$ ; die Induktion  $\vec{B}' = 0$  verschwindet. Die Koordinaten des Beobachters im  $x'$ -System sind

$$\left. \begin{aligned} x'^1 &= -vt', \\ x'^2 &= b, \\ x'^3 &= 0, \end{aligned} \right\} r' = \sqrt{b^2 + v^2 t'^2} \quad (11.113)$$

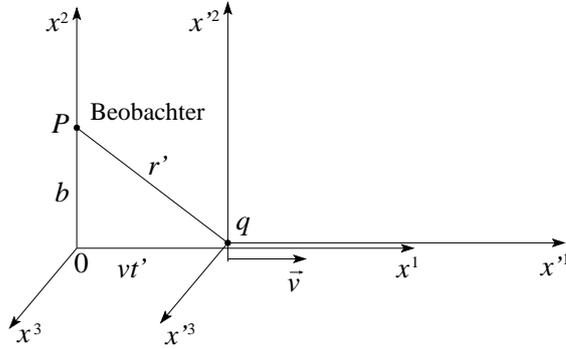


Abb. 11.8: Vorbeifliegende Ladung: Beobachter bei  $(0, b, 0)$ , Geschwindigkeit des Teilchens  $\vec{v} \parallel x^1$ .

( $x'^1 = x^1$  bei  $t' = t$ ). Das  $\vec{E}'$ -Feld bei  $P$  im  $x'$ -System ist gegeben durch,

$$E'_1 = -\frac{qv't'}{r'^3}, \quad E'_2 = \frac{qb}{r'^3}, \quad E'_3 = 0, \quad (\vec{B}' = 0), \quad (11.114)$$

und lässt sich durch die Koordinaten im  $x$ -System ausdrücken; mit

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x^1 \right) = \gamma t, \\ x'^1 &= -v\gamma t + \gamma x^1 = -v\gamma t, \\ x'^2 &= x^2, \quad x'^3 = x^3, \end{aligned} \quad (11.115)$$

erhalten wir

$$E'_1 = -\frac{qv\gamma t}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{3/2}}, \quad E'_2 = \frac{qb}{(b^2 + v^2\gamma^2 t^2)^{3/2}}. \quad (11.116)$$

Schliesslich transformieren wir noch die Felder gemäss (11.112) (vertausche  $\vec{E}, \vec{B} \leftrightarrow \vec{E}', \vec{B}', \vec{\beta} \rightarrow -\vec{\beta}$ )

$$\begin{aligned} E_1 &= E'_1 = -\frac{qv\gamma t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ E_2 &= \gamma E'_2 = \frac{q\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}}, \\ B_3 &= \gamma\beta E'_2 = \beta E_2. \end{aligned} \quad (11.117)$$

Der Beobachter in  $P$  sieht einen transversalen elektromagnetischen Puls ( $\vec{E} \perp \vec{B}$ ), mit dem  $\vec{B}$ -Feld von der bewegten Ladung herrührend<sup>16</sup>, vgl. Abb. 11.9. Der Puls hat eine Dauer  $\Delta t \approx b/\gamma v$  (betrachte den Nenner in (11.117), er erzeugt den Puls mit Maximum bei  $t = 0$ , wenn  $q$  gerade die kürzeste Distanz zu  $P$  hat). Die Höhe des Pulses wächst mit  $\gamma$ ,  $E_2(t = 0) = \gamma q/b$ . Die Induktion  $\vec{B}$  erreicht im Limes  $\beta \rightarrow 1$  die Stärke des Pulses im  $\vec{E}$ -Feld. Der zeitliche Verlauf des Pulses und die im System des Beobachters erfolgende Kompression des  $\vec{E}$ -Feldes entlang der  $x^1$ -Achse sind in der Abb. 11.10 illustriert.

<sup>16</sup> Strompuls entlang  $x^1$ .

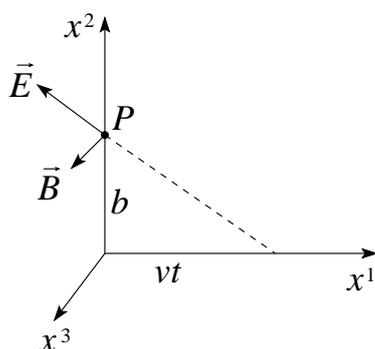


Abb. 11.9:  $\vec{E}$ - und  $\vec{B}$ -Feld am Ort des Beobachters, erzeugt durch die bewegte Ladung.

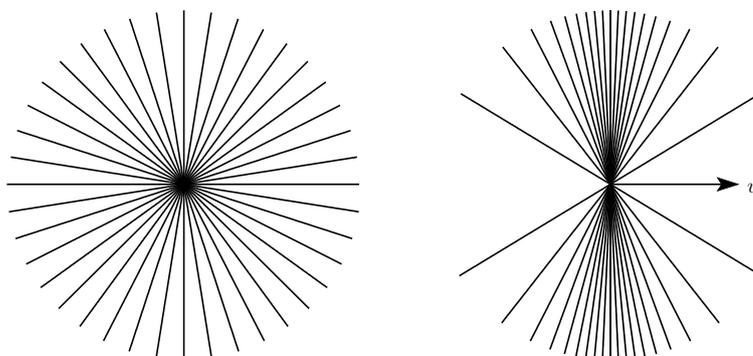


Abb. 11.10:  $\vec{E}$ -Feld einer ruhenden (links) und einer bewegten Ladung (rechts) im Ruhesystem des Beobachters.

## 11.10 Allgemeine Relativitätstheorie

Wir können an dieser Stelle nur kurz aufzeigen, in welche Richtung die Überlegungen weitergehen. Startpunkt ist die Frage, was eigentlich die Inertialsysteme auszeichnet. Bereits Newton hat bemerkt, dass die Inertialmasse  $m_i$ , welche die *Dynamik* eines Körpers bestimmt ( $m_i \partial_t^2 \vec{r} = \vec{F}$ ), gleich der schweren Masse  $m_g$  des Körpers ist, welche im Gravitationsgesetz  $\vec{F} = m_g \vec{g}$  auftritt. Diese Gleichheit lässt sich zum Beispiel durch Versuche mit Pendeln verschiedener Zusammensetzung testen, ist doch deren Periode proportional zu  $\sqrt{m_i/m_g}$ . Geht man von der Gleichheit schwerer und träger Masse aus (diese Gleichheit wurde durch viele Experimente mit immer höherer Genauigkeit verifiziert), so kann man im freien Fall durch ein (homogenes, stationäres) Gravitationsfeld das Letztere nicht mehr sehen<sup>17</sup>. Zum Beispiel gilt für  $N$  Massenpunkte mit paarweiser Wechselwirkung  $\vec{F}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$  im nichtre-

<sup>17</sup>Betrachte ein Experiment mit Massen im geschlossenen, frei fallenden Lift; dann fallen alle Körper und der Lift gleich schnell und die Gravitation fällt aus der Bewegungsgleichung raus

lativistischen Grenzfall die Bewegungsgleichung

$$m_i \ddot{\vec{r}} = m_i \vec{g} + \sum_j \vec{F}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad (11.118)$$

wobei  $\vec{r}_i$  die bezüglich der Gravitationskraft  $m\vec{g}$  erzeugenden Masse (Erde) fixierten Koordinaten sind. Die Transformation

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \frac{1}{2} \vec{g} t^2, \\ t' &= t \end{aligned} \quad (11.119)$$

auf das mitfallende System  $t', r'$  ergibt die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\vec{r}}' = \sum_j \vec{F}(\vec{r}_i' - \vec{r}_j') \quad (11.120)$$

und der Experimentator im frei fallenden Lift findet die *gleichen Gesetze der Mechanik* wie ein Experimentator im freien Raum. Das *Äquivalenzprinzip* verallgemeinert diesen Sachverhalt auf *alle Naturgesetze*: Gegeben ein Raum-Zeit Punkt in einem beliebigen Gravitationsfeld, dann lässt sich immer ein *lokales* Inertialsystem finden, so dass innerhalb eines genügend kleinen Gebietes die Naturgesetze dieselbe Form annehmen wie in einem unbeschleunigten karthesischen Koordinatensystem in Abwesenheit von Gravitationskräften. Ein solches Bezugssystem wird *lokales Inertialsystem* genannt. Wir können zwei Dinge lernen:

1. Offensichtlich kann die Gravitation durch eine geeignete, nicht triviale Koordinatentransformation eliminiert werden. Betrachte zum Beispiel die Transformation (11.119) — sie erzeugt aus der trivialen Minkowskimetrik  $\eta_{\mu\nu}$  eine gekrümmte Raum-Zeit Metrik. Zwar ist  $\vec{g}$  aus (11.120) verschwunden, dafür aber erscheint  $\vec{g}$  in der Metrik  $g_{\mu\nu}$ . Wir können also die Gravitation beschreiben, indem wir das gravitationsfreie Problem in eine gekrümmte Raum-Zeit einbetten.
2. Diese Überlegungen dürfen nicht von der Wahl des Koordinatensystemes abhängen: Die Naturgesetze müssen in jedem Koordinatensystem gleich aussehen.

Aus diesen beiden Punkten folgt eine Strategie zum Aufbau der Naturgesetze in der Präsenz von Gravitationseffekten:

1. Finde einen Formalismus, welcher die koordinatenunabhängige Beschreibung der Naturgesetze erlaubt. Dieses Ziel lässt sich durch die Formulierung der Gesetze durch Tensorgleichungen erreichen.

2. Die Naturgesetze in Inertialsystemen sind bekannt. Formuliere also die Gesetze durch Tensorgleichungen, so dass nach Transformation in lokale Inertialsysteme die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie resultieren. Dies lässt sich erreichen durch Inkorporation der Gravitationseffekte in die Metrik der gekrümmten Raum-Zeit.
3. Finde die der physikalischen Situation entsprechenden Metrik  $g_{\mu\nu}$ .

Der letzte Schritt führt uns zu den Einsteingleichungen für die Metrik  $g_{\mu\nu}$ . In der Folge kommentieren wir kurz diese drei Punkte.

### Zu 1), Tensoren

Wir haben in 2.4, 11.2 und 11.2.2 bereits das wichtigste über Koordinatensysteme, die Metrik und Tensoren gelernt. Insbesondere gelten die Regeln (11.34) – (11.36) auch für allgemeine Tensoren, deren Transformationsverhalten nicht durch eine Lorentztransformation, sondern durch eine beliebige Koordinatentransformation  $x'^{\mu}(\{x^{\nu}\})$  gegeben ist.<sup>18</sup> Die Regel (11.37) bedarf einer Modifikation: Die Ableitung  $\partial_{\alpha}T^{\beta\gamma}$  ist kein Tensor. In krummen Koordinaten müssen wir zu kovarianten Ableitungen übergehen. Dazu bedarf es der Einführung der Christoffelsymbole ( $g_{ij}$  die zugrunde liegende Metrik des Raumes)

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\nu\sigma} \left[ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right]. \quad (11.121)$$

Die Christoffelsymbole geben den affinen Zusammenhang, d.h. sie sind das Mass für die Krümmung der Koordinatenachsen; sie sind keine Tensoren, denn

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{\partial x'^m}{\partial x^m} \frac{\partial x_s}{\partial x'_i} \frac{\partial x_r}{\partial x'_j} \Gamma_{sr}^m + \frac{\partial x'^m}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^m}{\partial x'^i \partial x'^j}.$$

Die kovarianten Ableitungen  $V^{\mu}_{;\lambda}$  und  $U_{\mu;\lambda}$  von kontra- und kovarianten Vierervektoren sind dann definiert als folgende Verallgemeinerungen der Ableitung,<sup>19</sup>

$$\left. \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right|_{\text{flache Koord}} \rightarrow \left. \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa} \right|_{\text{allg. Koord}} =: V^{\mu}_{;\lambda} \quad (11.126)$$

<sup>18</sup>Zum Beispiel transformiert der Tensor  $T^{\gamma}_{\alpha\beta}$  gemäss

$$T'^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\epsilon}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\xi}}{\partial x'^{\beta}} T^{\delta}_{\epsilon\xi},$$

(vergleiche (11.33)).

