

Quantum Field Theory I

HS 2007

G.M. Graf

ETH Zürich

Inhaltsverzeichnis

1	Relativistische Quantenmechanik	1
1.1	Vorbemerkungen zum Minkowski-Raum	1
1.2	Was ist ein Teilchen?	3
1.3	Die Klein-Gordon-Gleichung	8
1.4	Die Dirac Gleichung	12
1.5	Der nicht-relativistische Grenzfall	15
1.6	Relativistische Korrekturen	17
2	Nicht-Relativistische QED	20
2.1	Die Maxwell-Gleichungen	20
2.2	Das freie e.m. Feld als Hamiltonsches System	21
2.3	Kanonische Quantisierung	24
2.4	Nicht-Relativistische QED	26
2.5	Störungsrechnung und Thomson-Streuung	28
3	Klassische Feldtheorie	32
3.1	Erinnerungen an die klassische Mechanik	32
3.2	Klassische Felder	35
3.3	Symmetrien und Erhaltungsgrößen	37
4	Die Dirac Gleichung	45
4.1	Die quantenmechanische Lorentz-Gruppe	45
4.2	Die Weyl Gleichungen	47
4.3	Die Dirac Gleichung	49
4.4	Die Majorana Bedingung	51

5	Kanonische Quantisierung freier Felder	53
5.1	Der Fock-Raum	53
5.2	Das reelle Skalarfeld	57
5.3	Das komplexe Skalarfeld	63
5.4	Das Dirac-Feld	64
5.5	Das elektromagnetische Feld (kovariante Quantisierung)	70
6	Wechselwirkende Felder	77
6.1	Einführung	77
6.2	Die LSZ-Asymptotenbedingung	78
6.3	Die LSZ-Reduktionsformeln	81
6.4	S -Matrix und Streuquerschnitte	85
7	Störungstheorie und Feynman-Diagramme	89
7.1	Die Gell-Mann–Low-Reihe	89
7.2	Feynman–Diagramme für die φ^4 -Theorie	92
7.3	Feynman–Diagramme für die QED	97
7.4	Compton–Streuung	100
7.5	Kopplung an äussere Felder	103
8	Renormierung	106
8.1	Die 2–Punkts-Funktion in der φ^3 -Theorie	106
8.2	Dimensionelle Regularisierung	112
8.3	Ein–Schleifen-Renormierung der QED	113
8.4	Renormierung in höherer Ordnung	121
8.5	Das anomale magnetische Moment des Elektrons	125

Dank gebührt J.-P. Derendinger, J. Fröhlich, K. Hepp, W. Hunziker und Z. Kunszt, deren Vorlesungsskripte bei der Vorbereitung des vorliegenden hilfreich waren.
In \LaTeX wurde es von C. Liechi gesetzt, mit Ausnahme von Kap. 1 (A. Schultze).

Vorbemerkung

Eine fundamentale Theorie der Teilchenphysik soll:

- *relativistisch* kovariant sein. Dies schliesst Fernwirkungsgesetze weitgehend aus und bevorzugt das Nahwirkungsprinzip;
- *quantenmechanisch* sein;
- *wechselwirkende Teilchen* beschreiben.

Die *Quantenfeldtheorie* (QFT) kann diese Forderungen erfüllen. In der Tat genügt eine Feldtheorie (auch eine klassische, wie die Elektrodynamik), deren Bewegungsgleichungen durch partielle (hyperbolische) Feldgleichungen gegeben sind, dem Nahwirkungsprinzip: Dies ist der Grund, Felder als fundamentaler als Teilchen zu betrachten, obschon letztere der Beobachtung direkter zugänglich sind. Die Quantenmechanik (QM) sorgt dafür, dass die Zustände einer freien QFT (mehrere) freie Teilchen beschreiben. Auch wechselwirkende QFT's können eine Teilcheninterpretation zulassen. Damit zwingend verbunden ist die Erzeugung und Vernichtung von Teilchen.

Dies ist – kurz zusammengefasst – die Rechtfertigung der QFT. In dieser Vorlesung in erster Linie die *Quantenelektrodynamik* (QED) behandelt werden.

Einheiten

Elektrodynamik mit rationalen Einheiten (4π im Coulomb-Gesetz, nicht in den Maxwell-Gleichungen)

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cong \frac{1}{137}.$$

Ausser in den Kap. 1 und 2 ist

$$\hbar = c = 1.$$

1 Relativistische Quantenmechanik

1.1 Vorbemerkungen zum Minkowski-Raum

Koordinaten eines Ereignisses (“kontravariant”)

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix}$$

Metrik

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x^T g y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = g^{\mu\nu} x_\mu y_\nu, \\ g_{\mu\nu} &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1_3 \end{array} \right) = g^{\mu\nu}, \quad (\text{da } g^{-1} = g), \\ x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\vec{x}) \quad (\text{“kovariante” Koordinaten}). \end{aligned}$$

Lorentz-Transformation

$$x' = \Lambda x + a \quad \text{bzw.} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

mit

$$\Lambda^T g \Lambda = g, \quad a \in \mathbb{R}^4.$$

Die Λ bilden die homogene Lorentz-Gruppe, die in 4 Zusammenhangskomponenten zerfällt. Eine ist die Untergruppe

$$L_+^\uparrow = \{ \Lambda \mid \Lambda^0_0 \geq 1, \det \Lambda = +1 \}$$

der eigentlichen, orthochronen Lorentz-Transformationen; die restlichen entstehen durch Multiplikation (von links oder rechts) mit Raum- oder Zeitspiegelung

$$P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1_3 \end{array} \right), \quad T = \left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & 1_3 \end{array} \right)$$

oder mit $PT = -1$. Im Folgenden werden wir

$$(\Lambda, a) \in L_+^\uparrow \times \mathbb{R}^4$$

als die Transformationen zwischen Inertialsystemen betrachten. Unter der Zusammensetzung

$$\begin{aligned} (\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2) &= (\Lambda_1 \Lambda_2, a_1 + \Lambda_1 a_2), \\ (\Lambda, a)^{-1} &= (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a) \end{aligned} \tag{1.1}$$

bilden sie eine Gruppe (**Poincaré-Gruppe**). Eine Schar von Lorentz-Transformationen

$$\begin{aligned} x' &= \Lambda(\lambda)x + a(\lambda), \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ (\Lambda(0), a(0)) &= (1, 0) \end{aligned}$$

definiert eine **infinitesimale Lorentz-Transformation**

$$x' = \frac{d}{d\lambda}(\Lambda(\lambda)x + a(\lambda))\Big|_{\lambda=0} =: \varepsilon x + \tau,$$

d.h.

$$\varepsilon^\mu{}_\nu = \frac{d}{d\lambda}\Lambda^\mu{}_\nu(\lambda)\Big|_{\lambda=0}, \quad \tau^\sigma = \frac{da^\sigma}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0}. \quad (1.2)$$

Kurz:

$$(\varepsilon, \tau) = \frac{d}{d\lambda}(\Lambda, a)\Big|_{\lambda=0} \quad (1.3)$$

sind die Elemente der Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe. Hier ist $\tau^\mu \in \mathbb{R}$ beliebig, aber

$$\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0, \quad (1.4)$$

denn aus $\Lambda^T g \Lambda = g$ folgt $g\varepsilon + \varepsilon^T g = 0$. Wie bei jeder Lie-Algebra sind Linearkombinationen

$$\alpha_1(\varepsilon_1, \tau_1) + \alpha_2(\varepsilon_2, \tau_2) = \frac{d}{d\lambda}(\Lambda_1, a_1) \cdot (\Lambda_2, a_2)\Big|_{\lambda=0}$$

mit $\lambda_i = \alpha_i \lambda$ und Lie-Klammer

$$\begin{aligned} [(\varepsilon_1, \tau_1), (\varepsilon_2, \tau_2)] &:= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1)^{-1}(\Lambda_2, a_2)^{-1}\Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_2} (\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1)^{-1}\Big|_{\lambda_1=\lambda_2=0} \end{aligned}$$

wieder Elemente der Lie-Algebra. Hier lautet die Vertauschungsrelation

$$[(\varepsilon_1, \tau_1), (\varepsilon_2, \tau_2)] = ([\varepsilon_1, \varepsilon_2], \varepsilon_1 \tau_2 - \varepsilon_2 \tau_1). \quad (1.5)$$

