ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Thermodynamik
Serie 1

HS 07
Prof. G. Blatter

Aufgabe 1.1 Rechenregeln für partielle Ableitungen

Die Variablen x, y, und z seien verknüpft durch $f(x,y,z)=0$. Gegeben sei eine Funktion $w(x,y)$ von zwei der drei Variablen. Zeige, dass

a) $$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_z\right)^{-1},$$

b) $$-1 = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_x \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_y,$$

c) $$\left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z \left.\frac{\partial y}{\partial w}\right|_z,$$

d) $$\left.\frac{\partial x}{\partial z}\right|_w = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w \left.\frac{\partial y}{\partial z}\right|_w,$$

e) $$\left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_z = \left.\frac{\partial x}{\partial y}\right|_w + \left.\frac{\partial x}{\partial w}\right|_y \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_z.$$

Aufgabe 1.2 Zustandsgrössen

Es sei bekannt, dass die „Energie“ E unter kleinen Änderungen dx, dy der externen Parameter x, y sich wie

$$\delta E = F_x dx + F_y dy$$

ändert, mit dem Vektor $\mathbf{F}(x,y) = [F_x(x,y), F_y(x,y)]$ („Kraft“). Man nennt E eine Zustandgrösse, falls δE sich als ein exaktes Differential

$$dE = \partial_x E(x,y)dx + \partial_y E(x,y)dy$$

darstellen lässt.

a) Gegeben δE (bzw. $\mathbf{F}$), zeige die Äquivalenz von folgenden zwei Aussagen:

   i) E ist eine Zustandsgrösse, d.h. $\exists E(x,y) : \mathbf{F} = \nabla E$ und

   ii) $\nabla \wedge \mathbf{F} = 0$.

b) Warum nennt man E eine Zustandsgrösse?

c) Warum sind Zustandsgrössen in der Thermodynamik von Bedeutung?

d) Wenn ein Differential δE nicht exakt ist kann man einen integrierenden Faktor $\mu(x,y)$ finden, so dass $dS = \mu(x,y)\delta E$ exakt wird. Bestimme den integrierenden Faktor $\mu(x,y)$ für

$$\delta E = (xy^2 + xye^x)dx + (2x^2y + xe^x)dy$$

unter der Annahme, dass μ nur von x abhängt. Bestimme zudem $S(x,y)$.

e) Gib je ein Beispiel aus der Thermodynamik für exakte Differentiale, nichtexakte Differentiale und integrierende Faktoren an.

Aufgabe 1.3 Kalorienverbrauch

Es gibt mindestens zwei Möglichkeiten wie der Mensch Wärme verliert: Wärmeleitung und Wärmestrahlung. Für die abgestrahlte Leistung pro Fläche gilt das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$dP^{\mathrm{Strahl.}}/dA = \sigma T^4$$

mit T der Temperatur in Kelvin und $\sigma = \pi^2 k_{\mathrm{B}}^4/60\hbar^3 c^2 = 5.7 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/m^2K^4}$. Bei der Wärmeleitung gilt die Formel

$$dP^{\mathrm{Leit.}}/dA = \lambda\, dT/dl$$

mit dem Temperaturgradienten dT/dl und der Wärmeleitfähigkeit λ; $\lambda^{\mathrm{Luft}} \approx 0.024\mathrm{W/m\,K}$, $\lambda^{\mathrm{Wasser}} \approx 0.60\mathrm{W/m\,K}$.

a) Was ist die kritische Länge l^{krit} (in Wasser und in Luft) über die eine Temperaturdifferenz von ΔT bei $T = 300\,\mathrm{K}$ abfallen muss, damit $P^{\mathrm{Strahl.}} = P^{\mathrm{Leit.}}$.

b) Welcher Prozess dominiert typischerweise in Luft bzw. Wasser; sei $T^{\mathrm{Körper}} = 40\,°\mathrm{C}$, $T^{\mathrm{Wasser,Luft}} = 20\,°\mathrm{C}$.

c) Wieviel Energie in $1\,\mathrm{kcal} = 4.2\,\mathrm{kJ}$ muss ein Mensch mit $A = 1\,\mathrm{m}^2$ täglich zu sich nehmen, um die abgestrahlte Leistung zu kompensieren?