<sup>19</sup>Die kovarianten Ableitungen  $A^n_{;m}$  und  $A_{n;m}$  von kontra- und kovarianten Vektoren,

$$A^n_{;m} \equiv \partial_{x_m} A^n + \Gamma^n_{ml} A^l, \quad (11.122)$$

$$A_{n;m} \equiv \partial_{x_m} A_n - \Gamma^l_{nm} A_l; \quad (11.123)$$

$$\left. \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\lambda} \right|_{\text{flache Koord.}} \rightarrow \left. \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\kappa_{\mu\lambda} U_\kappa \right|_{\text{allg. Koord.}} =: U_{\mu;\lambda}. \quad (11.127)$$

Eine weitere Verallgemeinerung ergibt sich bei der Betrachtung von (11.38), z.B.  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Die Transformierte

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x^\kappa} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} \left( = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \right)$$

ist total antisymmetrisch in  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und damit proportional zu  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ . Die Proportionalitätskonstante ist gerade die Jakobideterminante  $|\partial x'/\partial x|$  von  $\partial x'^\alpha/\partial x^\mu$ . Indem wir statt  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  die Grösse

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}/\sqrt{g} \quad (11.128)$$

betrachten, erhalten wir einen Tensor. Die Grösse  $g = -\det \gamma_{\mu\nu}$  ist eine skalare *Dichte*<sup>20</sup>, welche gemäss

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \\ \Rightarrow g' &= \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g \end{aligned} \quad (11.129)$$

transformiert.

Man nennt eine Grösse  $t_{\dots}$  eine Tensordichte mit Gewicht  $W$ , wenn sich  $t$  als Produkt eines Tensors und dem Faktor  $g^{-W/2}$  darstellen lässt. Z.B.

sind Tensoren 2-ter Stufe; die kovariante Ableitung eines Skalars entspricht gerade dem Gradienten  $\Psi_{;n} \equiv \partial_{x_n} \Psi$  und ist ein Vektor (Tensor erster Stufe). Die Operatoren grad, div, rot, und Laplace haben die Formen

$$\begin{aligned} \text{grad:} & \quad \Psi_{;n}, \\ \text{div:} & \quad A^n_{;n} = (1/\sqrt{g}) \partial_{x^n} (\sqrt{g} A^n), \\ \text{rot:} & \quad A_{n;m} - A_{m;n} = \partial_{x^m} A_n - \partial_{x^n} A_m \\ \text{Laplace:} & \quad (g^{nm} \Psi_{;m})_{;n} = (1/\sqrt{g}) \partial_{x^n} (\sqrt{g} g^{nm} \partial_{x^m} \Psi). \end{aligned} \quad (11.124)$$

Die alten Resultate (vgl. Abschnitt 2.4) für Skalar- und Vektorfelder in krummlinigen orthogonalen Koordinaten folgen sofort; benutze dabei, dass  $a_i = h_i A^i = A_i/h_i$ ,

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \Psi)_i &= (1/h_i) \partial_{x_1} \Psi, \\ (\vec{\nabla} \times \vec{a})_i &= (h_i/\sqrt{g}) \epsilon^{ijk} A_{kij} = \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \epsilon^{ijk} \partial_{x_j} (h_k a_k), \\ (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) &= A^i_{;i} = (1/\sqrt{g}) \partial_{x^i} \sqrt{g} A^i = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} (\partial_{x_1} (h_2 h_3 a_1) + \dots). \end{aligned} \quad (11.125)$$

<sup>20</sup>Die Grösse  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$  ist eine Tensordichte mit Gewicht  $-1$ ;  $g$  ist eine Skalardichte mit Gewicht  $-2$ .

transformiert die Tensordichte  $t^\mu{}_\nu$  mit Gewicht  $W$  gemäss

$$t'^\mu{}_\nu = \underbrace{\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^W}_{(g/g')^{W/2}} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} t^\lambda{}_\kappa \quad (11.130)$$

und

$$g'^{W/2} t'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} g^{W/2} t^\lambda{}_\kappa,$$

somit ist  $g^{W/2} t^\mu{}_\nu$  ein Tensor. Der Faktor  $g^{W/2}$  berücksichtigt die Transformation des Volumens, wenn  $-\det g_{\mu\nu} \neq 1$  ist; insbesondere transformiert

$$d^4x t^\mu{}_\nu (\text{Gewicht} = -1) = \sqrt{g} d^4x T^\mu{}_\nu \quad (11.131)$$

wie ein Tensor,  $\sqrt{g} d^4x$  ist das invariante Volumenelement.

## Zu 2), Naturgesetze in kovarianter Form ( $c = 1$ )

### Mechanik

Die Verallgemeinerung von (11.87) konstruiert sich wie folgt: Zuerst holen wir uns die 4-er Geschwindigkeit aus dem Inertialsystem,

$$U^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} U^\alpha_\xi = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \tau} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}.$$

Die Ableitung  $dU^\mu/d\tau$  ist *kein* Vektor. Wir schreiben

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

und verallgemeinern gemäss (11.126) auf die kovariante Ableitung  $D/D\tau$  entlang einer Linie,

$$\frac{D}{D\tau} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \cdot (\text{Kovariante Ableitung}),$$

z.B.

$$\frac{DU^\mu}{D\tau} = \frac{dU^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} U^\beta.$$

Damit verallgemeinert sich (11.87) auf

$$m \frac{DU^\mu}{D\tau} = f^\mu,$$

oder ausgeschrieben,

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \underbrace{f^\mu}_{\text{nicht grav. Kräfte}} - m \underbrace{\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \frac{\partial x^\nu}{d\tau} \frac{\partial x^\lambda}{d\tau}}_{\text{Gravitation}}. \quad (11.132)$$

**Elektrodynamik**

Die Maxwellgleichungen in der Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} &= -(4\pi/c)j^\beta, & (11.133) \\ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} F_{\beta\gamma} + \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\gamma} F_{\alpha\beta} &= 0\end{aligned}$$

verallgemeinern sich zu

$$\begin{aligned}F^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} &= -(4\pi/c)j^\beta, & (11.134) \\ F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} + F_{\alpha\beta;\gamma} &= 0.\end{aligned}$$

Für die Lorentzkraft erhalten wir in der Präsenz von Gravitationsfeldern das Gesetz

$$f^\alpha = qF^{\alpha\gamma}g_{\gamma\beta}\frac{dx^\beta}{d\tau}. \quad (11.135)$$

Beachte, dass alle Indizes mit  $g_{\mu\nu}$  anstelle von  $\eta_{\mu\nu}$  manipuliert werden und dass alle Felder ( $f^\alpha, j^\alpha, F^{\alpha\beta}$ ) via Transformation aus lokalen Inertialsystemen definiert sind,

$$\begin{aligned}f^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \tilde{f}^\mu, \\ j^\alpha &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \tilde{j}^\mu, \\ F^{\alpha\beta} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\nu} \tilde{F}^{\mu\nu},\end{aligned}$$

$\xi^\mu$  flach,  $\tilde{f}^\mu, \tilde{j}^\mu, \tilde{F}^{\mu\nu}$  die Objekte im lokalen Inertialsystem.

**Zu 3) Metrik  $g_{\mu\nu}$  aus Einsteingleichungen**

Ein metrischer Tensor  $g_{\mu\nu}$  kann aus verschiedenen Gründen eine nicht triviale Form annehmen: Betrachte den flachen Raum  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$  und führe krummlinige Koordinaten ein. Der Raum sieht dann auf den ersten Blick gekrümmt aus ( $g_{\mu\nu}$  ist nicht trivial), obwohl er eigentlich flach ist. Wie unterscheiden wir einen flachen Raum von einem gekrümmten? Die Antwort liefert der *Riemann-Christoffel Krümmungstensor*

$$\mathcal{R}^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} := \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\nu\eta}. \quad (11.136)$$

Die Metrik  $g_{\mu\nu}(x)$  ist äquivalent zur Minkowskimetrik  $\eta_{\mu\nu}$  (d.h. es gibt eine globale Transformation  $x \rightarrow \xi$  so dass  $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ ) genau dann, wenn

$$\mathcal{R}^\lambda{}_{\mu\nu\kappa} \equiv 0 \quad \forall x \quad (11.137)$$

und  $g_{\mu\nu}(X)$  drei positive und einen negativen Eigenwert in einem Punkt  $X$  hat.

Der voll kovariante Tensor

$$\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} := g_{\lambda\sigma} \mathcal{R}^{\sigma}_{\mu\nu\kappa} \quad (11.138)$$

hat einige interessante Eigenschaften:

1. Symmetrien:  $\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} = \mathcal{R}_{\nu\kappa\lambda\mu}$ ,
2. Antisymmetrien:  $\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} = -\mathcal{R}_{\mu\lambda\nu\kappa} = -\mathcal{R}_{\lambda\mu\kappa\nu} = \mathcal{R}_{\mu\lambda\kappa\nu}$ ,
3. Zyklizität:  $\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} + \mathcal{R}_{\lambda\kappa\mu\nu} + \mathcal{R}_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$ ,
4. Bianchi-Identität:  $\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} + \mathcal{R}_{\lambda\mu\eta\nu;\kappa} + \mathcal{R}_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0$ .

Die *Kontraktion*

$$\mathcal{R}_{\mu\kappa} := g^{\lambda\nu} \mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (11.139)$$

ergibt den *Ricci-Tensor*  $\mathcal{R}_{\mu\kappa}$ . Die zweite Kontraktion

$$\mathcal{R} := g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} \mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa}$$

ergibt die *skalare Krümmung*  $\mathcal{R}$ .

In zwei Dimensionen reicht die skalare Krümmung  $\mathcal{R}$  aus, um die Krümmung des Raumes zu beschreiben. In 3 Dimensionen genügt der Ricci-Tensor  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  mit seinen 6 unabhängigen Komponenten. Erst in 4 und mehr Dimensionen benötigt man den vollen Riemann-Christoffel Krümmungs-Tensor mit seinen

$$C_d = \frac{1}{12} d^2(d^2 - 1) \quad \Rightarrow C_4 = 20$$

unabhängigen Komponenten zur Beschreibung der allgemeinsten Krümmungsverhältnisse.

Die obige Diskussion lässt vermuten, dass die Bestimmungsgleichungen der Metrik  $g_{\mu\nu}$  partielle Differenzialgleichungen sind, welche die Krümmungstensoren  $\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa}$ ,  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ , und den Krümmungskalar  $\mathcal{R}$  enthalten. Bleibt die Frage nach der *Quelle der Gravitation*. Offensichtlich erzeugt Masse ein Gravitationsfeld. Masse ist aber nur *eine* Form von Energie, also müssten alle Energiefelder wie z.B. Masse, elektromagnetische Felder, etc. (und sogar Gravitationsfelder selber) die Raumkrümmung erzeugen. Es stellt sich heraus, dass die korrekte (tensorielle) Quelle des Gravitationsfeldes der Energie-Impuls-Tensor  $T^{\mu\nu}$  ist. Z.B. hat  $T^{\mu\nu}$  für ein System von Punktmassen  $m_i$  die Form

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i m_i \int \frac{dx_i^\mu}{d\tau} \frac{dx_i^\nu}{d\tau} \delta^4(x - x_i) d\tau, \quad (11.140)$$

und für elektromagnetische Felder

$$T^{\mu\nu} = F^\mu{}_\lambda F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu} F_{\lambda\kappa} F^{\lambda\kappa}.$$

Die Einsteingleichungen haben die Form

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}. \quad (11.141)$$

wobei  $G = 6.673 \cdot 10^{-8}$  dyn cm<sup>2</sup>/g<sup>2</sup> die Gravitationskonstante und  $\lambda$  die kosmologische Konstante ist.  $\lambda$  wurde ursprünglich von Einstein eingeführt, um zu verhindern, dass die Einsteingleichungen die Expansion oder Kontraktion des Universums voraussagen. Es ist  $\lambda \approx 0$  und im leeren Raum reduziert sich (11.141) auf  $\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv 0$ .<sup>21</sup> In zwei und drei Dimensionen impliziert  $\mathcal{R}_{\mu\nu} \equiv 0$  eine flache Raumgeometrie. In  $d \geq 4$  kann  $\mathcal{R}_{\lambda\mu\nu\kappa}$  trotzdem ungleich 0 sein. Folglich können Gravitationsfelder im leeren vierdimensionalen Raum existieren.