Beweis: folgt aus

$$(\Lambda_1, a_1)(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1)^{-1} = (\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_1^{-1}, a_1 + \Lambda_1 a_2 - \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_1^{-1} a_1).$$

Wir entwickeln (ε, τ) nach Generatoren

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu}, \quad \tau = \tau_\sigma P^\sigma$$

mit $M^{\mu\nu} + M^{\nu\mu} = 0$; z.B.

$$M^{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(kovariante Komponenten). Genauer: $\varepsilon \equiv (\varepsilon, 0), \tau \equiv (0, \tau)$. Dann lautet (1.5)

$$\begin{aligned} [M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= (g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma), \\ [M^{\mu\nu}, P^\sigma] &= g^{\nu\sigma} P^\mu - (\mu \leftrightarrow \nu), \\ [P^\sigma, P^\rho] &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Beweis. Die letzte Gleichung ist evident. Nun die mittlere: Aus $[(\varepsilon, 0), (0, \tau)] = (0, \varepsilon\tau)$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\tau_\sigma[M^{\mu\nu}, P^\sigma] &= (\varepsilon_{\mu\nu}\tau^\nu)P^\mu = \varepsilon_{\mu\nu}\tau_\sigma g^{\nu\sigma}P^\mu \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\tau_\sigma(g^{\nu\sigma}P^\mu - (\mu \leftrightarrow \nu)), \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_{\mu\nu}, \tau_\sigma$ bis auf (1.4) beliebig sind und $\varepsilon_{\mu\nu}$ auf beiden Seiten Ausdrücke multipliziert, die antisymmetrisch in $\mu\nu$ sind. Schliesslich zur ersten Gleichung: Aus $[(\varepsilon, 0), (\tilde{\varepsilon}, 0)] = ([\varepsilon, \tilde{\varepsilon}], 0)$ folgt

$$\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\rho\sigma}[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \frac{1}{2}[\varepsilon, \tilde{\varepsilon}]_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}.$$

Die rechte Seite schreibt sich mit Hilfe von

$$[\varepsilon, \tilde{\varepsilon}]^\alpha{}_\beta = \varepsilon^\alpha{}_\nu\tilde{\varepsilon}^\nu{}_\beta - \tilde{\varepsilon}^\alpha{}_\sigma\varepsilon^\sigma{}_\beta, \quad [\varepsilon, \tilde{\varepsilon}]_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\nu}g^{\nu\rho}\tilde{\varepsilon}_{\rho\beta} - \tilde{\varepsilon}_{\alpha\sigma}g^{\sigma\mu}\varepsilon_{\mu\beta}$$

als

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\rho\sigma}(g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\sigma\mu}M^{\rho\nu}) &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\rho\sigma}((g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - g^{\sigma\mu}M^{\rho\nu}) - (\mu \leftrightarrow \nu)) \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}\tilde{\varepsilon}_{\rho\sigma}((g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} - (\mu \leftrightarrow \nu)) - (\rho \leftrightarrow \sigma)). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Die 10 Generatoren erzeugen die Symmetrien der Minkowski-Raumzeit, und zwar ($i = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} J^i &= M_{i+1}{}^{i+2} && \text{(Drehungen mit Achse } i) \\ K^i &= M_0{}^i && \text{(Boosts in Richtung } i) \\ P^i & && \text{(räumliche Translationen)} \\ P^0 & && \text{(zeitliche Translationen)}. \end{aligned}$$

Hier wurden die infinitesimalen Lorentz-Transformation wie in (1.2) mit gemischten Indizes geschrieben: $\varepsilon = \varepsilon^\mu{}_\nu M_\mu{}^\nu/2$.

1.2 Was ist ein Teilchen?

Ein freies, elementares Teilchen hat bloss kinematische Freiheitsgrade, d.h. solche, die alleine aus seiner Relation zum Bezugssystem resultieren. Dieser Vorstellung entsprechend postulierte Wigner (1939): Der Hilbertraum \mathcal{H} eines Teilchens trägt eine irreduzible Darstellung $U = U(\Lambda, a)$ der Poincaré-Gruppe. Bedeutung: passive Transformation der Zustände bei Wechsel des Bezugssystems. Die Darstellung ist projektiv, da ein Zustand einen Vektor in \mathcal{H} bis auf die Phase bestimmt, und unitär (vgl. Satz von Wigner; die antiunitäre Alternative ist bei einer kontinuierlichen Symmetriegruppe ausgeschlossen). Die Darstellung $U(\Lambda, a)$ induziert über (1.3) eine solche der infinitesimalen Lorentz-Transformationen. Für deren Erzeugenden schreiben wir

$$\begin{aligned} U(P^\mu) &=: \frac{i}{\hbar}P^\mu, \\ U(M^{\mu\nu}) &=: \frac{i}{\hbar}M^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.7}$$

damit die Komponenten P^μ (4er-Impuls), $M^{\mu\nu}$ (Drehimpuls) selbstadjungierte Operatoren sind.

Die Raum-Zeit-Translationen sind

$$U(1, a) = e^{\frac{i}{\hbar} P_\mu a^\mu}$$

und erfüllen:

$$\frac{\partial}{\partial a^\mu} U(1, a) = \frac{i}{\hbar} P_\mu U(1, a).$$

Die Schrödinger-Gleichung entspricht dem Spezialfall $\mu = 0$:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = H \psi(t)$$

für $\psi(t) = U(1, (-ct, \vec{0})) \psi_0$, ($\psi_0 \in \mathcal{H}$), und $H = cP^0$.

Aus $(1, a) \cdot (\Lambda, 0) = (\Lambda, 0) \cdot (1, \Lambda^{-1}a)$ folgt

$$e^{\frac{i}{\hbar} P_\mu a^\mu} U(\Lambda, 0) = U(\Lambda, 0) e^{\frac{i}{\hbar} P_\mu (\Lambda^{-1}a)^\mu} = U(\Lambda, 0) e^{\frac{i}{\hbar} (\Lambda P)_\mu a^\mu},$$

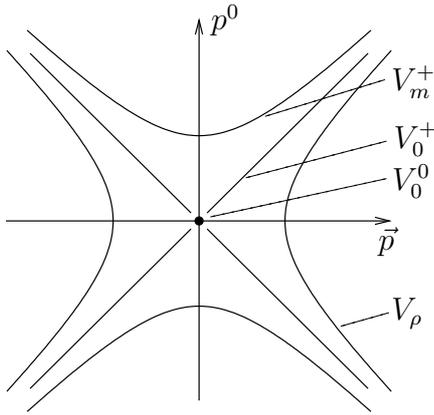
also transformiert P_μ als 4er-Vektor:

$$U(\Lambda, 0)^* P_\mu U(\Lambda, 0) = \Lambda_\mu{}^\nu P_\nu. \quad (1.8)$$

Da die Operatoren $U(1, a)$ miteinander kommutieren, können die Komponenten P^μ gemeinsam diagonalisiert werden:

$$P^\mu |\psi\rangle = p^\mu |\psi\rangle, \quad (1.9)$$

wobei der Eigenvektor $|\psi\rangle$ evtl. verallgemeinert (d.h. nicht normierbar) ist. Mit $|\psi\rangle$ sind nach (1.8) auch $U(\Lambda, 0)|\psi\rangle$ Eigenvektoren, und zwar mit Eigenwerte $p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu$. Diese bilden für die gegebene Darstellung eine Lorentz-invariante Teilmenge des \mathbb{R}^4 . Wegen der Irreduzibilität ist sie minimal, d.h. nicht die Vereinigung zwei solcher Mengen, und damit gleich der Bahn $V = \{\Lambda p \mid \Lambda \in L_+^\uparrow\}$ eines Punktes $p \in \mathbb{R}^4$ unter Lorentz-Transformationen. Davon gibt es sechs Typen:



- (i) $V_m^+ = \{p \mid p^2 = m^2, p^0 > 0\}, \quad (m > 0)$
- (ii) $V_m^- = -V_m^+$
- (iii) $V_0^+ = \{p \mid p^2 = 0, p^0 > 0\}$
- (iv) $V_0^- = -V_0^+$
- (v) $V_\rho = \{p \mid p^2 = -\rho^2\}, \quad (\rho > 0)$
- (vi) $V_0^0 = \{0\}$

(i) entspricht der klassischen Vorstellung eines massiven, relativistischen Teilchens:

$$\begin{aligned} p^\mu &= \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \\ &= m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \quad \left(\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \end{aligned}$$

und damit

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 c^2, \quad p^0 > 0.$$

(iii) gehört zu einem masselosen Teilchen.

