ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Elektrodynamik
Serie 8

SS 05
Prof. G. Blatter

Aufgabe 8.1 Meissner-Ochsenfeld-Effekt

In einem Supraleiter ist die Stromdichte gegeben durch:

$$\mathbf{j} = -\frac{c}{4\pi}\frac{1}{\lambda^2}\mathbf{A}\,, \qquad \lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi ne^2} \tag{1}$$

wobei n die Dichte der Ladungsträger ist. Dieser Ausdruck gilt in der sog. Londoneichung, in welcher das Vektorpotential $\mathbf{A}$ eindeutig durch die Bedingung $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ und die Vorgabe von $\mathbf{A}$ auf dem Rand des betrachteten Gebiets fixiert wird.

a) Warum wird $\mathbf{A}$ durch die Bedingung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ nicht vollständig festgelegt? Wie bringt dies die zusätzliche Vorgabe von $\mathbf{A}$ auf dem Rand fertig?

b) Zeige ausgehend von Gl. (1) mit Hilfe einer der Maxwellgleichungen, dass ein äusseres, an einem supraleitenden Material angelegtes Magnetfeld, im Innern des Supraleiters exponentiell abfällt (Meissner-Ochsenfeld-Effekt) und bestimme die Eindringtiefe. Hinweis: Der Einfachheit halber kannst Du annehmen, dass der Supraleiter den Halbraum $x > 0$ ausfüllt und $\mathbf{B}$ in x-Richtung zeigt.

Aufgabe 8.2 Greensche Funktion in 2 Dimensionen

Diese Übung behandelt die Greensche Funktion in 2 Dimension. Der vorgeschlagene Lösungsweg folgt mehr oder weniger jenem im Skript für 3 Dimensionen. Die Übung soll den (auch rechnerischen) Unterschied zwischen 2 und 3 Dimension aufzeigen, sowie einige Aspekte der Greenschen Funktion in der Physik veranschaulichen.

a) Berechne die Greensche Funktion zum Operator $\lambda + \nabla^2$, so dass

$$(\lambda + \nabla^2)\; G(\mathbf{r}, \lambda) = \delta^2(\mathbf{r}).$$

Tip: Benutze Fourier-Transformation und betrachte zuerst den Fall $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^+$. Ist die Greensche Funktion eindeutig definiert? Betrachte nun $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Wie kann die Greensche Funktion in diesem Fall definiert werden?

b) Finde nun die Greensche Funktion zur Wellengleichung

$$(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)\; G_W(\mathbf{r}, t) = \delta^2(\mathbf{r})\delta(t).$$

Benutze wiederum eine Fourier-Transformation, dieses Mal aber bezüglich t, und verwende das Resultat aus Teil a). Wieviele Greensche Funktionen sind im Falle der Wellengleichung möglich? Berechne die retardierte Greensche Funktion G_W^R. Diese erfüllt $G_W^R(\mathbf{r}, t) = 0$ für $t < 0$.

c) Das Resultat aus Teil b) lässt sich auch aus der Greenschen Funktion in 3 Dimensionen herleiten. Dies ist möglich, da ein eine gleichförmige Ladung entlang der z-Achse dasselbe Feld erzeugt wie eine Punktladung im Ursprung der 2D-Ebene. Daher, integriere die 3D Greensche Funktion über z um das Resultat unter b) wiederzufinden. Was ist der Unterschied zwischen 2 und 3 Dimension?

Zu den Besselfunktionen: $J_n(z)$ und $Y_n(z)$ sind die Besselfunktionen erster und zweiter Gattung. Verwendet werden auch die Hankelfunktionen (oder Besselfunktionen dritter Gattung), welche definiert sind durch $H_n^{(1)} = J_n + iY_n$ und $H_n^{(2)} = J_n - iY_n$. All diese Funktionen sind analytisch auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ (J_n auf ganz $\mathbb{C}$). $H_n^{(1)}$ kann analytisch fortgesetzt werden auf $\mathbb{R}^-$ durch $H_n^{(1)}(-x+i0^+) = -H_n^{(2)}(x)$. Hier noch einige nützliche Beziehungen:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz\cos\theta} \; \cos(n\theta)\; d\theta$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, J_0(ax)}{x^2 - b}\, dx = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(a\sqrt{b}), \qquad a \in \mathbb{R}^+,\ \mathrm{Im}\sqrt{b} > 0$$

$$\int_0^\infty J_0(ax)\sin(bx)\, dx = \frac{\theta(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$\int_0^\infty Y_0(ax)\cos(bx)\, dx = -\frac{\theta(a-b)}{\sqrt{a^2-b^2}}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Aufgabe 8.3 Interplanetarischer Segel

Eine ebene elektromagnetische Welle, welche sich im Vakuum ausbreiten soll, trifft senkrecht auf einen perfekt absorbierenden, ebenen Schirm.

a) Zeige mit Hilfe der Impulserhaltung, dass der auf den Schirm ausgeübte Druck (der sog. Strahlungsdruck) gleich der Energiedichte der Welle ist.

b) In der Erdumgebung ist der von der Sonne stammende elektromagnetische Energiefluss ungefähr $0.14\, W/cm^2$. Wie hoch wäre die durch den Strahlungsdruck der Sonne bewirkte Beschleunigung eines “interplanetaren Segels” der Masse $10^{-4} g/cm^2$ und mit den Dimensionen $10\, km \cdot 10\, km$?