Die Gleichungen (11.141) ergeben  $10 - 4 = 6$  Gleichungen<sup>22</sup> für die 10 Unbekannten in  $g_{\mu\nu}$ . Die unbestimmten vier Freiheitsgrade entsprechen der Freiheit in der Wahl des Koordinatensystems: Mit  $g_{\mu\nu}(x)$  ist auch  $g'_{\mu\nu}(x')$  eine Lösung von (11.141). Dies entspricht der Eichfreiheit in der Elektrodynamik; entsprechend der Eichbedingung  $\partial_\alpha A^\alpha = 0$  in der Elektrodynamik wählt man oft  $g^{\mu\nu}\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0$  in der Relativitätstheorie. Es ergeben sich dann harmonische Koordinaten mit

$$(g^{\lambda\kappa} x^\mu{}_{;\lambda})_{;\kappa} = \square x^\mu = 0.$$

Im gravitationsfreien Raum sind die Minkowskikoordinaten, wo  $g^{\lambda\kappa} = \eta^{\lambda\kappa}$ ,  $g = 1$  ist, gerade die Harmonischen.

<sup>21</sup>Kontrahiere (11.141) mit  $g_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{R} = 8\pi GT^\mu{}_\mu$ .

<sup>22</sup>-4 wegen den Bianchi-Identitäten.



# Kapitel 12

## Lagrange Formulierung

### 12.1 Relativistische Mechanik

In 11.7 haben wir die Bewegungsgleichungen (11.110) für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld hergeleitet,

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{p} &= q[\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}/c], \\ \partial_t E &= q \vec{u} \cdot \vec{E}, \quad (\text{das } \vec{B}\text{-Feld leistet keine Arbeit})\end{aligned}\tag{12.1}$$

oder in kovarianter Form, mit  $\partial_\tau x^\alpha = (\gamma c, \gamma \vec{u}) = p^\alpha/m$ ,

$$\partial_\tau p^\alpha = (q/c) F^{\alpha\beta} \partial_\tau x_\beta.\tag{12.2}$$

Wir möchten die Gleichungen (12.1) aus einem Variations-Prinzip minimaler Wirkung herleiten. Gesucht ist also die Wirkung

$$S[x_i, \dot{x}_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt L[x_i(t), \dot{x}_i(t), t],\tag{12.3}$$

mit der Lagrangefunktion  $L$ , so dass  $\delta S = 0$  gerade (12.1) reproduziert (auf den kovarianten Formalismus gehen wir später noch genauer ein). Die Minimierungsbedingung  $\delta S = 0$  erzeugt die Euler-Lagrange Gleichung der Bewegung,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0.\tag{12.4}$$

Wir suchen eine Wirkung  $S$ , welche sich unter Lorentztransformationen wie ein Skalar transformiert. Mit  $dt = \gamma d\tau$ ,  $d\tau$  eine Invariante, erhalten wir

$$S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \gamma L.\tag{12.5}$$

Da  $d\tau$  invariant ist und  $S$  invariant sein soll, muss auch  $\gamma L$  invariant sein. Für ein freies Teilchen darf  $L$  nur von der Geschwindigkeit, nicht aber

von der Position abhängen. Die einzige Invariante, welche sich aus der 4er-Geschwindigkeit  $\partial_\tau x^\alpha$  konstruieren lässt, ist die Kontraktion

$$-\frac{\partial x^\alpha}{\partial \tau} \frac{\partial x_\alpha}{\partial \tau} = c^2. \quad (12.6)$$

Damit erhalten wir  $\gamma L \propto \text{const}$ . Im nicht relativistischen Limes wollen wir  $L = mu^2/2 + \text{const}$  erhalten. Dies wird erfüllt durch

$$\begin{aligned} \gamma L_0 &= -mc^2 \\ L_0 &= -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ &= -mc^2 + m \frac{u^2}{2} + \mathcal{O}(u^4), \quad u/c \ll 1. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen (12.4) ergeben korrekt

$$\partial_t(\gamma m \vec{u}) = \partial_t \vec{p} = 0. \quad (12.8)$$

Für ein Teilchen im elektromagnetischen Feld können wir aus den beiden 4er-Vektoren  $\partial_\tau x^\alpha$  und  $A^\alpha$  die invariante Kontraktion

$$\partial_\tau x^\alpha A_\alpha = \partial_\tau x_\alpha A^\alpha$$

bilden. Im nichtrelativistischen Limes erhalten wir

$$\begin{aligned} (-c\partial_\tau t, \partial_\tau \vec{r})(\varphi, \vec{A}) &= -c\gamma\varphi + \gamma\vec{u} \cdot \vec{A} \\ &= -\gamma c(\varphi - \vec{u} \cdot \vec{A}/c) \\ &\approx -c\varphi, \end{aligned} \quad (12.9)$$

und mit dem nichtrelativistischen Ausdruck

$$L|_{u/c \rightarrow 0} = T - V = mv^2/2 - q\varphi$$

extrapolieren wir auf das allgemeine relativistische Resultat

$$\gamma L = -mc^2 - q\gamma(\varphi - \vec{u} \cdot \vec{A}/c). \quad (12.10)$$

Das Resultat (12.10) gibt uns den Ausdruck

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - q\varphi + \frac{q}{c} \vec{u} \cdot \vec{A} \quad (12.11)$$

für die Lagrangefunktion eines Teilchens der Masse  $m$  und Ladung  $q$  im Feld der Potentiale  $\varphi$  und  $\vec{A}$ . Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Euler-Lagrange-Gleichungen (12.4) von (12.11) die Bewegungsgleichungen (12.1) erzeugen.

Wir gehen zum Hamiltonschen Formalismus über, indem wir den kanonisch konjugierten Impuls

$$P_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = \gamma m u_i + \frac{q}{c} A_i$$

definieren; in vektoriell Schreibweise,

$$\vec{P} = \vec{p} + \frac{q}{c} \vec{A}, \quad \vec{p} = m\gamma \vec{u}. \quad (12.12)$$

Für ein Elektron mit Ladung  $-e$  ist somit  $\vec{P} = m\gamma \vec{u} - (e/c)\vec{A}$ . Die Hamiltonfunktion ergibt sich aus der Legendre Transformation

$$H = \frac{\partial L}{\partial u_i} u_i - L = \vec{P} \cdot \vec{u} - L \quad (12.13)$$

und anschließender Eliminierung von  $\vec{u}$  durch

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{c\vec{P} - q\vec{A}}{\sqrt{(\vec{P} - (q/c)\vec{A})^2 + m^2c^2}}; \\ H &= \sqrt{(c\vec{P} - q\vec{A})^2 + m^2c^4} + q\varphi. \end{aligned} \quad (12.14)$$

Wiederum ergeben die Hamiltonschen Gleichungen die korrekte Bewegungsgleichungen (12.1). Auch ist  $H = W$  die totale Energie des Teilchens, eine Invariante der Bewegung (im nicht relativistischen Limes ist  $H_{\text{nr}} = p^2/2m + q\varphi + \text{const}$ ). Durch Umgruppieren der Terme und Quadrieren erhalten wir

$$(W - q\varphi)^2 - (c\vec{P} - q\vec{A})^2 = (mc^2)^2$$

und mit der Definition

$$p^\alpha := (E/c, \vec{p}) = ((W - q\varphi)/c, \vec{P} - (q/c)\vec{A}). \quad (12.15)$$

$$-p_\alpha p^\alpha = m^2c^2. \quad (12.16)$$

Mit dem 4-er Potential  $(\varphi, \vec{A})$  definiert (12.15) den kanonisch konjugierten 4-er Impuls  $P^\alpha = (W/c, \vec{P})$  mit  $W/c = \text{totale Energie}/c$  als 0-Komponente.

Beachte, dass  $L$  nicht eichinvariant ist,

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \chi, \\ \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \chi, \\ \Rightarrow L &\rightarrow L' = L + \frac{q}{c} \underbrace{(\partial_t \chi + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \chi)}_{d\chi/dt}, \end{aligned} \quad (12.17)$$

d.h.,  $L'$  ist gleich  $L$  bis auf eine totale Ableitung welche die Bewegungsgleichungen invariant lässt.

Anstelle von (12.11) und (12.14) lassen sich auch manifest kovariante Ausdrücke für  $L$  und  $H$  finden

$$\begin{aligned} L_0 &= -mc^2/\gamma = -(mc/\gamma)\sqrt{-U_\alpha U^\alpha}, \\ S_0 &= \int d\tau \gamma L \\ &= -mc \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= -mc \int ds \sqrt{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds}}. \end{aligned}$$

Diese Form mit dem Kurvenparameter  $s$  relaxiert die Nebenbedingung (11.90). Der allgemeine Lagrangian für ein Teilchen im Feld ist dann gegeben durch

$$L = -(mc\sqrt{\partial_s x_\alpha \partial_s x^\alpha} - (q/c)\partial_s x_\alpha A^\alpha) \quad (12.18)$$

mit  $c\partial_s \tau = \sqrt{-\partial_s x^\alpha \partial_s x_\alpha}$  und  $s =$  der Bogenlänge. Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial L}{\partial [\partial_s x_\alpha]} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\alpha} = 0$$

mit (12.18) ergeben die korrekten Bewegungsgleichungen

$$m \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{q}{c} (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \frac{dx_\beta}{d\tau}. \quad (12.19)$$

Mit dem konjugierten 4er Impuls

$$P^\alpha = \frac{\partial L}{\partial [\partial_s x_\alpha]} = m \frac{dx^\alpha}{d\tau} + \frac{q}{c} A^\alpha \quad (12.20)$$

lässt sich der Hamiltonian

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \left( -P_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\tau} + L \right) \\ &= -\frac{1}{2m} \left( P_\alpha - \frac{q}{c} A_\alpha \right) \left( P^\alpha - \frac{q}{c} A^\alpha \right) - \frac{mc^2}{2} \end{aligned} \quad (12.21)$$

definieren. Obwohl  $H$  die richtigen Bewegungsgleichungen erzeugt, ergeben sich Probleme:

1.  $H$  ist nach Konstruktion ein Lorentzskalar, somit ist  $H$  keine Energie.
2. Mit  $\partial_\tau x_\alpha \partial_\tau x^\alpha = -c^2$  und (12.20) findet man für  $H|_{A^\alpha=0}$  sofort, dass  $H \equiv 0$  ist.

Die übliche physikalische Interpretation von  $H$  als Energie wird damit hinfällig.

## 12.2 Elektrodynamik

Wiederum suchen wir eine Lagrange-*Dichte*  $\mathcal{L}$ , so dass die Maxwellgleichungen als Euler-Lagrange-Gleichungen der Wirkung

$$A = \int d^4x \mathcal{L}(A^\alpha, \partial^\beta A^\alpha) \quad (12.22)$$

folgen. Da die Maxwellgleichungen linear in den ‘Geschwindigkeiten’  $\partial^\beta A^\alpha$  und den Quellen  $j^\alpha$  sind, können wir leicht die richtigen Invarianten erraten:  $F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$ ,  $F_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}$ ,  $j_\alpha A^\alpha$ .  $F_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}$  ist ein Pseudoskalar und fällt weg. Man findet leicht, dass die Dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + \frac{1}{c} j_\alpha A^\alpha \\ &= -\frac{1}{16\pi} \eta_{\lambda\mu}\eta_{\nu\sigma} (\partial^\mu A^\sigma - \partial^\sigma A^\mu) (\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) + \frac{1}{c} \eta_{\alpha\beta} j^\beta A^\alpha \end{aligned} \quad (12.23)$$

die korrekten inhomogenen Maxwellgleichungen erzeugt,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} &= \frac{1}{4\pi} F_{\beta\alpha}, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\alpha} &= \frac{1}{c} j_\alpha, \\ \Rightarrow \partial^\beta F_{\beta\alpha} &= -\frac{4\pi}{c} j_\alpha. \end{aligned}$$

Die homogenen Maxwellgleichungen sind durch die Definition von  $F^{\alpha\beta}$  über die Potentiale  $A^\alpha$ ,  $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$  automatisch befriedigt. Beachte, dass die inhomogene Maxwellgleichung  $\partial^\beta F_{\beta\alpha} = -4\pi j_\alpha/c$  automatisch den Erhaltungssatz  $\partial^\alpha j_\alpha = 0$  liefert, denn

$$\partial^\alpha j_\alpha = -\frac{c}{4\pi} \partial^\alpha \partial^\beta F_{\beta\alpha} = 0,$$

da  $F_{\alpha\beta}$  antisymmetrisch, aber  $\partial^\alpha \partial^\beta$  symmetrisch in  $\alpha, \beta$  ist.