(vi) passt zur trivialen Darstellung (1-dimensional), was dem Vakuum entspricht (danebst gibt es eine unendlich dimensionale Darstellung; sie ist unphysikalisch, vgl. Bemerkung weiter unten).

(v) beschreibt Tachyonen: $|\vec{v}| > c$ für $\vec{v} = \partial E / \partial \vec{p}$. Dieser Fall ist unphysikalisch.

(ii, iv) passen ebenfalls zu einem Teilchen der Masse $m \geq 0$, stehen aber wegen $E = cp^0 < 0$ im Widerspruch zur Konvention $dx^0/d\tau > 0$ für die Eigenzeit τ .

Bemerkungen. 1) Die Bahnen tragen ein Lorentz-invariantes Mass, $d\mu(\Lambda p) = d\mu(p)$, das bis auf ein Vielfaches eindeutig ist. In den Fällen (i, iii) ist es

$$\begin{aligned} d\mu(p) &= \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0) d^4 p \\ &= \frac{1}{2p^0} d^3 \vec{p} \quad \text{mit} \quad p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Beachte: $d^4 p$, p^2 und $\theta(p^0)$ sind invariant. Letzterer Ausdruck folgt aus

$$\delta((p^0)^2 - (\vec{p}^2 + m^2)) = \frac{1}{2|p^0|} (\delta(p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}) + \delta(p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2})). \quad (1.11)$$

(verwende $\delta(f(x)) = \sum_i |f'(x_i)|^{-1} \delta(x - x_i)$ mit Summe über $f(x_i) = 0$).

2) Es bezeichne \mathcal{H}_p ($p \in \mathbb{R}^4$) den Raum der (evtl. uneigentlichen) Eigenvektoren $|\psi\rangle$ in (1.9). Dort wurde bemerkt, dass $U(\Lambda, 0)$ eine Abbildung $\tilde{U}(\Lambda) : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_{\Lambda p}$ induziert. \mathcal{H}_p ist der Hilbertraum der inneren Freiheitsgrade, d.h. nach Elimination der Translationsfreiheitsgrade. In physikalisch sinnvollen Fällen ist \mathcal{H}_p endlich dimensional, vgl. (vi). Der Hilbertraum \mathcal{H} ist dennoch unendlich dimensional, falls die Bahn $V \ni p$ aus unendlich vielen Punkten besteht, vgl. (i, iii).

Die Masse $m \geq 0$ in (i, iii) genügt nicht, um die Darstellung, und somit das Teilchen, eindeutig zu charakterisieren. Zu diesem Zweck verwenden wir die Methode der **kleinen Gruppe**. Dies ist die Untergruppe H_p der Lorentz-Transformationen, die $p \in \mathbb{R}^4$ fest lassen:

$$H_p = \{\Lambda \in L_+^\uparrow \mid \Lambda p = p\}.$$

Man überlegt sich:

- H_p und $H_{\Lambda p}$ sind isomorph für $\Lambda \in L_+^\uparrow$.
- Die irreduziblen Darstellungen $U(\Lambda, a)$ mit Bahn $V \ni p$ stehen in bijektiver Beziehung zu den irreduziblen Darstellungen $\tilde{U}(\Lambda) : \mathcal{H}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$ von H_p . (Vorbehalt: Für projektive Darstellungen ist die Beziehung nur injektiv).

Es genügt also, die irreduziblen Darstellungen von \mathcal{H}_p für ein $p \in V_m^+$ zu finden.

$m > 0$. Für $p = (m, \vec{0})$ ist $H_p = SO(3)$. Die projektiven Darstellungen sind (s. QM) durch den **Spin** j gekennzeichnet:

$$\mathcal{D}_j, \quad (j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots) \quad (1.12)$$

mit $\dim \mathcal{D}_j = 2j + 1$.

$m = 0$. Sei $p = (p^0, 0, 0, p^0)$, ($p^0 > 0$). Lorentz-Transformationen, die p fest lassen, sind

$$\Lambda(w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & w_1 & -w_2 & 0 \\ 0 & w_2 & w_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (w = w_1 + iw_2, |w| = 1),$$

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{|t|^2}{2} & t_1 & t_2 & -\frac{|t|^2}{2} \\ t_1 & 1 & 0 & -t_1 \\ t_2 & 0 & 1 & -t_2 \\ \frac{|t|^2}{2} & t_1 & t_2 & 1 - \frac{|t|^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (t = t_1 + it_2), \quad (1.13)$$

und allgemein $\Lambda(w, t) = \Lambda(t)\Lambda(w)$. Die Gruppenmultiplikation ist

$$\Lambda(w', t')\Lambda(w, t) = (w'w, t' + w't),$$

was H_p als isomorph zur Gruppe der Bewegungen der (komplexen) Ebene

$$\Lambda(w, t) : z \mapsto wz + t, \quad (z = x + iy)$$

erweist (Euklidische Gruppe). Dabei stehen $w \in U(1)$ für die Drehungen und $t \in \mathbb{C}$ für die Translationen. Beachte die strukturelle Ähnlichkeit der Euklidischen zur Poincaré-Gruppe (1.1): Beide sind halbdirekte Produkte einer Gruppe ($U(1)$, bzw. L_+^\uparrow) mit einer abelschen Gruppe (\mathbb{C} , bzw. \mathbb{R}^4). Zur Bestimmung der irreduziblen Darstellungen von H_p kann man sich also ein zweites Mal der Methode der kleinen Gruppe bedienen. Schreibt man $\tilde{U}(\Lambda(1, t)) =: e^{i(\Xi_1 t_1 + \Xi_2 t_2)}$, so erfüllt die Erzeugende $\Xi = \Xi_1 + i\Xi_2$

$$\tilde{U}(\Lambda(w, 0))^* \Xi \tilde{U}(\Lambda(w, 0)) = w\Xi,$$

vgl. (1.8), und ihre (verallgemeinerten) Eigenwerte $\xi \in \mathbb{C}$ bilden eine minimale invariante Menge bzgl. Drehungen $\xi \mapsto w\xi$, ($|w| = 1$). Davon gibt es zwei Typen: (a) $\{\xi \mid |\xi| = R\}$, ($R > 0$) und (b) $\{0\}$. Die Bahn (a) ist unendlich und \mathcal{H}_p demzufolge unendlich dimensional und unphysikalisch, s. obige Bemerkung. Da die Bahn (b) nur aus $\xi = 0$ besteht, ist die "zweite" kleine Gruppe $U(1) \ni \Lambda(w)$ und ihre Darstellungen bestimmen die von H_p gemäss $\tilde{U}(\Lambda(w, t)) = \hat{U}(\Lambda(w))$. Da $U(1)$ abelsch ist, sind die irreduziblen Darstellungen 1-dimensional; die projektiven, unitären sind $\hat{U}(\Lambda(w)) = w^s$, ($s \in \mathbb{R}$). Nicht alle übertragen sich von H_p auf L_+^\uparrow (s. obiger Vorbehalt), sondern nur die mit **Helizität**

$$s \in \frac{\mathbb{Z}}{2}. \quad (1.14)$$

Dies ist plausibel, weil $\Lambda(w = e^{i\varphi})$ eine Drehung um die 3-Achse und Winkel φ ist, die wie alle Elemente aus $SO(3)$ höchstens 2-wertig dargestellt wird: $e^{2\pi is} = \pm 1$, d.h. (1.14).

Bemerkung. Ein besseres Argument gründet darauf, dass projektive Darstellungen der Lorentz-, bzw. Poincaré-Gruppe echte Darstellungen ihrer Überlagerungsgruppen $SL(2, \mathbb{C})$, bzw. $SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{R}^4$ sind (dazu und für das Folgende, s. Kap. 4). Damit entfällt obiger Vorbehalt. Die kleine Gruppe von p ist nun, als Untergruppe von $SL(2, \mathbb{C})$,

$$H_p = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) \mid \Lambda(A)p = p\} = \{A \in SL(2, \mathbb{C}) \mid A\tilde{p}A^* = \tilde{p}\}.$$

$m > 0$. Für $p = (m, \vec{0})$ ist $\tilde{p} = m1$ und $H_p = SU(2)$, was (1.12) bestätigt.