## 12.3 Procageleichungen

Wäre das Photon massiv, so müssten wir zu (12.23) den Masseterm  $(\mu^2/8\pi)A_\alpha A^\alpha$  hinzu addieren. Der Parameter  $\mu$  hat die Dimension einer inversen Länge und entspricht der Comptonwellenlänge des Photons,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\hbar}{m_{\text{photon}} \cdot c} \xrightarrow{m \rightarrow 0} \infty.$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen der Proca-Lagrange-Funktion

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Proca}} &= -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\mu^2}{8\pi}A_\alpha A^\alpha + \frac{1}{c}j_\alpha A^\alpha, \\ \partial^\beta F_{\beta\alpha} - \mu^2 A_\alpha &= -\frac{4\pi}{c}j_\alpha,\end{aligned}\tag{12.24}$$

erzeugt eine massive Elektrodynamik, wo alle Felder auf der Skala  $1/\mu$  abgeschirmt werden,

$$-\square A_\alpha + \mu^2 A_\alpha = \frac{4\pi}{c}j_\alpha.\tag{12.25}$$

Im statischen Limes einer ruhenden Ladung findet man

$$\begin{aligned}-\Delta\varphi + \mu^2\varphi &= 4\pi q, \\ \varphi &= q\frac{e^{-\mu r}}{r};\end{aligned}\tag{12.26}$$

statt des langreichweitigen Coulombpotentials finden wir dann ein kurzreichweitiges Yukawa Potential wie es für die Kernkräfte (Photon  $\rightarrow$  Pionen/Mesonen) typisch ist.

# Kapitel 13

## Dynamik relativistischer Teilchen im Feld

### 13.1 Homogenes, statisches Magnetfeld

Die Bewegungsgleichungen (12.1) im homogenen statischen Feld reduzieren sich zu

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{q}{c} \vec{u} \times \vec{B}, \quad \frac{dE}{dt} = 0. \quad (13.1)$$

Da die Energie konstant bleibt, sind  $u^2$  und  $\gamma$  konstant. Die Änderung von  $\vec{u}$  ist immer orthogonal zu  $\vec{u}$  und  $\vec{B}$ , so dass  $\vec{u}_{\parallel}$  erhalten bleibt und sich das Teilchen auf einer Kreisbahn in der Ebene senkrecht zu  $\vec{B}$  bewegt. Wir können (13.1) umschreiben zu

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{u}_{\parallel} &= 0, \\ \partial_t \vec{u}_{\perp} &= \vec{u}_{\perp} \times \vec{\omega}_B, \\ \vec{\omega}_B &= \frac{q\vec{B}}{\gamma mc} = \frac{qc\vec{B}}{E}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

$\omega_B$  ist die Zyklotronfrequenz und entspricht der Umlauffrequenz (in Radian) des Teilchens in der Ebene senkrecht zu  $\vec{B}$ . Mit (vgl. Abb. 13.1)

$$\begin{aligned} \vec{u}(t) &\stackrel{\text{Re}}{=} \vec{u}_{\parallel} \vec{\varepsilon}_3 + \omega_B r_B (\vec{\varepsilon}_1 - i\vec{\varepsilon}_2) e^{-i\omega_B t}, \\ \vec{r}(t) &\stackrel{\text{Re}}{=} \vec{r}_0 + \vec{u}_{\parallel} t \vec{\varepsilon}_3 + ir_B (\vec{\varepsilon}_1 - i\vec{\varepsilon}_2) e^{-i\omega_B t}, \end{aligned} \quad (13.3)$$

erhalten wir eine Bahn in der Form einer Helix mit Radius  $r_B$  und Steigung  $\vartheta = \arctan(u_{\parallel}/\omega_B r_B)$ . Der Bahnradius  $r_B$  hängt vom Magnetfeld  $B$  und der Geschwindigkeit  $u_{\perp}$  ab,

$$r_B = \frac{cm\gamma u_{\perp}}{qB} = \frac{u_{\perp}}{\omega_B}. \quad (13.4)$$

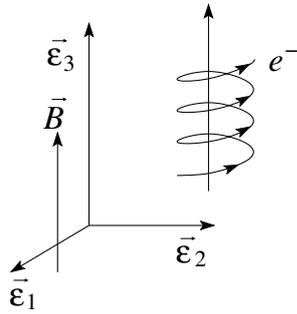


Abb. 13.1: Helikale Bewegung eines Elektrons im statischen homogenen Magnetfeld: Lage von  $\vec{B}$ ,  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$ .

Für  $q < 0$  (z.B. ein Elektron) ergibt sich eine rechtshändige Spirale, vgl. Abb. 13.1.

## 13.2 Orthogonale elektrische und magnetische Felder

Die Energie ist nicht mehr erhalten, da  $dE/dt = q\vec{u} \cdot \vec{E} \neq 0$  ist. Wir transformieren in ein neues Koordinatensystem; dann gilt

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = q(\vec{E}' + \vec{u}' \times \vec{B}'/c) \quad (13.5)$$

mit Feldern  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$  transformiert gemäss (11.111). Für  $|\vec{E}| < |\vec{B}|$  wählen wir eine Transformation mit

$$\frac{\vec{v}}{c} = \vec{\beta} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}, \quad \frac{v}{c} < 1. \quad (13.6)$$

Die transformierten Felder sind rein magnetisch,

$$\begin{aligned} \vec{E}' &= 0, \\ \vec{B}'_{\parallel} &= 0, \\ \vec{B}'_{\perp} &= \frac{\vec{B}}{\gamma} = \sqrt{\frac{B^2 - E^2}{B^2}} \vec{B} < \vec{B}, \end{aligned} \quad (13.7)$$

wobei sich  $\parallel$  und  $\perp$  auf die Richtung von  $\vec{\beta}$  beziehen. Im  $(t', \vec{r}')$ -System spiralisiert das Teilchen in Richtung  $\vec{B}' \parallel \vec{B}$ . Transformieren wir ins System  $(t, \vec{r})$  zurück, so kommt ein Driftterm

$$\vec{v} = \frac{c}{B^2} \vec{E} \times \vec{B} \quad (13.8)$$

hinzu, vgl. Abb. 13.2. Man kann dieses Resultat leicht verstehen, indem man die durch das  $\vec{E}$ -Feld gestörte Symmetrie studiert, welche die Abwärts- und

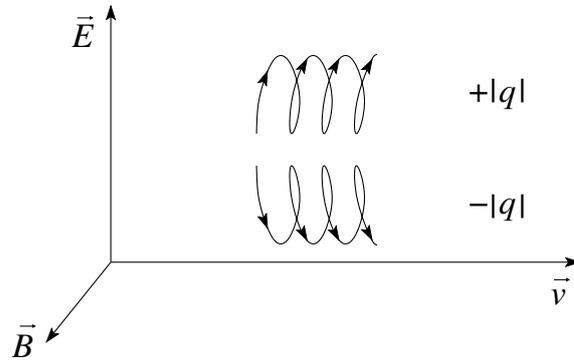


Abb. 13.2: Illustration des Drifts eines Elektrons im  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ -Feld: Eine positive Ladung wird in  $+\vec{E}$ -Richtung beschleunigt, in  $-\vec{E}$ -Richtung verzögert, ein negativ geladenes Teilchen genau entgegengesetzt.

Aufwärtsbewegung  $\parallel \vec{E}$  für ein positiv geladenes Teilchen verzögert respektive beschleunigt. Entsprechend zieht sich die Bahn zusammen (Verzögerung) oder expandiert (Beschleunigung).

Für den Fall  $|\vec{B}| < |\vec{E}|$  transformieren wir mit

$$\frac{\vec{v}}{c} = \vec{\beta} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{E^2}$$

auf ein System mit rein elektrischen Feldern,

$$\begin{aligned} \vec{B}' &= 0, \\ \vec{E}'_{\parallel} &= 0, \\ \vec{E}'_{\perp} &= \frac{\vec{E}}{\gamma} = \sqrt{\frac{E^2 - B^2}{E^2}} \vec{E} < \vec{E}. \end{aligned} \quad (13.9)$$

Die Bahn in  $(t', \vec{r}')$  ist dann von hyperbolischer Form mit stetig zunehmender Geschwindigkeit, was dazu führt, dass sich das Teilchen dem Lichtkegel anschmiegt.

Eine interessante Anwendung ist der *Wiensche Geschwindigkeits-Filter*. Für ein Teilchen mit Geschwindigkeit<sup>1</sup>

$$\vec{u} = c\vec{E} \times \vec{B}/B^2 \quad (13.10)$$

heben sich elektrische und magnetische Kräfte gerade auf. Die Blenden  $B_1$ ,  $B_2$  selektionieren dann gerade diejenigen Teilchen, welche eine Geschwindigkeit  $u = cE/B$  aufweisen.

Hat schliesslich  $\vec{E}$  eine Komponente parallel zu  $\vec{B}$ , lässt sich die Bahn des Teilchens nicht mehr so einfach finden: Das Skalarprodukt  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  ist eine

<sup>1</sup> $u = cE/B$ ,  $\vec{u}$  orthogonal auf  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$

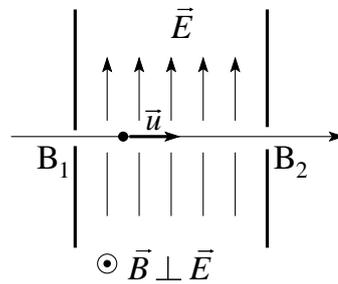


Abb. 13.3: Wiensches Geschwindigkeitsfilter: Für Teilchen mit der passenden Geschwindigkeit heben sich die Kräfte von  $\vec{E}$  und  $\vec{B} \perp \vec{E}$  gegenseitig auf. Diese Teilchen fliegen auf einer geraden Bahn durch die Blenden  $B_1$  und  $B_2$ . Alle anderen werden abgelenkt und fliegen an der Blende  $B_2$  vorbei.

Invariante<sup>2</sup> und lässt sich nicht wegtransformieren; die Bewegung in der Präsenz beider Felder muss dann genauer studiert werden.

---

<sup>2</sup>Wie auch  $E^2 - B^2$ .

## Kapitel 14

# Strahlung relativistischer Teilchen

Wir betrachten ein geladenes relativistisches Teilchen auf der Weltlinie  $r(\tau) = (ct(\tau), \vec{r}(\tau))$  und mit der Geschwindigkeit  $v(\tau) = dr/d\tau = (\gamma c, \gamma \vec{v})$ . Das Teilchen erzeugt an der Stelle  $x \in \mathbb{M}^4$  ein 4er Potential  $A^\alpha(x)$ , welches sich aus der Lösung der Wellengleichung (5.37) ergibt,

$$A^\alpha(x) = \frac{1}{c} \int d^4x' D_r(x - x') j^\alpha(x'). \quad (14.1)$$

Der 4er-Strom hat die Form

$$j^\alpha(x') = qc \int d\tau v(\tau) \delta^4(x' - r(\tau)), \quad (14.2)$$

mit  $\delta^4(x' - r(\tau)) = \delta(c(t' - t(\tau))) \delta^3(\vec{r}' - \vec{r}(\tau))$ . Die retardierte Greensche Funktion  $D_r(x - x')$  findet man wie üblich durch Fouriertransformation (siehe Abschnitt 5.3),

$$\begin{aligned} D_r(x) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4\pi}{k_\alpha k^\alpha} e^{ik_\alpha x^\alpha} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ &= \Theta(x_0) \frac{\delta(x_0 - |\vec{r}'|)}{|\vec{r}'|} = \Theta(ct) \frac{\delta(ct - r)}{r}. \end{aligned} \quad (14.3)$$

Beachte im Vergleich mit (5.46), dass wir hier  $\delta^4(x) = \delta(ct) \delta^3(\vec{r}) = (1/c) \delta(t) \delta^3(\vec{r})$  betrachten, daher der Faktor  $1/c$ . Wir können (14.3) kovariant schreiben, indem wir bemerken, dass

$$\begin{aligned} \delta(x \cdot x) &= \delta(\vec{r}^2 - c^2 t^2) \\ &= \delta((r - ct)(r + ct)) \\ &= \frac{1}{2r} [\delta(r - ct) + \delta(r + ct)]. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Somit können wir die retardierte Greensche Funktion schreiben als

$$D_r(x) = 2\Theta(x_0)\delta(x \cdot x).$$

Wobei der  $\Theta(x_0)$ -Faktor wegen der Restriktion der  $\delta$ -Funktion invariant ist. Zusammenfassend erhalten wir das 4er-Potential  $A^\alpha$  in der Form

$$A^\alpha(x) = 2q \int d\tau \frac{dr^\alpha}{d\tau} \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \delta([x - r(\tau)]^2). \quad (14.5)$$

Das Resultat (14.5) drückt aus, dass das Signal bei  $x$  am Ort  $r(\tau_0)$  entsteht mit  $(x - r(\tau_0)) \cdot (x - r(\tau_0)) = 0$ , das heisst,  $x$  liegt auf dem Lichtkegel von  $r(\tau_0)$  (vgl. Abb. 14.1),

$$(ct_x - ct(\tau_0))^2 = (\vec{r}_x - \vec{r}(\tau_0))^2. \quad (14.6)$$

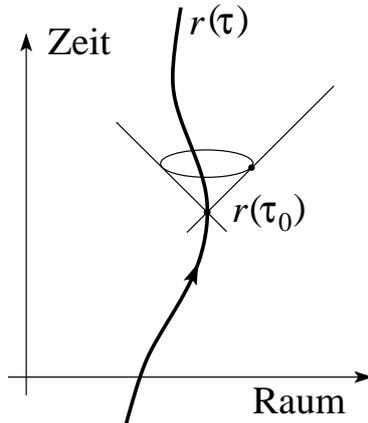


Abb. 14.1: Das elektromagnetische Signal am Ort  $x$  wird durch einen Quellterm am Ort  $r(\tau_0)$  erzeugt, wobei  $r(\tau_0)$  ein Punkt der Teilchentrajektorie ist und  $x$  auf dessen Vorwärtslichtkegel liegt.

Mit der Regel

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\partial_x f|_{x=x_i}} \quad (14.7)$$

( $x_i$  die Nullstellen von  $f$ ) und

$$\frac{d}{d\tau} [x - r(\tau)]^2 = -2[x - r(\tau)]_\alpha \frac{dr^\alpha}{d\tau}$$

können wir die Integration über  $\tau$  in (14.5) ausführen und erhalten mit der Bestimmungsgleichung für  $\tau_0$  in der Form  $t(\tau_0) = t_x - |\vec{r}_x - \vec{r}(\tau)|/c$

$$A^\alpha(x) = - \frac{q \partial_\tau r^\alpha}{\partial_\tau r^\beta [x - r(\tau)]_\beta} \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (14.8)$$

In nichtkovarianter Form können wir das Resultat mit Hilfe von

$$\begin{aligned}
\partial_\tau r_\alpha (x-r)^\alpha &= -c\gamma \underbrace{(ct_x - ct)}_R + \gamma \vec{v} \cdot \underbrace{(\vec{r}_x - \vec{r})}_{R\vec{n}} \\
&= -c\gamma R + \gamma R \vec{v} \cdot \vec{n} \\
&= -\gamma c R \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c}\right) \\
&= -\gamma c R (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})
\end{aligned} \tag{14.9}$$

( $\vec{n}$  = Richtung,  $R$  = Distanz Quelle-Beobachter, die Konsistenz zwischen  $R = c(t_x - t)$  und  $\vec{r}_x - \vec{r} = R\vec{n}$  wird durch (14.6) garantiert) umschreiben auf

$$\begin{aligned}
\phi(t_x, \vec{r}_x) &= \left. \frac{q}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right|_{\text{ret}}, \\
\vec{A}(t_x, \vec{r}_x) &= \left. \frac{q\vec{\beta}}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right|_{\text{ret}}.
\end{aligned} \tag{14.10}$$

Die Potentiale (14.10) lassen sich im Limes  $\beta \rightarrow 0$  mit (5.34) und (5.46) herleiten. Der Index  $|_{\text{ret}}$  soll uns daran erinnern, dass wir den Ausdruck zur Zeit  $t(\tau_0) = t_x - R(\tau_0)/c$  evaluieren<sup>1</sup>. Die Potentiale (14.8), (14.10) sind die *Liénard-Wiechert Potentiale*.

Im nächsten Schritt berechnen wir die zu den Potentialen (14.10) gehörigen *elektromagnetischen Felder*. Statt von (14.8) starten wir von (14.5) und berechnen die in  $F^{\alpha\beta}$  auftretenden Ableitungen  $\partial^\alpha A^\beta$ . Die Ableitung  $\partial^\alpha$  wirkt auf die Funktionen  $\Theta$  und  $\delta$ .  $\partial^0 \Theta$  liefert eine  $\delta$ -Funktion  $\delta(ct_x - ct)$ ; eingesetzt in die  $\delta$ -Funktion erhalten wir  $\delta([x-r]^2) = \delta(R^2)$ . Wir wählen  $x$  nicht auf der Weltlinie und entsprechend können wir diesen Term ignorieren. Der verbleibende Term hat die Form

$$\partial^\alpha A^\beta = 2q \int d\tau \partial_\tau r^\beta \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \partial^\alpha \delta([x - r(\tau)]^2). \tag{14.11}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\partial^\alpha \delta(f) &= \partial^\alpha f \partial_f \delta(f) = \partial^\alpha f (\partial_\tau f)^{-1} \partial_\tau \delta(f) \\
&\stackrel{f=[x-r]^2}{=} \frac{(x-r)^\alpha}{\partial_\tau r_\beta (x-r)^\beta} \partial_\tau \delta([x-r]^2),
\end{aligned}$$

und partieller Integration erhalten wir

$$\partial^\alpha A^\beta = -2q \int d\tau \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x-r)^\alpha \partial_\tau r^\beta}{\partial_\tau r_\rho (x-r)^\rho} \right] \Theta(x_0 - r_0(\tau)) \delta([x - r(\tau)]^2). \tag{14.12}$$

<sup>1</sup>Vorgehen: wähle  $x = (ct_x, \vec{r}_x)$ , zeichne den Rückwärtskegel von  $x$  aus, der Durchstoßpunkt der Weltlinie  $r(\tau)$  mit dem Rückwärtskegel definiert  $\tau_0, \vec{n}, R$ .

Der Ausdruck (14.12) entspricht der Form (14.5) mit  $\partial_\tau r^\alpha$  ersetzt durch  $\partial_\tau[\dots]$ . Analog zur Herleitung von (14.8) erhalten wir für  $F^{\alpha\beta}$  das Resultat

$$F^{\alpha\beta} = \frac{q}{\partial_\tau r_\rho (x-r)^\rho} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{(x-r)^\alpha \partial_\tau r^\beta - (x-r)^\beta \partial_\tau r^\alpha}{\partial_\tau r_\rho (x-r)^\rho} \right] \Big|_{\tau=\tau_0}. \quad (14.13)$$

Um die Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  in nichtkovarianter Form zu finden, benötigen wir die Relationen

$$\begin{aligned} (x-r)^\alpha &= (R, R\vec{n}), \\ \partial_\tau r^\alpha &= (c\gamma, c\gamma\vec{\beta}), \\ \partial_\tau r_\alpha (x-r)^\alpha &= -\gamma c R (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}), \\ \partial_\tau \vec{\beta} &= \partial_\tau t \partial_t \vec{\beta} = \gamma \dot{\vec{\beta}}, \\ \partial_\tau \gamma &= (1 - \beta^2)^{-3/2} (\vec{\beta} \cdot \partial_\tau \vec{\beta}) = \gamma^4 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}, \\ \partial_\tau^2 r^\alpha &= (c\gamma^4 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}, c\gamma^2 \dot{\vec{\beta}} + c\gamma^4 \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})), \\ \partial_\tau \tau [\partial_\tau r_\alpha (x-r)^\alpha] &= c^2 + (x-r)_\alpha \partial_\tau^2 r^\alpha, \end{aligned} \quad (14.14)$$

und erhalten die Felder

$$\begin{aligned} \vec{E}(t_x, \vec{r}_x) &= q \left[ \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{\gamma^2 (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} \right]_{\text{ret}} + \underbrace{\frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}}_{\text{Strahlung}}, \\ \vec{B}(t_x, \vec{r}_x) &= [\vec{n} \times \vec{E}]_{\text{ret}}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Beachte, wie die Felder in Komponenten  $\propto \vec{\beta}/R^2$  (Geschwindigkeitsterm) und  $\propto \dot{\vec{\beta}}/R$  (Beschleunigungsterm) zerfallen. Der Beschleunigungsterm beschreibt ein typisches Strahlungsfeld mit  $\vec{n}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  paarweise orthogonal und  $E$ ,  $B$  proportional zu  $1/R$ . Nur dieser Term ist für die Energieabstrahlung verantwortlich. Für eine gleichförmig bewegte Ladung  $\dot{\vec{\beta}} = \text{const.}$  fällt der zweite Term weg und der erste reduziert sich auf das Resultat (11.102). In der Folge studieren wir die abgestrahlte Leistung beschleunigter Teilchen, erst im nichtrelativistischen Limes und dann für den allgemeinen relativistischen Fall. Wir konzentrieren uns hauptsächlich auf lineare und zirkuläre Bewegungen.

## 14.1 Strahlung nichtrelativistischer beschleunigter Teilchen

Im Limes  $\beta \ll 1$  reduziert sich der Strahlungsanteil von (14.15) auf

$$\vec{E}_{\text{str}} = \frac{q}{c} \left[ \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})}{R} \right]_{\text{ret}}. \quad (14.16)$$

Die abgestrahlte Leistung ergibt sich via Poynting-Vektor zu (vgl. Abb. 14.2)

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}_{\text{str}}|^2 \cdot \vec{n}, \quad (14.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{c}{4\pi} |R\vec{E}_{\text{str}}|^2 \\ &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Die Integration über den Raumwinkel ergibt für die gesammte abgestrahlte

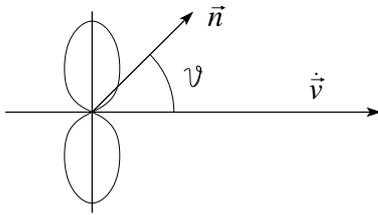


Abb. 14.2: Winkelabhängigkeit der von einem beschleunigten nichtrelativistischen Teilchen abgestrahlten Leistung

Leistung das Resultat

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \dot{v}^2 \quad (\text{Larmor}). \quad (14.19)$$

## 14.2 Strahlung relativistischer beschleunigter Teilchen

Wir verallgemeinern das Resultat (14.19), indem wir bemerken, dass  $P$  eine Lorentzinvariante sein muss.<sup>2</sup> Die Verallgemeinerung von

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt} \right)$$

ist der invariante Ausdruck

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \frac{dp_\alpha}{d\tau} \frac{dp^\alpha}{d\tau}. \quad (14.20)$$

Mit  $p^\alpha = (E/c, \vec{p}) = (\gamma mc, \gamma m \vec{v})$  erhalten wir aus (14.20) das (Liénard) Resultat in nicht kovarianter Form

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left[ \dot{\vec{\beta}} - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right]. \quad (14.21)$$

<sup>2</sup>Diese Aussage ist nicht trivial; sie folgt aus der Transformationseigenschaft des Energie-Impuls-Tensors.

Mit der äusseren Kraft (vergleiche zum Beispiel (12.1))

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma mc \left[ \dot{\vec{\beta}} + \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} \right] \quad (14.22)$$

sehen wir, dass die Strahlungsverluste bei gegebener Kraft  $\vec{F}$  für leichte Teilchen am grössten sind.