$m = 0$. Für $p = (p^0, 0, 0, p^0)$ ist $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 2p^0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und

$$H_p = \left\{ A = \begin{pmatrix} \bar{z} & zt \\ 0 & z \end{pmatrix} \mid t, z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \right\},$$

wobei $\Lambda(A) = \Lambda(w, t)$ mit $w = z^2$. Im Fall (b) ist die ‘‘zweite’’ kleine Gruppe wieder die Untergruppe $\cong U(1)$ von H_p bestehend aus den Elementen mit $t = 0$. Sie hat echte Darstellungen z^n , ($n \in \mathbb{Z}$). Es entsprechen ihnen die projektiven Darstellungen w^s mit $s = n/2$.

Zusammenfassend: Die kinetischen Freiheitsgrade eines Teilchens sind gekennzeichnet durch Masse $m \geq 0$ und Spin/Helizität. Diese beiden Begriffe werden vereinheitlicht durch den **Pauli-Lubanski-Vektor**

$$W_\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\nu M^{\rho\sigma},$$

wobei $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ total antisymmetrisch ist mit $\varepsilon_{0123} = 1$. Es gilt $P_\mu W^\mu = 0$ und aus den Vertauschungsrelationen (1.6) folgt

$$\begin{aligned} [P^\mu, W^\sigma] &= 0, \\ [M^{\mu\nu}, W^\sigma] &= -i\hbar(g^{\nu\sigma}W^\mu - (\mu \leftrightarrow \nu)). \end{aligned}$$

Die zweite Beziehung, oder die Definition selbst, besagt, dass W^μ wie ein Vektor unter L_+^\uparrow transformiert (Pseudovektor bzgl. Raumspiegelung). Die erste, dass W^μ die Faser \mathcal{H}_p bewahrt. Darin ist P^ν gleich dem Eigenwert p^ν , also W^μ eine infinitesimale Lorentz-Transformation, die der kleinen Gruppe entspricht. In 1 + 3-Notation ist

$$W^0 = \vec{P} \cdot \vec{J}, \quad \vec{W} = P^0 \vec{J} + \vec{P} \wedge \vec{K}.$$

$m > 0$. Für $p = (m, \vec{0})$ ist $W = m(0, \vec{J})$. Die Erzeugende der kleinen Gruppe, \vec{J} , ist der (räumliche) Drehimpuls. Da $\vec{p} = 0$ im Ruhesystem des Teilchens, kommt dem Spin \vec{J} die Bedeutung des Eigendrehimpulses zu.

$m = 0$. Für $p = (p^0, 0, 0, p^0)$ ist $W = p^0(J^3, J^1 - K^2, J^2 + K^1, J^3)$. Die Erzeugenden von (1.13)

$$\Xi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K^1 + J^2, \quad \Xi_2 = K^2 - J^1$$

sind in (b) durch $\xi_1 = \xi_2 = 0$ dargestellt, sodass $W^\mu = J^3 p^\mu$. Im Unterschied zu massiven Fall, ist $W \parallel p$ und die Helizität J^3 gibt die Proportionalität an.

Schliesst man die Raumspiegelung mit ein, so bleibt \mathcal{D}_j invariant ($m > 0$); für $m = 0$ bleiben die Darstellungen $\pm s$ nur zusammen invariant.

Bemerkung. Beachte, dass der Teilchenbegriff zwar einen Impuls- aber nicht zwingend einen Ortsoperator (\rightarrow scharfe Ortsangabe, Punktteilchen) beinhaltet. Diese Schlussfolgerung wird durch folgende heuristische Überlegung gestützt (Landau, Peierls 1931). Aus der Unschärferelation

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{\Delta p}$$

mit

$$(\Delta p)^2 = \langle \vec{p}^2 \rangle - \langle \vec{p} \rangle^2 \leq \langle \vec{p}^2 \rangle \leq \langle \vec{p}^2 \rangle + m^2 c^2 = \left(\frac{E}{c} \right)^2$$

folgt

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar c}{E}.$$

Für ein Teilchen der Geschwindigkeit $\ll c$ (bzw. Energie $E \lesssim mc^2$) bedeutet dies

$$\Delta x \gtrsim \frac{\hbar}{mc}$$

(= Compton-Wellenlänge $\cong 3.8 \cdot 10^{-13} \text{m}$ für ein Elektron); bei höheren Energien, $E \gg mc^2$, können Teilchen erzeugt werden, sodass die "Lage **des** Teilchens" ihren Sinn verliert.

1.3 Die Klein-Gordon-Gleichung

Zustände freier Teilchen mit festem 4er-Impuls sind nach de Broglie

$$\psi(x) = e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} = e^{-ik_\mu x^\mu}$$

mit $k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k} \right)$ und

$$p = \hbar k, \quad \text{d.h.} \quad \begin{cases} E = \hbar \omega \\ \vec{p} = \hbar \vec{k} \end{cases}.$$

Das Dispersionsgesetz

$$\omega(\vec{k}) = c \sqrt{\vec{k}^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}$$

folgt aus

$$p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (1.15)$$

Die Gruppengeschwindigkeit

$$\frac{d\omega}{d\vec{k}} = \frac{dE}{d\vec{p}} = c \frac{dp^0}{d\vec{p}} = c \frac{\vec{p}}{p^0} = \vec{v}$$

ist die klassische Geschwindigkeit. Allgemeine Zustände sind Superpositionen

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \underbrace{d^4 p \theta(p^0) \delta(p^2 - m^2)}_{d\mu(p)} \tilde{\psi}(p) e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}} \\ &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \frac{d^3 p}{2p^0} \tilde{\psi}(\vec{p}) e^{-i\frac{p \cdot x}{\hbar}}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

wobei p^0 durch (1.15) gegeben ist. Hier ist $\tilde{\psi}(\vec{p}) \equiv \tilde{\psi}(p^0, \vec{p})$ eine Funktion auf der positiven Massenschale V_m^+ . Gl. (1.16) beschreibt alle Lösungen “positiver Energie” der Klein-Gordon Gleichung

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right)\psi(x) = 0. \quad (1.17)$$

(Die allgemeine Lösung ist (1.16) **ohne** den Faktor $\theta(p^0)$: notwendig dafür, dass $e^{-ipx/\hbar}$ eine Lösung ist, ist $p^2 = m^2 c^2$, nicht aber $p^0 > 0$.)

Der Zustand $\psi(x)$ ist durch die Anfangswerte $\psi(0, \vec{x})$ seiner Wellenfunktion

$$\psi(0, \vec{x}) = \int \frac{d^3 p}{2p^0} \tilde{\psi}(\vec{p}) e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{x}}{\hbar}}$$

bestimmt:

$$\psi(0, \vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\tilde{\psi}(\vec{p})}{2p^0} \xrightarrow{(1.16)} \psi(x^0, \vec{x})$$

mit \mathcal{F} = Fouriertransformation. Dementsprechend erfüllen die Lösungen eine Differentialgleichung **1. Ordnung** in t :

$$-\frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \quad (1.18)$$

wobei H im Impulsraum als Multiplikationsoperator wirkt:

$$H : \tilde{\psi}(p) \longmapsto c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} \tilde{\psi}(\vec{p}). \quad (1.19)$$

Im Ortsraum ist aber H **kein** Differentialoperator, da die Energie $c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2}$ kein Polynom in \vec{p} ist.

Lorentzinvarianz

Unter der Lorentz-Transformation $x' = \Lambda x + a$ soll $\psi'(x') = \psi(x)$ gelten (Skalarfeld), d.h.

$$\psi'(x) = \psi(\Lambda^{-1}(x - a)). \quad (1.20)$$

Wegen $p \cdot \Lambda^{-1}(x - a) = \Lambda p \cdot (x - a)$ und $d\mu(\Lambda p) = d\mu(p)$ findet man

$$\psi'(x) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d\mu(p) \tilde{\psi}(\Lambda^{-1}p) e^{i\frac{p\alpha}{\hbar}} e^{-i\frac{p\alpha}{\hbar}},$$

wobei wir statt p die Variable Λp als Integrationsvariable gesetzt haben. Insbesondere ist ψ' wieder eine Lösung positiver Energie, d.h. von der Form (1.16). Das Transformationsgesetz für $\tilde{\psi}(p)$ ist

$$U(\Lambda, a) : \tilde{\psi}(p) \longmapsto e^{i\frac{p\alpha}{\hbar}} \tilde{\psi}(\Lambda^{-1}p). \quad (1.21)$$

Damit kann man ein Lorentz-invariantes Skalarprodukt angeben:

$$\begin{aligned} (\psi, \varphi) &:= \int d\mu(p) \overline{\tilde{\psi}(p)} \tilde{\varphi}(p) \\ &= \int \frac{d^3 \vec{p}}{2p^0} \overline{\tilde{\psi}(\vec{p})} \tilde{\varphi}(\vec{p}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Dies definiert den **Hilbertraum** des Systems,

$$\mathcal{H} = \{\psi \mid (\psi, \psi) < \infty\}$$

und macht $U(\Lambda, a)$ zu einer **unitären Darstellung der Poincaré-Gruppe**. Die 10 Erzeugenden dieser Darstellung sind die (4-dim. erweiterten) Impuls- und Drehimpulsoperatoren.