Im folgenden werten wir die Ausdrücke (14.20) und (14.21) für die Fälle des Linear- und Kreisbeschleunigers aus. In der Analyse von (14.20) erweist sich folgende Umformung als nützlich

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} \frac{dp^\alpha}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} \left( \frac{dE}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2 = -\beta^2 \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2, \quad (14.23)$$

wobei wir benutzt haben, dass (es ist  $\partial_\tau \gamma = (v\gamma^3/c^2)\partial_\tau v$ )

$$\beta \frac{dp}{d\tau} = \frac{mv^2}{c} \frac{d\gamma}{d\tau} + \frac{m\gamma v}{c} \frac{dv}{d\tau} = mc \frac{d\gamma}{d\tau} \underbrace{\left( \frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right)}_{=1} = \frac{1}{c} \frac{dE}{d\tau}.$$

Für den Linearbeschleuniger ist  $(\partial_\tau \vec{p})^2 = (\partial_\tau p)^2$  und daher ist

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{dp}{d\tau} \right)^2. \quad (14.24)$$

Andererseits ist für den Kreisbeschleuniger der radiale Anteil an der Beschleunigung viel grösser als der Azimutale,  $(\partial_\tau \vec{p})^2 \approx \gamma^2 \omega^2 p^2 \gg (\partial_\tau E)^2/c^2 = \beta^2 (\partial_\tau p)^2$  und damit ist

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} \frac{dp^\alpha}{d\tau} \approx \left( \frac{d\vec{p}}{d\tau} \right)^2. \quad (14.25)$$

Die Berechnung von  $\partial_\tau p$  für den Linearbeschleuniger ergibt mit (14.22)  $(\partial_\tau p)^2 = (\partial_\tau \vec{p})^2 = \gamma^2 (\partial_t \vec{p})^2 = \gamma^2 F^2$  und mit  $(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) \vec{\beta} = \beta^2 \dot{\vec{\beta}}$  ist

$$(\partial_\tau p)^2 = \gamma^8 m^2 v^2. \quad (14.26)$$

Damit erhalten wir die abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^6 \dot{v}^2, \quad \text{Linearb.} \quad (14.27)$$

in Übereinstimmung mit (14.21) und  $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} = 0$ . Für den Kreisbeschleuniger ist  $\partial_\tau \vec{p} = \gamma \partial_t \vec{p} \approx m\gamma^2 \dot{v}$  (benutze (14.22) mit  $\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}} \approx 0$ ) und die abgestrahlte Leistung ist

$$P \approx \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^4 \dot{v}^2, \quad \text{Kreisb.} \quad (14.28)$$

wiederum in Übereinstimmung mit (14.21) und  $[\dots] \approx \dot{\beta}^2 (1 - \beta^2) = \dot{\beta}^2 / \gamma^2$ .

Die abgestrahlte Leistung des Linearbeschleunigers ist klein: die Beschleunigung  $\dot{v}$  ist durch die zugeführte Energie bestimmt und mit  $F = \partial_x E$  lässt sich (14.27) umschreiben zu

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{m^2 c^3} \left( \frac{dE}{dx} \right)^2; \quad \text{Linearb.} \quad (14.29)$$

die relativen Verluste ergeben sich zu

$$\frac{P}{dE/dt} \stackrel{\beta \rightarrow 1}{\sim} \frac{2}{3} \frac{q^2}{m c^2} \frac{1}{m c^2} \frac{dE}{dx}. \quad (14.30)$$

Für ein Elektron mit  $m = m_e$ ,  $q = e$  ist  $e^2/mc^2 = 2.82$  fm der klassische Elektronradius,  $m_e c^2 \sim 0.5$  MeV, und ein typisches Beschleunigungsfeld misst  $\partial_x E \sim 10$  MeV/m, woraus sich eine kleine Verlustrate ergibt. Anders für den *Kreisbeschleuniger*, wo die Beschleunigung  $\dot{v}$  in radialer Richtung dominiert,  $\dot{v} \approx \rho \omega$  mit den Bahnradius  $\rho$ . Die abgestrahlte Leistung lässt sich dann in der Form

$$P \approx \frac{2}{3} \frac{q^2 c}{\rho^2} \gamma^4 \beta^4, \quad \text{Kreisb.} \quad (14.31)$$

schreiben. Die Verluste pro Zyklus sind gegeben durch (für relativistische Elektronen ist  $\beta \approx 1$ )

$$\frac{2\pi}{\omega} P[\text{MeV}] = \delta E = \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4 \sim \frac{1}{10} \frac{(E[\text{GeV}])^4}{\rho[\text{m}]}. \quad (14.32)$$

Für ein modernes Synchrotron mit  $E \approx 3$  GeV,  $\rho \approx 100$  m findet man Verluste im  $10^2$  keV Bereich.

Schliesslich schreiben wir für den Vergleich zwischen Linear- und Kreisbeschleunigern die abgestrahlte Leistung bei gegebener Kraft  $\vec{F} = \partial_t \vec{p}$ ,

$$\begin{aligned} P_{\text{Kreis}} &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3 m^2} \gamma^2 \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2, \\ P_{\text{linear}} &= \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3 m^2} \left( \frac{d\vec{p}}{dt} \right)^2. \end{aligned} \quad (14.33)$$

Beachte, dass die Kraft im Linearbeschleuniger longitudinal ist, im Kreisbeschleuniger aber viel grösser und transversal.

### 14.2.1 Winkelverteilung der Strahlung

Das Resultat (14.15) gibt für die Radialkomponente der Strahlung

$$[\vec{S} \cdot \vec{n}]_{\text{ret}} = \frac{q^2}{4\pi c} \left[ \frac{1}{R^2} \left| \frac{\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3} \right| \right]_{\text{ret}}. \quad (14.34)$$

Die dominante relativistische Korrektur ist der Faktor  $(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3$  im Nenner (von der Transformation des Laborsystems ins Teilchensystem, siehe (11.102)). Dieser Faktor führt auf eine Vorwärtsausrichtung der Strahlung (grösste Korrektur für  $\vec{\beta} \cdot \vec{n} \approx 1$ ). Wir betrachten die durch das Teilchen im Zeitintervall  $t \in [T_1, T_2]$  emittierte Strahlung ( $t$ =Teilchenzeit)

$$E = \int_{T_1+R(T_1)/c}^{T_2+R(T_2)/c} dt_x [\vec{S} \cdot \vec{n}]_{\text{ret}} = \int_{T_1}^{T_2} dt \vec{S} \cdot \vec{n} \frac{dt_x}{dt}. \tag{14.35}$$

Eine vernünftige Grösse ist dann die in der Teilchenzeit abgestrahlte Leistung  $(\vec{S} \cdot \vec{n}) dt_x/dt$ ,

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = R^2(\vec{S} \cdot \vec{n}) \frac{dt_x}{dt} = R^2(\vec{S} \cdot \vec{n})(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}). \tag{14.36}$$

Wir nehmen an, dass das Teilchen nur kurze Zeit beschleunigt werde, so dass  $\vec{\beta}, \dot{\vec{\beta}} \approx \text{const.}$  Weiter sei der Beobachtungspunkt weit entfernt, so dass  $\vec{n}, R \approx \text{const.}$  Dann gibt uns (14.36) die Winkelverteilung der Strahlung in der Form

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c} \frac{|\vec{n} \times [(\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}]|^2}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^5} \tag{14.37}$$

$$= \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5} \tag{14.38}$$

(mit  $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$  im *Linear-Beschleuniger*). Der Vergleich mit (14.18) zeigt, dass die Strahlung mit  $\beta \rightarrow 1$  zunehmend nach vorne gerichtet und verstärkt wird, vgl. Abb. 14.3. Mit  $\vartheta_{\text{max}} \approx 1/2\gamma$  für  $\beta \approx 1$  und  $1 - \beta \cos \vartheta \approx (1 + \gamma^2 \vartheta^2)/2\gamma^2$  finden wir

$$\left. \frac{dP}{d\Omega} \right|_{\beta \approx 1} \approx \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} 32\gamma^8 \frac{(\gamma\vartheta)^2}{[1 + (\gamma\vartheta)^2]^5}. \tag{14.39}$$

Die Integration über den Raumwinkel ergibt

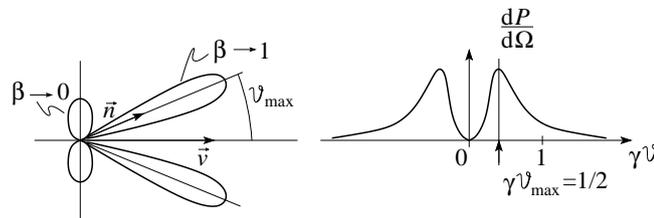


Abb. 14.3: Winkelabhängigkeit der von einem beschleunigten relativistischen Teilchen abgestrahlten Leistung.

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^6 \dot{v}^2, \quad (14.40)$$

in Übereinstimmung mit (14.21). Für den *Kreisbeschleuniger* mit  $\dot{\vec{\beta}} \perp \vec{\beta}$  erhalten wir aus (14.37) das Resultat

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^2}{(1 - \beta \cos \vartheta)^3} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \vartheta)^2} \right] \quad (14.41)$$

mit der Geometrie wie in Abb. 14.4 skizziert. Wiederum resultiert ein Vorwärts-

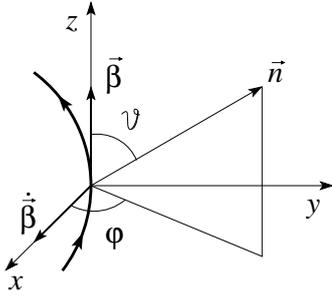


Abb. 14.4: Geometrie des Kreisbeschleunigers mit kartesischen und sphärischen Koordinaten

peak,

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{q^2 \dot{v}^2}{4\pi c^3} \frac{4\gamma^6}{(1 + \gamma^2 \vartheta^2)^3} \left[ 1 - \frac{4\gamma^2 \vartheta^2 \cos^2 \varphi}{(1 + (\gamma \vartheta)^2)^2} \right], \quad (14.42)$$

und die totale abgestrahlte Leistung ist (vergleiche mit (14.28))

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} \gamma^4 \dot{v}^2. \quad (14.43)$$

### 14.2.2 Synchrotronstrahlung

Ein relativistisches Teilchen auf einer Kreisbahn strahlt ein enges Lichtbündel in Vorwärtsrichtung ab. Dem Beobachter erscheinen diese Pulse wie Lichtblitze eines Leuchtturms, vgl. Abb. 14.5. Diese Lichtblitze haben die Periode  $L_0/c = T_0 = 2\pi\rho/v$  und eine Dauer  $L/c = T$ . Die Länge  $L$  findet man durch folgende Überlegungen: Die Apertur des Strahls  $\delta\vartheta \sim 1/\gamma$  ergibt die Illuminationszeit  $\Delta t = 2\pi T_0/\delta\vartheta = \rho/\gamma v$ . Während dieser Zeit legt die Front des Pulses die Strecke  $D = c\Delta t = \rho/\gamma\beta$  zurück, während das Teilchen sich um die Strecke  $d = v\Delta t = \rho/\gamma$  vorwärts bewegt. Die Pulslänge im Raum ist demnach  $L = D - d = (\rho/\gamma)(1/\beta - 1) \approx \rho/2\gamma^3$  oder  $T = L/c = \rho/2c\gamma^3$  in der Zeit. Für den Beobachter ergibt diese kurze Pulsdauer ein breites Frequenzspektrum  $\omega \sim 1/T \sim (c/\rho)\gamma^3 \approx \omega_0\gamma^3$ . Das Spektrum ist um einen Faktor  $\gamma^3$  breiter als die Fundamentalfrequenz  $\omega_0$ . Ein Synchrotron erzeugt also Strahlung in einem breiten Frequenzbereich, von Vakuum-UV über weiche Röntgenstrahlen bis in den Bereich harter Röntgenstrahlen (VUV  $\sim 10 - 100\text{eV}$ , weiche Röntgen  $\sim 0.1 - 3\text{keV}$ , harte

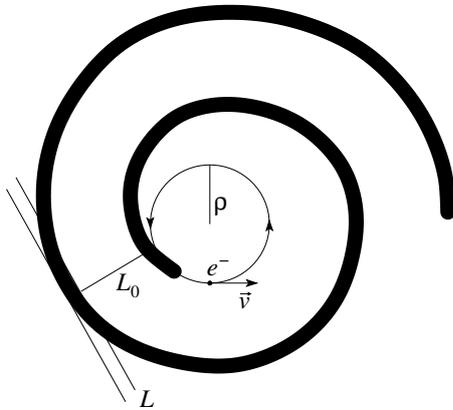


Abb. 14.5: Strahlungsmuster von Elektronen in einem Kreisbeschleuniger (Synchrotron). Der Beobachter registriert Lichtblitze mit breitem Frequenzspektrum  $\Delta\omega \sim \gamma^3\omega_0$ ,  $\omega_0$  die Fundamentalfrequenz. Siehe Text für die Bedeutung der Längen  $L$  und  $L_0$ .

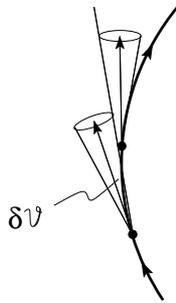


Abb. 14.6: Zur Apertur der Synchrotronstrahlung: Im Winkelsegment  $\delta\vartheta$  wird Licht in Richtung des Beobachters ausgesendet.

Röntgen  $\sim 3 - 100\text{keV}$ ). Mit  $\lambda = ch/E = 1.24 \cdot 10^4 \text{\AA}/E[\text{eV}]$  ergeben sich im harten Röntgenbereich Wellenlängen im Sub-Ångström-Bereich, welche sich hervorragend für die Untersuchung von Festkörpern und molekularen Strukturen eignen. Überall auf der Welt werden heute moderne Synchrotronanlagen gebaut. Auch die Schweiz realisierte eine Lichtquelle (SLS) am Paul-Scherrer-Institut in Villigen (2001), siehe Abbn. 14.7, 14.8 und 14.9.

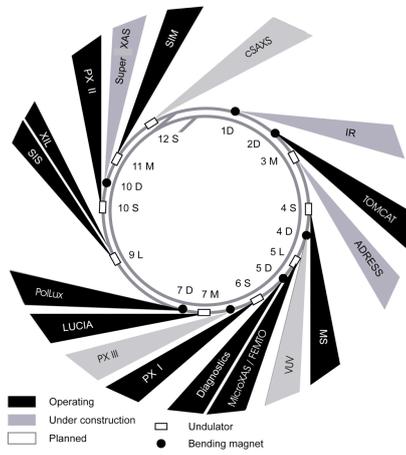


Abb. 14.7: Strahllinien an der 'Swiss Light Source' (SLS) am Paul Scherrer Institut. Äusserer Ring: Speicherring, innerer Ring: Booster, Fortsatz beim Strahl 12S: LINAC (vgl. Fig. 14.8).

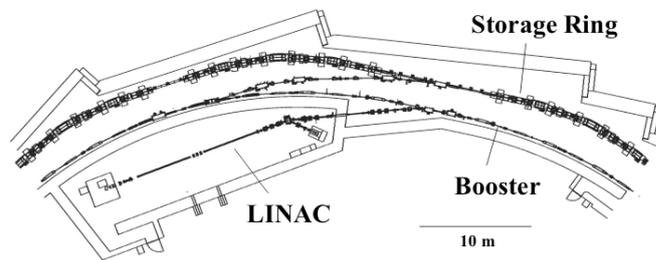


Abb. 14.8: Layout mit LINAC (Linear Accelerator), Boosterring und Speicherring der SLS am Paul Scherrer Institut.

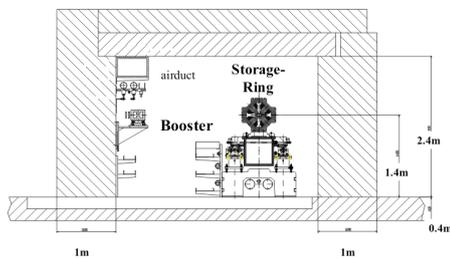


Abb. 14.9: Strahlentunnel mit Speicher- und Boosterring an der SLS am Paul Scherrer Institut.

# Index

- $Q$ -Faktor, 178
- Äquipotentiallinien, 40
- Äquivalenzprinzip, 271
- Äther, 242
  
- Abbildung
  - konforme, 92
  - lineare, 250
- Abendrot, 208
- Ableitung
  - kontravariant, 272
  - kovariant, 272
  - totale, 116
- Abschirmung, 139
- Abschneidefrequenz, 166
- Addition
  - Geschwindigkeiten, 261, 262
- Additions Theorem, 56
- Aharonov-Bohm, 124
- Ampère, 75
- Ampère Blatt, 91
- Ampèregesetz, 76
- Analogie
  - Elektro- und Magnetostatik, 81
- analytische Fortsetzung, 126
- Analytizität, 155
- Antenne, 187, 197
- Antwortfunktion, 155
- Approximation
  - Born, 206
  - Eikonal, 223
  - quasi-klassische, 223
  - WKB, 223
- Arbeit, 20, 118
- Atome, 93
- avanciert, 126
  
- Babinet Prinzip, 219, 237
- Barkhausen Rauschen, 107
- Basis, 41
- Basisvektoren, 45
- Besselfunktion, 62
  - modifizierte, 65
  - sphärische, 66
- Besselgleichung, 62
- Beugung
  - Fraunhofer, 212, 218, 228
  - Fresnel, 212, 218, 232, 236
  - Halbebene, 236
  - Kreisblende, 227, 230
  - Kresischeibe, 226
  - Rechteck, 229
  - Skalarfelder, 212
  - Spalt, 229, 232
  - Vektorfelder, 237
- Beugung = Diffraktion, 212
- Bewegungsgleichung
  - relativistische, 279
  - Teilchen im Feld, 285
- Bianchi-Identität, 276
- Bildladung, 36
- Biot-Savart, 75
- Bohrsches Magneton, 86
- Boost, 256
- Bornsche Approximation, 206
- Brewsterwinkel, 148
  
- Cauchy, 157
- Cauchy-Riemann, 39
- Christoffelsymbol, 50, 272
- Clausius-Mosotti, 101, 209
- Cornu Spirale, 233
- Coulomb

- Gesetz, 17
- Dämpfung
  - Atmosphäre, 208
- Depolarisation, 111
- Detektor, 213
- Diamagnetismus, 4, 94
- Dielektrische Kugel, 109
- Dielektrizitätskonstante, 96, 100
  - longitudinale, 138
  - transversale, 138
- Differentialgleichung
  - elliptische, 70
- Dipol
  - atomar, 93
  - Feld, 73
  - Kontaktterm, 73, 85
  - magnetisch, 83
- Dirac, 135
- Dispersion, 139
  - relativistische, 265
  - TE und TM Moden, 166
  - TEM Moden, 168
- Dispersive Medien, 151
- Dissipation
  - $Q$ -Faktor, 178
- Divergenz, 16
- Doppelleiter, 162
- Dopplereffekt, 260
- Drehimpuls, 135
- Drehmoment, 75
- Drift, 286
- Dualität, 135
- Dualraum, 250
  
- ebene Wellen, 137, 139
- Effekt
  - Doppler, 260
- Eichfreiheit, 81, 122
  - in der ART, 277
- Eichinvarianz, 81, 281
- Eichtransformation, 122
- Eichung
  - Coulomb, 81, 122
  - Lorentz, 123, 266
  - Strahlungs-, 123
  - transversale, 123
- Eigenwertproblem, 42, 51, 165
- Eigenzeit, 257
- Einheiten, 7
  - cgs/esu, 17
  - Diskussion, 133
  - elektrostatik, 17
  - Gauss, 134
  - Induktivität, 91
  - Kapazität, 32
  - Konsistenz, 131
  - Leitfähigkeit, 112
  - magnetische Induktion, 77
  - MKSA, 17, 134
  - Potential, 22
  - Strom, 76
- Einstein
  - Summenkonvention, 243, 250
- Einsteingleichungen, 277
- Elektrische Verschiebung, 96
- elektrisches Feld, 17
- elektromotorische Kraft, 116
- Elektrostatik, 17
- Elliptische Integrale, 83
- Energie
  - Abstrahlung, 292
  - Dipole, 74
  - Dissipation, 174
  - elektrostatische, 28, 73
    - im Medium, 99
  - Feldenergie, 29
  - magnetisch, 88
    - im Medium, 104
  - magnetische, 118
  - potentielle, 20
  - relativistische, 264
  - Selbstenergie, 29
- Energiedichte, 128
  - ebene Wellen, 141
  - in Medien, 131
- Energieflussdichte, 129
- Energiestromdichte, 128

- in Medien, 131
- Entwicklung
  - $1/r$ , 188
  - $\exp(ikr)/r$ , 188
- Erzeugende
  - infinitesimale, 254
- Euler Konstante
  - $C = 0.5772$ , 63
- Euler-Lagrange Gleichung, 279
- Eulerwinkel, 257
- evaneszent, 171
- Faraday, 115, 124
- Fehlerintegral, 233
- Feld
  - Dipol, 84
  - elektrische, 17
  - longitudinal, 10, 19
  - Skalar, 132
    - Pseudo, 132
  - transversal, 10
  - Vektor
    - axiales, 132
    - polares, 132
- Feldüberhöhung
  - an Spitze, 60
- Feldkompression, 269
- Feldstärketensor, 267
  - dualer, 267
- Fernbereich, 83
- Fernzone, 189, 190
- Ferroelektrika, 108
- Ferromagnetismus, 106
- Flächenelement, 46
- Fluktuationen
  - kritische, 210
- Fluss
  - magnetisch, 116
- Form
  - quadratische, 250
- Fourier, 14
- Frank, Walter, 124
- Fraunhofer Beugung, 212, 218, 228
- Fresnel Beugung, 212, 218, 232, 236
- Fresnelintegral, 218, 233
- Fuchs Ansatz, 51
- Funktionen
  - $\delta$ , 12
  - analytische, 39
  - Bessel, 62
    - modifiziert, 65
    - sphärische, 66, 188
  - charakteristische, 13
  - Gauss, 159
  - Green, 15, 26, 38, 68, 124
    - avanciert, 127
    - Kugelkoordinaten, 56
    - retardiert, 127, 289
    - Wellengleichung, 187
  - Hankel, 63
    - sphärische, 188
  - harmonische, 15, 39
  - Heaviside, 13
  - hypergeometrische, 59
  - Kugel, 53
  - Lagrange, 280
  - Legendre, 52, 59
  - Neumann, 62
  - normiert, 41, 64
  - orthogonal, 41
  - orthonormiert, 52
  - Raum, 54, 70
  - vollständig, 41, 52, 64
- Galilei
  - Gruppe, 241
  - Invariant, 242
  - Transformation, 241
- Galileiinvarianz, 116, 134
- Gauss, 11, 16, 48, 97
- Gebiete
  - einfach zusammenhängend, 12
- Generatoren, 255
- Geometrische Optik, 211
- Geschichte, 5
- Geschwindigkeit
  - Gruppen, 159, 166
  - Phasen, 159, 166

- Geschwindigkeitsaddition, 261  
 Gesetz  
   Ampère, 76  
   Coulomb, 17  
   Faraday, 115, 117  
   London, 113  
   Ohm, 112  
   von Rayleigh, 201, 208  
   von Snellius, 146  
 Glasfaser, 162, 180  
 Gleichung  
   Einstein, 277  
   Helmholtz, 188  
 Gleichungen  
   konstitutive, 137  
 Gravitation, 271  
   Konstante  $G = 6.673 \cdot 10^{-8} \text{ dyn cm}^2/\text{g}^2$ , 277  
   Quelle, 276  
 Green, 185  
   Identität, 11  
 Grenzflächen, 22  
 Grenzsicht  
   dielektrische, 96  
   magnetisch, 103  
 Gruppe  
   Klassen, 253  
   Lorentz, 253  
 Gruppengeschwindigkeit, 159  
   Wellenleiter, 166  
  
 Halbraum  
   leitender, 36  
 Hamilton  
   Teilchen, 281  
 Hamilton Funktion, 281  
 Hankelfunktion, 63  
 Heaviside, 124  
 Helix, 285  
 Helizität, 143  
 Helmholtzgleichung, 65, 188  
 Himmelblau, 200, 208  
 Hohlleiter, 162  
   Energiefluss, 172  
   ideal, 163  
   Kreis, 170  
   metallisch, 173  
   real, 173  
   Rechteck, 169  
 Huygens Prinzip, 212, 216  
 Hysterese  
   Dissipation, 129  
   Koerzitivität, 107  
   magnetisch, 107  
   Remanenz, 107  
   Sättigung, 107  
  