Impuls. Die Impulsoperatoren (1.7) sind

$$P_\mu = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial a^\mu} U(1, a) \Big|_{a=0}.$$

Aus (1.20), bzw. (1.21) folgt dann

$$\begin{aligned} P_\mu : \psi(x) &\longmapsto i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu}, \\ \tilde{\psi}(p) &\longmapsto p_\mu \tilde{\psi}(p). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $H = cP_0$ der Hamiltonoperator (Erzeugende der Zeittranslationen).

Drehimpuls. Die Drehimpulsoperatoren sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M^{\mu\nu} &= \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\lambda} U(\Lambda, 0) \Big|_{\lambda=0}, \\ M_{\mu\nu} + M_{\nu\mu} &= 0 \end{aligned}$$

für $\varepsilon = d\Lambda/d\lambda \Big|_{\lambda=0}$. Aus (1.20, 1.21) findet man

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu} : \psi(x) &\longmapsto \frac{\hbar}{i} \left(x_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} - x_\nu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \psi, \\ \tilde{\psi}(p) &\longmapsto \frac{\hbar}{i} \left(p_\mu \frac{\partial}{\partial p^\nu} - p_\nu \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right) \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Die Raumkomponenten ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) sind die gewöhnlichen Operatoren des Bahndrehimpulses. Sie verschwinden für $p = (m, \vec{0})$. Es folgt, dass das Teilchen Spin 0 hat, s. (1.12).

Es folgt:

- (i) Die P^μ , $M^{\mu\nu}$ erfüllen bis auf die Ersetzung (1.7) die Vertauschungsrelationen (1.6). Insbesondere ist

$$\begin{aligned} [H, P_\mu] &= 0, & (\mu = 0, \dots, 4) \\ [H, M_{ik}] &= 0, & (i, k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Dies sind Erhaltungssätze für P_μ , M_{ik} .

- (ii) Die Erwartungswerte von P_μ , $M_{\mu\nu}$ transformieren sich unter Lorentz-Transformationen wie die entsprechenden klassischen Grössen, vgl. (1.6).

Obschon man so in natürlicher Weise die Quantenmechanik eines freien relativistischen Teilchens konstruieren kann, bestehen Unterschiede zur nichtrelativistischen Theorie, die zuerst als Mängel empfunden wurden:

- (a) H ist kein Differentialoperator — die Schrödingergleichung (1.18) also keine partielle Differentialgleichung.

(b) Wir schreiben das Skalarprodukt (1.22) in der \vec{x} -Darstellung. Aus (1.16) folgt

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^0} = -\frac{i}{2\hbar} \cdot (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p \tilde{\psi}(\vec{p}) e^{-i\frac{p\vec{x}}{\hbar}}, \quad (1.23)$$

also ist nach der Parsevalschen Gleichung

$$\int_{x^0=ct} d^3x \overline{\psi(x)} \frac{\partial\varphi}{\partial x^0} = -\frac{i}{2\hbar} \int \frac{d^3p}{2p^0} \overline{\tilde{\psi}(\vec{p})} \tilde{\varphi}(\vec{p}) = -\frac{i}{2\hbar} (\psi, \varphi),$$

oder, symmetrisch geschrieben,

$$(\psi, \varphi) = \int_{x^0=ct} d^3x i\hbar \left(\bar{\psi} \frac{\partial\varphi}{\partial x^0} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^0} \varphi \right) \quad (1.24)$$

(ist unabhängig von t). Insbesondere ist

$$\|\psi\|^2 = (\psi, \psi) = \int_{x^0=ct} d^3x j_0(x) \quad (1.25)$$

mit j_0 der 0-Komponente eines 4er-Stroms

$$j_\mu = i\hbar \left(\bar{\psi} \frac{\partial\psi}{\partial x^\mu} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^\mu} \psi \right), \quad (1.26)$$

der divergenzfrei ist:

$$\partial^\mu j_\mu = i\hbar (\bar{\psi}(\square\psi) - (\square\bar{\psi})\psi) = 0$$

wegen (1.17).

Soweit besteht Übereinstimmung zur nichtrelativistischen Schrödinger-Gleichung, für welche Wahrscheinlichkeitsdichte und -Stromdichte

$$\begin{aligned} \rho(x) &= |\psi(x)|^2, \\ \vec{j}(x) &= \frac{\hbar}{2im} (\bar{\psi} \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \bar{\psi}) \psi) \end{aligned}$$

ebenfalls die Kontinuitätsgleichung erfüllen:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0.$$

Bloss:

$$j^0(x) = \text{Re} \left(2i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x^0} \bar{\psi}(x) \right)$$

ist nicht positiv definit! Dies verbietet es, $j^0(x^0, \vec{x})$ als Wahrscheinlichkeitsdichte bezgl. \vec{x} aufzufassen.

Beweis: Für $x = 0$ ist nach (1.23)

$$\begin{aligned} 2i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial x^0} &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int d^3p \tilde{\psi}(\vec{p}), \\ \overline{\psi(0)} &= (2\pi\hbar)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2p^0} \overline{\tilde{\psi}(\vec{p})}. \end{aligned}$$

Da 1 und $(2p^0)^{-1}$ linear unabhängige Funktionen von \vec{p} sind, ist es möglich, ein reelles $\tilde{\psi}$ so zu wählen, dass die beiden Integrale verschiedene Vorzeichen haben. \square

Angesichts der Bemerkung von Landau und Peierls brauchen (a,b) nicht als Mängel aufgefasst zu werden: Zu (a): (1.19) ist nicht lokal in \vec{x} auf der Längenskala \hbar/mc . Zu (b): auf derselben Skala ist j^0 nicht positiv definit. Die Dirac-Gleichung (s. nächsten Abschnitt) behebt allerdings diese vermeintlichen Mängel.

Manchmal werden nebst Lösungen $\psi_+(x)$ positiver Energie auch solche, $\psi_-(x)$, negativer Energie zugelassen und einem **Antiteilchen** zugeordnet. Stabilität verlangt, dass die möglichen Energien nach unten beschränkt sind. So sind (etwas unnatürlich?) die Lösungen der Energien $-E < 0$ als Anti-Teilchen der Energie $+E > 0$ aufzufassen. Werden Zustände $\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$ durch ihre Anfangsbedingungen dargestellt, so reicht $\psi(0, \vec{x})$ nicht aus, wohl aber $\psi_{\pm}(0, \vec{x})$. Äquivalent dazu ist die Angabe von $\psi(0, \vec{x})$ **und** $\partial_0\psi(0, \vec{x})$. Im Unterschied zur Zeitentwicklung von ψ_{\pm} , vgl. (1.18, 1.19), ist die von $(\psi, \partial_0\psi)$ durch die Klein-Gordon-Gl. gegeben. Da es sich um eine partielle Differentialgleichung handelt, löst dies zwar Mangel (a), aber nicht (b). Als Skalarprodukte bieten sich das positiv definite $(\psi_+, \psi_+) + (\psi_-, \psi_-)$ an mit denselben Eigenschaften wie oben, oder das nun davon verschiedene

$$\langle \psi, \psi \rangle = i\hbar \int_{x^0=0} d^3x \left(\bar{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x^0} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x^0} \psi \right).$$

Da $\psi(0, \vec{x})$ und $\partial_0\psi(0, \vec{x})$ unabhängig voneinander gewählt werden können, ist letzteres nicht positiv definit. Es eignet sich deshalb nicht zur quantenmechanischen Wahrscheinlichkeits-Interpretation. Hingegen legt $\langle \psi, \psi \rangle = (\psi_+, \psi_+) - (\psi_-, \psi_-)$ nahe, dass Teilchen und Antiteilchen entgegengesetzt gleiche Ladungen haben, sowie die Interpretation von $\langle \psi, \psi \rangle$ als Erwartungswert der Ladung (und des Integranden als Dichte). In der QFT werden Antiteilchen überzeugender auftreten.