 Impedanz  
   Wellen, 168  
 Impuls  
   kanonisch, 281  
   relativistischer, 264  
 Impulsdichte, 128, 130  
   in Medien, 131  
 Impulsstromdichte, 128, 131  
   in Medien, 131  
 Index  
   kontravariant, 246  
   kovariant, 246  
 Induktion  
   Leiter, 90  
   magnetisch, 76  
 Induktionsfluss, 115  
 Induktionsgesetz, 117  
 Induktivität, 88  
 Inertialsystem, 242  
 Influenz, 24  
 Interferenz, 203  
 Invarianz  
   Eich-, 81  
   Galilei, 116, 117, 134  
   Lorentz, 117, 244  
   Translation, 164  
 Inversion, 132  
 Isolator, 4  
  
 Jacobimatrix, 245  
 Kapazität, 30

- Doppelleiter, 32
- Draht, 32
- Kugelkondensator, 31
- Plattenkondensator, 30
- Ring, 32
- Zylinderkondensator, 32
- Kausalität, 155
- Kavität, 161, 162, 177
  - im Dielektrikum, 110
  - Moden, 177
  - reale, 178
  - zylindrisch, 177
- Kirchhoff
  - Approximation, 214, 216
  - Integraltheorem, 214
- Koeffizienten, 42
- Koerzitivität, 107
- Kolloide, 205
- Kommutatoren, 257
- Kompressibilität, 210
- Konforme Abbildung, 39, 92
- konstitutive Gleichungen, 4, 137
- Kontinuitätsgleichung, 76
- Koordinaten
  - harmonische, 277
  - krummlinige, 44
  - Kugel, 15, 50
- Korrelationslänge, 210
- Kovarianz
  - der Elektrodynamik, 265
  - Mechanik, 263
- Krümmung
  - Krümmungstensor, 275
  - Ricci-Tensor, 276
  - skalare, 276
- Kraft
  - elektromotorische, 116
  - Elektrostatik, 17
  - Magnetostatik, 78
  - parallele Leiter, 79
- Kraftlinien, 40
- Kramers-Kronig Relation, 157
- Kreisbeschleuniger, 295, 297
- Kugel
  - leitende, 37
- Länge, 45, 241
- längentreu, 234
- Laborsystem, 117
- Ladung  $e$ , 17
- Lagrange
  - elektromagnetisches Feld, 283
  - Proca, 283
  - Teilchen, 279, 280
- Laplace
  - Gleichung, 20
  - Operator, 42, 49
- Laplace-Problem
  - in Kugelkoordinaten, 55
- Legendre
  - Differentialgleichung, 51
  - verallgemeinerte, 53
  - Funktionen, 59
  - verallgemeinerte, 53
  - Polynome, 52
  - Rekursionen, 52
  - Rodriguez Formel, 52
- Leistung, 128
  - abgestrahlte
    - Dipolfeld, 192
- Leitfähigkeit, 138
- Lenzsche Regel, 116
- Liénard-Wiechert Potentiale, 291
- Licht
  - Beugung, 211
  - Kegel, 259
  - Streuung, 199
    - dielektrische Kugel, 201
    - Kollektion, 204
    - leitende Kugel, 203
    - Polarisation, 202
    - Wirkungsquerschnitt, 200
- Lichtkegel, 290
- Lie-Algebra, 257
- Linearbeschleuniger, 296
- lineare Abbildung, 250
- Linerakombination, 41
- Linienelement, 46

- Linienladung, 40
- London Gesetz, 113
- Lorentz
  - Gruppe, 244
  - Transformation, 243
- Lorentz Kraft, 3
- Lorentzzeichnung, 123, 187, 266
- Lorentzgruppe, 253
- Lorentzinvariant, 244
  - Skalar, 249
- Lorentzkraft, 267
- Lorentztransformation
  - inverse, 247
- Magnetfeld, 103
- magnetische Flasche, 88
- magnetische Monopole, 135
- magnetische Permeabilität, 103
- Magnetisierung, 102
- Magnetismus
  - Dia-, 94
  - Para-, 94
- Magnetostatik, 75
  - im Medium, 102
- Masse
  - schwere/träge, 271
- Matrixschreibweise, 248
- Maxwell
  - James Clark, 124
  - Spannungstensor, 130
- Maxwell Gleichungen, 3, 120
- Mechanik
  - relativistische, 263
- Medium, 4
  - dispersiv, 151
  - polarisierbar, 95
- Metall, 4
  - Leitfähigkeit, 112
  - Skineffekt, 150
- Metrik, 45, 243, 272
- Michelson-Morley, 242
- Minkowski-Raum, 243
- Moden, 161
  - Kaviät, 177
- TE, 165
- TEM, 165, 168
- TM, 165
- Monopol
  - magnetisch, 4, 84, 135
- Multipol
  - Dipol, 72
  - Entwicklung, 72, 188
  - Monopol, 72
  - Quadrupol, 72
- Nahzone, 189
- Naturgesetz, 242, 244, 271
  - kovariant, 274
    - Elektrodynamik, 275
    - Lorentzkraft, 275
    - Mechanik, 274
- Neumannfunktion, 62
- Newton Gleichungen, 241
- Normierung, 41
- Oberflächen, 22
  - Dipolschicht, 25
  - Metall, 24
- Oberflächenwiderstand, 175
- Ohmsches Gesetz, 112
- Opaleszenz
  - kritische, 209
- Operationen
  - Inversion, 132
  - Rotation, 132
  - Zeitumkehr, 132
- Operator
  - div, 47
  - grad, 46
  - Laplace, 49, 51
  - rot, 48
- Optik
  - Intensität, 221
  - Phasenfunktion, 217
- optische Intensität, 221
- optisches Theorem, 238
- Ornstein-Zernicke, 210
- Oszillatorstärke, 152

- Paramagnetismus, 94
- Parität, 253
- Parseval, 222
- Phasenfunktion, 217, 232
- Phasengeschwindigkeit, 159
  - Wellenleiter, 166
- Photon
  - Masse, 4, 21
  - massiv, 283
- Pion, 258
- Plasmafrequenz, 152
- Poisson
  - Gleichung, 19
- Polarisation
  - elliptisch, 144
  - linear, 143
  - zirkular, 143
- Polarisationsfeld, 95
- Polarisierbarkeit, 101
- Potential, 121
  - Eichfreiheit, 81
  - elektrisches, 19
  - Skalar, 19, 81
  - Vektor, 80, 81
- Poynting Theorem, 185
- Poynting Vektor, 129
  - ebene Wellen, 141
- Prinzip
  - Äquivalenz, 271
  - Babinet, 219, 237
  - Huygens, 216
  - Variation, 279
- Problem
  - Beugung, 212
- Produkt
  - äusseres, 251
  - inneres, 252
- Produktansatz, 42
- Pseudoskalarfeld, 132
- Pseudovektorfeld, 132
- Puls, 158
  - zerfliessen, 159
- pyroelektrische Phase, 108
- Q-Wert, 178
- quadratische Form, 250
- Quantenmechanik, 136, 212
- Quantisierung
  - der Ladung, 135
- quasi-1D, 161
- Quelle, 185
- Querdämpfung, 166
- Randbedingungen
  - Dirichlet, 20, 27, 165, 215
  - Neumann, 20, 28, 165, 215
- Randwertproblem, 26
  - Bildtechnik, 35
  - Geometrien, 44
  - Zylinder, 67
- Raum-Zeit
  - gekrümmte, 271
- raumartig, 259
- Rechtsschraube, 76, 115
- Reflexion
  - von Wellen, 147
- Regel
  - Lenz, 116
  - Poisson, 13
- Reihen
  - Fourier-Bessel, 63
- Relativitätstheorie
  - allgemeine, 244
- Remanenz, 107
- Residuensatz, 125
- Resonanz, 179
  - Schuhmann, 179
- retardiert, 126
- Ricci-Tensor, 276
- Richtungskosinus, 44, 217
- Rotation, 16, 132, 255
- Sättigung, 107
- Satz
  - von Gauss, 11, 48, 97
  - von Green, 11, 27, 185, 213
  - von Stokes, 11, 49, 97, 117
- Schatten, 222

- geometrische Optik, 224
- Wellenoptik, 224
- Schreibweise
  - Matrix, 248
  - Tensor, 248
- Schuhmann Resonanz, 179
- Selbstinduktion, 89
  - Leiter, 90
  - Schleife, 91
- Separation, 42, 164
- Separationsansatz, 51, 61
- Speisung, 185
- Skalarfeld, 132, 247
- Skalarprodukt, 250
- Skalenfaktoren, 45
- Skinneffekt, 150
- Skintiefe, 150, 163, 174
- Snelliusgesetz, 146
- Spannungstensor, 130
- Spektrum
  - diskret, 177
- statische Zone, 189
- Stokes, 11, 16, 49, 97, 117
- Strahlenoptik, 211, 212
- Strahlung
  - beschleunigter Teilchen, 292, 293
  - Erzeugung, 187
  - Larmor, 293
  - von geladenen Teilchen, 293
- Strahlungseichung, 123
- Strahlungsfeld
  - Dipol
    - elektrisch, 191
    - magnetisch, 195
  - Quadrupol
    - elektrisch, 196
- Strahlungswiderstand, 194
- Strahlungszone, 189
- Streuformalismus, 238
- Streuung
  - Bragg, 205
- Stromdichte
  - 4er, 265
- Stromschleife, 82
- Strukturfaktor, 205, 207
- Summenregel, 157
- Superposition, 43, 141
  - inkohärent, 205
  - kohärent, 199, 205
- Superpositionsprinzip, 18, 22
- Supraleiter, 113
- Suszeptibilität, 137
  - analytische Eigenschaften, 155
  - elektrische, 96
  - magnetisch, 103, 105
  - Pauli, 106
- Synchrotron, 295
  - Swiss Light Source (SLS), 298
- System
  - Inertial, 242
  - Labor, 117
- TART, 153
- TE Moden, 165
- TEM Moden, 165
- Tensor
  - Analysis, 245
  - Dichte, 274
  - Energie/Impuls, 276
  - Formalismus, 271
  - Gleichung, 244, 249, 272
  - kovariant, 246
  - Krümmungs-, 276
  - Lévi-Civita, 249, 273
  - Metrik, 245, 246
  - Rechnung, 272
  - Regeln, 248
  - Schreibweise, 248
- Tensoren
  - Gleichungen, 257
- Testdipol, 75
- Theorem
  - optisches, 238
- Thomson William, 124
- TM Moden, 165
- totale Ableitung, 116
- Totalreflexion, 148
- Transformation

- Dualität, 135
- Eich-, 122
- elektromagnetische Felder, 268
- Galilei, 241
- Lorentz, 243
- Transmission
  - von Wellen, 147
- Transport, 139
- Transversal
  - Eichung, 123
  - Wellen, 139
- Vektoren, 45
  - 4er, 261
  - duale, 250
  - kontravariant, 243, 245, 247
  - kovariant, 243, 245, 247
- Vektorfeld, 132
- Vektorpotential, 80
- Vergangenheit, 259
- Volumenelement, 46, 274
- Weiss Domänen, 107
- Wellen
  - auslaufende, 125
  - Dispersion, 139
  - ebene, 137
  - einlaufende, 125
  - Erzeugung, 187
  - Impedanz, 168
  - Leiter, 161
  - propagierende, 166
  - reflektiert, 144
  - transmittiert, 144
- Wellengleichung, 124
- Wellenleiter, 161
  - dielektrische, 180
  - Einkopplung, 184
  - Hohlleiter, 163
- Wellenoptik, 211, 212
- Weltbild
  - Einstein-Minkowski, 243
  - Galilei-Newton, 243
- Weltlinie, 259, 289
- Widerstand
  - Strahlung, 194
- Wien Filter, 287
- Wiener-Hopf, 212
- Wirkung, 279
- Wirkungsquerschnitt
  - differentieller, 204
- Yukawa Potential, 284
- zeitartig, 259
- Zeitdilatation, 258
- Zeitumkehr, 132, 253
- Zwischenzone, 189, 190
- Zyklotron Frequenz, 285