Die Kopplung an ein **äusseren elektromagnetischen** Feld kann durch “minimale Kopplung”, $i\hbar\partial_{\mu} \rightsquigarrow i\hbar\partial_{\mu} - eA_{\mu}$, beschrieben werden:

$$\left((i\hbar\partial_{\mu} - \frac{e}{c}A_{\mu})(i\hbar\partial^{\mu} - \frac{e}{c}A^{\mu}) - m^2c^2 \right) \psi = 0,$$

wobei $A^{\mu} = (\varphi, \vec{A})$ das 4er-Potential ist. Der Strom

$$j_{\mu} = e \left(\bar{\psi} \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{e}{c} A_{\mu} \right) \psi + \psi \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{e}{c} A_{\mu} \right) \bar{\psi} \right) \quad (1.27)$$

erfüllt zwar $\partial^{\mu} j_{\mu} = 0$, aber er lässt keine quantenmechanische Wahrscheinlichkeits-Interpretation zu, nicht einmal mehr für Lösungen positiver Energie (im Fall, wo A_{μ} zeitunabhängig ist, also Energie eine “gute Quantenzahl” ist); stattdessen die eines elektrischen Stroms eines klassischen Felds, s. Kap. 3.

1.4 Die Dirac Gleichung

Dirac (1926) suchte statt (1.18) eine partielle Differentialgl. 1. Ordnung in t und \vec{x} , welche die Klein-Gordon Gleichung (1.17) zur Folge hat (Analogie: Maxwell-Gleichungen \rightarrow

Wellengleichung). Für ein freies Teilchen der Masse m ist sein Ansatz:

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad (1.28)$$

mit $p_\mu = i\hbar\partial_\mu$. Dabei ist $\psi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine n -komponentige Wellenfunktion (Dirac-Spinor) und die γ^μ sind komplexe $n \times n$ Matrizen. Wegen

$$(\gamma^\nu p_\nu + mc)(\gamma^\mu p_\mu - mc) = \gamma^\nu \gamma^\mu p_\nu p_\mu - (mc)^2$$

folgt aus (1.28) die Klein-Gordon Gl. $(p^2 - m^2 c^2)\psi = 0$, falls

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} := \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.29)$$

d.h. $(\gamma^0)^2 = -(\gamma^i)^2 = 1$, ($i = 1, 2, 3$) und $\gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu$ für $\mu \neq \nu$.

Satz. Die Antivertauschungsrelationen (1.29) (Dirac-Algebra) besitzen bis auf Äquivalenz genau eine irreduzible Darstellung. Ihre Dimension ist $n = 4$ (ohne Beweis).

Insbesondere sind je zwei 4-dimensionale Darstellungen γ^μ und $\tilde{\gamma}^\mu$ äquivalent:

$$\tilde{\gamma}^\mu = S^{-1} \gamma^\mu S, \quad (1.30)$$

wobei S (4×4 Matrix) bis auf einen komplexen Faktor bestimmt ist. In allen Darstellungen ist $\text{tr } \gamma^\mu = 0$. Dies folgt aus $(\gamma^\nu)^2 = g^{\nu\nu}$, $\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = -g^{\nu\nu} \gamma^\mu$, ($\mu \neq \nu$) und Spurbildung.

Eine Darstellung ist die **Standard-Darstellung**

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (1.31)$$

Matrixelemente sind 2×2 -Blöcke und $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die Pauli-Matrizen. Später werden wir weiteren Darstellungen (chirale, Majorana) begegnen. Ihnen gemeinsam ist

$$\gamma^{0*} = \gamma^0, \quad \gamma^{k*} = -\gamma^k, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (1.32)$$

und das wollen wir fortan annehmen (in (1.30) sind noch unitäre S zugelassen).

Lösungen mit festem 4er-Impuls sind

$$\psi(x) = u e^{-ip \cdot x / \hbar} \quad (u \in \mathbb{C}^4),$$

falls

$$(\not{p} - mc)u = 0, \quad (1.33)$$

wobei $\not{p} := p_\mu \gamma^\mu$. Wegen $\not{p}^2 = p^2 1$ und $\text{tr } \not{p} = 0$ sind die Eigenwerte von \not{p} entgegengesetzt gleich und je 2-fach entartet. Also erfordert (1.33), dass

$$p \in V_m^+ \quad \text{oder} \quad p \in V_m^-. \quad (1.34)$$

Der 2-dim. Raum der u weist auf einen weiteren Freiheitsgrad des Dirac-Teilchens hin (Spin 1/2).

Die Dirac-Gleichung lässt sich durch Multiplikation mit γ^0 als Schrödinger-Gleichung auffassen

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi \quad (1.35)$$

mit

$$\begin{aligned} H &= c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2, & \vec{p} &= -i\hbar\vec{\nabla}, \\ \alpha_i &= \gamma^0\gamma^i, & \beta &= \gamma^0. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Diese Matrizen erfüllen

$$\alpha_k^2 = \beta^2 = 1, \quad \alpha_k\beta + \beta\alpha_k = 0, \quad \alpha_k\alpha_l + \alpha_l\alpha_k = 0 \quad (k \neq l)$$

und sind wegen (1.32) hermitesch. Also ist $H = H^*$ auf dem Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ mit dem Skalarprodukt

$$(\psi, \varphi) = \int d^3x \psi^*(x)\varphi(x). \quad (1.37)$$

Hier sind $\psi(x), \varphi(x)$ aufgefasst als Spaltenvektoren und $\psi^*(x)$ als der zu $\psi(x)$ hermitesch konjugierte Zeilenvektor. Wegen $H = H^*$ ist $\|\psi\|^2$ erhalten und zudem — im Unterschied zu (1.25) — das Integral über eine positive Dichte, die als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden kann. Diese ist zudem die Komponente $j^0(x) = \psi^*(x)\psi(x)$ einer 4er-Stromdichte

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x),$$

wobei

$$\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)\gamma^0$$

ein Zeilenvektor ist (Dirac-konjugierter Spinor). Er erfüllt

$$\bar{\psi}(x)(i\hbar\overleftarrow{\partial}_\mu + mc) = 0 \quad (1.38)$$

($\overleftarrow{\partial}$: Ableitung nach links) und der Strom somit die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = 0.$$

Gl. (1.38) selbst folgt durch hermitesche Konjugation von (1.28), d.h.: $\psi^*(x)(i\hbar\gamma^{\mu*}\overleftarrow{\partial}_\mu + mc) = 0$, Multiplikation von rechts mit γ^0 und $\gamma^{\mu*}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu$, vgl. (1.32, 1.29). Die beiden (vermeintlichen) Mängel der Klein-Gordon Gleichung sind bei der Dirac-Gleichung beseitigt: H ist ein Differentialoperator und es gibt eine positive Wahrscheinlichkeitsdichte. Der Preis dafür ist, dass die Energie nicht mehr nach unten beschränkt ist. In der Tat ist das Spektrum von H

$$\sigma(H) = (-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, \infty). \quad (1.39)$$

Die zeitunabhängige Schrödingergleichung $H\varphi = E\varphi$, zusammen mit dem Ansatz $\varphi(\vec{x}) = ue^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}$, ist nämlich dasselbe wie (1.35) für $\psi(t, \vec{x}) = \varphi(\vec{x})e^{-iEt/\hbar}$, was seinerseits dasselbe ist wie (1.33) für $E = cp^0$. Aus (1.34) folgt $E = \pm c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}$ und damit (1.39).

Dirac (1930) ordnet den Lösungen der Energie $-E < 0$ ein Antiteilchen der Energie $+E > 0$ zu. Im Unterschied zum Fall der Klein-Gordon-Gleichung liefert er dafür eine Überlegung im Rahmen einer qualitativen Vielteilchentheorie und auf der Grundlage des Pauli-Prinzips (sie ist damit nur für Fermionen gültig). Es ist nicht die abschliessende Sicht der Dinge (\rightarrow QFT), hat aber Anwendungen auch in der Festkörpertheorie (Elektronen in Metallen und Halbleitern, Fermigas). Die Grundidee ist: Alle Zustände negativer Energie sind bereits (einmal) besetzt im Vielteilchengrundzustand (Dirac-See). Dass geladene Teilchen dabei keine Repulsion erfahren, liegt an der Isotropie. Konsequenzen:

- Die Zustände positiver Energie sind stabil, denn sie können wegen des Pauli-Prinzips nicht in einen (schon besetzten) Zustand negativer Energie übergehen. Eine Lösung der Energie $-E < 0$ ist als Loch im Dirac-See zu verstehen. Das Fehlen eines Teilchens dieser Energie ist eine Anregung der Energie $+E > 0$.
- Schaffen oder Füllen eines Lochs entspricht der Erzeugung, bzw. Vernichtung eines Teilchen-Antiteilchen Paares. Die umgesetzte Energie ist nach (1.39) $\geq 2mc^2$.

Kurz darauf (1932) wurde das Antiteilchen des Elektrons (Positron) entdeckt.

Lorentz-Kovarianz werden wir erst im Kap. 4 ausführlich besprechen. Schon jetzt sei erwähnt, dass die Erzeugenden der infinitesimalen Lorentz-Transformationen dargestellt sind als

$$P_\mu = i\hbar\partial_\mu, \quad M_{\mu\nu} = -i\hbar(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu) - \hbar\sigma_{\mu\nu} \quad (1.40)$$

mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Insbesondere sind die Erzeugenden der Drehungen ($i = 1, 2, 3$)

$$J^i = M_{i+1}{}^{i+2} = i\hbar(x_{i+1}\partial_{i+2} - x_{i+2}\partial_{i+1}) + \hbar\sigma_{i+1i+2}$$

und speziell in der Standard-Darstellung (1.31)

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{x} \wedge \vec{p} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}) \\ &\equiv \vec{L} + \vec{S}. \end{aligned}$$

Der Spinanteil \vec{S} erfüllt

$$\vec{S}^2 = \frac{\hbar^2}{4} \cdot 3 = \hbar^2 s(s+1)$$

für $s = 1/2$: Die Dirac-Gleichung beschreibt ein Teilchen vom Spin $1/2$.

Ein Teilchen im äusseren elektromagnetischen Feld kann durch minimale Kopplung beschrieben werden:

$$(\gamma^\mu(p_\mu - \frac{e}{c}A_\mu) - mc)\psi(x) = 0. \quad (1.41)$$

Die Gleichung ist forminvariant unter Eichtransformationen

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\chi, \quad \psi \rightarrow e^{-ie\chi/c}\psi.$$

Der Hamiltonoperator

$$H = c\vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) + \beta mc^2 + e\varphi$$

ist weiterhin selbstadjungiert, $H = H^*$, bzgl. des Skalarprodukts (1.37).

1.5 Der nicht-relativistische Grenzfall

In der Standard-Darstellung (1.31) ist, s. (1.36),

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie ist besonders geeignet für die Diskussion des nicht-relativistischen Limes, da β diagonal ist. Nach Abzug der Ruheenergie mc^2 ist

$$H - mc^2 = \begin{pmatrix} e\varphi & c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & e\varphi - 2mc^2 \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

$$\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}.$$

Wir zerlegen ψ in “obere” und “untere” Komponenten (Bispinoren)

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad u, v \in \mathbb{C}^2$$

und diskutieren Zustände mit kleiner nicht-relativistischer Energie

$$\|(H - mc^2)\psi\| \ll mc^2\|\psi\|.$$

Die untere Gleichung in

$$(H - mc^2)\psi = \begin{pmatrix} e\varphi u + c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}v \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}u + (e\varphi - 2mc^2)v \end{pmatrix} \quad (1.43)$$

liefert

$$\|c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}u + (e\varphi - 2mc^2)v\| \ll mc^2(\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}.$$

Falls auch $e\varphi \ll mc^2$ kann sie approximativ gelöst werden:

$$v = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2mc}u. \quad (1.44)$$

Die Zustände nicht-relativistischer Energie sind also durch die **obere Komponente** u beschreibbar. Durch Einsetzen von (1.44) in die obere Gl. (1.43) findet man den Hamiltonoperator $H - mc^2$ in dieser reduzierten Beschreibung:

$$H^0 = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + e\varphi. \quad (1.45)$$

Wegen

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{a})(\vec{\sigma} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \cdot \vec{b})1 + i(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{\sigma}$$

ist

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) = \vec{\pi}^2 + i(\vec{\pi} \wedge \vec{\pi}) \cdot \vec{\sigma}.$$

Da die Operatoren π_i nicht kommutieren, ist $\vec{\pi} \wedge \vec{\pi} \neq 0$, z.B.:

$$\begin{aligned} (\vec{\pi} \wedge \vec{\pi})_1 &= \pi_2\pi_3 - \pi_3\pi_2 = [\pi_2, \pi_3] \\ &= -\frac{e}{c}[p_2, A_3] - \frac{e}{c}[A_2, p_3] \\ &= i\frac{e\hbar}{c}\left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right) = i\frac{e\hbar}{c}B_1 \end{aligned}$$

mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$. So findet man:

$$H^0 = \frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\varphi - \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma} \cdot \vec{B}.$$

Der nicht-relativistische Limes der Dirac-Theorie liefert genau die Pauli-Theorie des Elektrons mit Spin. Der letzte Term ist

$$-g \cdot \frac{e}{2mc} \vec{S} \cdot \vec{B} \quad \text{mit} \quad \vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (1.46)$$

und $g = 2$. Die Dirac-Theorie (mit minimaler Kopplung) liefert das richtige **magnetische Moment** des Elektrons.

1.6 Relativistische Korrekturen

Formal ergibt sich die Pauli-Theorie aus (1.42) im Limes $c \rightarrow \infty$ bei festem $\vec{\pi}$ ($\vec{\pi}$ hat in diesem Limes die Bedeutung von $m\vec{v}$). Der Faktor e/c in $\vec{\pi} = \vec{p} - (e/c)\vec{A}$ bleibt also fest. Wir suchen im Rahmen der Störungsrechnung eine Zuordnung $I(t) : L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^4)$ und einen effektiven Hamiltonoperator $H_{\text{eff}}(t)$ auf $L^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{C}^2)$, sodass

$$U(t, 0)I(0) = I(t)U_{\text{eff}}(t, 0),$$

wobei U , bzw. U_{eff} , durch $H - mc^2$, bzw. H_{eff} erzeugt werden. Gleichbedeutend ist

$$(H - mc^2)I = IH_{\text{eff}} + i\hbar\dot{I}. \quad (1.47)$$

Zu beachten ist, dass mit $I(t)$, $H_{\text{eff}}(t)$ auch IA , $A^{-1}H_{\text{eff}}A - i\hbar A^{-1}\dot{A}$ eine Lösung von (1.47) ist, wobei $A = A(t)$ beliebig ist. Für H_{eff} und $I(t)$ setzen wir Potenzreihen an. Wegen der Faktoren c ausserhalb der Diagonalen in (1.42), und c^2 darin, können die Reihen angesetzt werden als

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}} &= H^0 + c^{-2}H^1 + \dots \\ Iu_0 &= \begin{pmatrix} u_0 + c^{-2}u_1 + \dots \\ c^{-1}v_0 + c^{-3}v_1 + \dots \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei v_0, u_1, v_1, \dots linear in u_0 sind, übrigens in Übereinstimmung mit (1.44): $v_0 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})u_0/2m$. Dieser Ansatz bleibt von derselben Form für $A(t) = 1 + c^{-2}A_1 + c^{-4}A_2 + \dots$, womit über u_1, u_2 (nicht aber v_0, v_1, \dots) verfügt werden kann. Wir nutzen dies, damit $I(t)$ eine Isometrie ist (und somit H_{eff} selbstadjungiert). Wegen

$$\|I(t)u_0\|^2 = \|u_0\|^2 + c^{-2}(\|v_0\|^2 + (u_0, u_1) + (u_1, u_0)) + \dots$$

kann dies erreicht werden für

$$v_0 =: I_0 u_0 \quad , \quad u_1 =: -\frac{1}{2} I_0^* I_0 u_0 \quad , \quad v_1 =: I_1 u_0 .$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} (H - mc^2)I &= \begin{pmatrix} e\varphi & c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ c\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & e\varphi - 2mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{c^{-2}}{2} I_0^* I_0 + \dots \\ c^{-1} I_0 + c^{-3} I_1 + \dots \end{pmatrix}, \\ IH_{\text{eff}} &= \begin{pmatrix} H^0 + c^{-2}(H^1 - \frac{1}{2} I_0^* I_0 H^0) + \dots \\ c^{-1} I_0 H^0 + c^{-3}(I_0 H^1 + I_1 H^0) + \dots \end{pmatrix}, \\ i\hbar\dot{I} &= i\hbar \begin{pmatrix} 0 - \frac{c^{-2}}{2} (I_0^* I_0) + \dots \\ c^{-1} \dot{I}_0 + c^{-3} \dot{I}_1 + \dots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und setzen in (1.47) ein. Beim Koeffizientenvergleich liefert der untere (bzw. obere) Bispinor die ungeraden (bzw. geraden) Potenzen von c^{-1} .

$$\begin{aligned} c^1 : \quad & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} - 2mI_0 = 0 \\ c^0 : \quad & e\varphi + (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})I_0 = H^0, \end{aligned}$$

d.h.

$$I_0 = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} = I_0^*, \quad H^0 = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} + e\varphi,$$

was (1.44, 1.45) reproduziert.

$$\begin{aligned} c^{-1} : e\varphi I_0 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2} I_0^2 - 2mI_1 &= I_0 H^0 + i\hbar \dot{I}_0 \\ c^{-2} : -\frac{e\varphi}{2} I_0^2 + \underbrace{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}_{I_0 \cdot 2m} I_1 &= H^1 - \frac{1}{2} I_0^2 H^0 - \frac{i\hbar}{2} (I_0 \dot{I}_0 + \dot{I}_0 I_0). \end{aligned}$$

Elimination von I_1 aus diesen Gleichungen liefert

$$\begin{aligned} H^1 &= -\frac{e\varphi}{2} I_0^2 + I_0 (e\varphi I_0 - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2} I_0^2 - I_0 H^0 - i\hbar \dot{I}_0) + \frac{1}{2} I_0^2 H^0 + \frac{i\hbar}{2} (I_0 \dot{I}_0 - \dot{I}_0 I_0) \\ &= I_0 e\varphi I_0 - \frac{1}{2} (H^0 I_0^2 + I_0^2 H^0) + \frac{i\hbar}{2} [\dot{I}_0, I_0] \\ &= -\frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^4}{8m^3} - \frac{ie\hbar}{8m^2} [\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}, \vec{\sigma} \cdot \vec{E}] \end{aligned} \tag{1.48}$$

unter Verwendung von

$$\begin{aligned} I_0 e\varphi I_0 - \frac{1}{2} \{e\varphi, I_0\} &= \frac{1}{2} [I_0, [e\varphi, I_0]] = \frac{ie\hbar}{8m^2} [\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}, \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \varphi], \\ \frac{i\hbar}{2} [\dot{I}_0, I_0] &= \frac{ie\hbar}{8m^2} [\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}, \vec{\sigma} \cdot \frac{\dot{\vec{A}}}{c}] \end{aligned}$$

und von $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - c^{-1} \partial \vec{A} / \partial t$. Der letzte Kommutator in (1.48) ist

$$[\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}, \vec{\sigma} \cdot \vec{E}] = \underbrace{\vec{\pi} \vec{E} - \vec{E} \vec{\pi}}_{-i\hbar \operatorname{div} \vec{E}} + i\vec{\sigma} (\vec{\pi} \wedge \vec{E} - \vec{E} \wedge \vec{\pi}).$$

Resultat: Der gestörte Pauli-Operator lautet mitsamt Ruheenergie

$$mc^2 + H^0 + c^{-2} H^1 \cong mc^2 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2}{2m} - \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^4}{8m^3 c^2} + e\varphi \tag{a}$$

$$- \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \operatorname{div} \vec{E} \tag{b}$$

$$- \frac{e\hbar}{8m^2 c^2} \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{\pi} - \vec{\pi} \wedge \vec{E}). \tag{c}$$

Diskussion:

- (a) Für $\vec{A} = 0$ ist $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})^2 = p^2$ und die ersten 3 Terme sind die Entwicklung der relativistischen kinetischen Energie $c\sqrt{m^2 c^2 + \vec{p}^2}$ bis zur Ordnung c^{-2} .

- (b) Es ist $\text{div } \vec{E} = \rho$ die erzeugende Ladungsdichte des äusseren \vec{E} -Felds. Für ein Elektron der Ladung e im Feld eines Kerns der Ladung $-Ze$ lautet (b):

$$\frac{Ze^2\hbar^2}{8m^2c^2}\delta(\vec{x}).$$

Dieser Term heisst Kontaktwechselwirkung. Er stört nur s -Zustände, da die anderen in $\vec{x} = 0$ verschwinden.

- (c) Wegen $\vec{\pi} \wedge \vec{E} = -\vec{E} \wedge \vec{\pi} + i\hbar \text{rot } \vec{E}$ ist im statischen Fall ($\text{rot } \vec{E} = 0$) die Klammer gleich $2\vec{E} \wedge \vec{\pi}$.

Für ein Elektron im Zentralpotential $e\varphi(r)$ ist

$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \vec{x}$$

und (c) ist die **Spin-Bahn Kopplung**: Mit $\vec{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$, $\vec{L} = \vec{x} \wedge \vec{p}$ ist der Beitrag

$$\frac{e}{2m^2c^2} \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \vec{L} \cdot \vec{S}.$$

Er führt zu einer Aufspaltung der Niveaus zu einem festen l .

2 Nicht-Relativistische QED

2.1 Die Maxwell-Gleichungen

Die homogenen Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

sind äquivalent zur Darstellung

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.1)$$

der elektromagnetischen (e.m.) Felder $\vec{E}(\vec{x}, t)$, $\vec{B}(\vec{x}, t)$ durch e.m. Potentiale $\varphi(\vec{x}, t)$, $\vec{A}(\vec{x}, t)$. Diese sind nur bis auf Eichtransformationen bestimmt:

$$\varphi \longrightarrow \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \longrightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} \chi \quad (2.2)$$

mit $\chi(\vec{x}, t)$ beliebig. Im Wesentlichen eindeutig werden φ , \vec{A} durch Forderung einer Eichbedingung. Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho, \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{i}}{c}$$

lauten

$$\square \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right) = \rho, \quad (2.3)$$

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right) = \frac{\vec{i}}{c}, \quad (2.4)$$

($\square = c^{-2} \partial^2 / \partial t^2 - \Delta$). Wegen der Eichfreiheit (2.2) sind die Lösungen $\varphi(\vec{x}, t)$, $\vec{A}(\vec{x}, t)$ nicht eindeutig bestimmt durch ihre Anfangswerte bei $t = 0$ und die ihrer zeitlichen Ableitungen. Im Einklang damit ist, dass (2.3) keine Bewegungsgleichung ist (die zeitlichen Ableitungen von φ kommen nicht vor, bzw. heben sich weg), sondern bloss eine Nebenbedingung, die wegen (2.4) erfüllt ist, sobald sie es bei $t = 0$ ist. Bei **Coulomb-Eichung**

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad (2.5)$$

die wir fortan voraussetzen, bleiben noch Eichtransformationen (2.2) mit

$$\Delta \chi = 0 \quad (2.6)$$

zulässig, und (2.3, 2.4) lauten

$$\Delta \varphi = -\rho, \quad \square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{\vec{i}}{c}. \quad (2.7)$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung ist

$$\varphi(\vec{x}, t) = -(\Delta^{-1} \rho)(\vec{x}, t) := \frac{1}{4\pi} \int d^3 y \frac{\rho(\vec{y}, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

plus einer beliebigen Lösung der homogenen Gleichung $\Delta \varphi = 0$. Letztere entfällt durch Verwendung der residuellen Eichfreiheit (2.6). Die Lösung der Bewegungsgleichung ist nun eindeutig durch $\vec{A}|_{t=0}$, $\partial \vec{A} / \partial t|_{t=0}$ bestimmt.

2.2 Das freie e.m. Feld als Hamiltonsches System

In diesem und im nächsten Abschnitt sei

$$\rho = 0, \quad \vec{i} = 0,$$

und somit $\varphi = 0$. Die zweite Gleichung (2.7), d.h.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \Delta \vec{A},$$

lautet wegen

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{E} \quad (2.8)$$

auch

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \Delta \vec{A} \quad (2.9)$$

Gleichungen (2.8, 2.9) erweisen sich als **kanonische Bewegungsgleichungen**

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p^\alpha} = \{H, q^\alpha\}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} = \{H, p_\alpha\}$$

mit $(\vec{A}(\vec{x}), -\vec{E}(\vec{x}))_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3}$ in der Rolle von $(q^\alpha, p_\alpha)_{\alpha=1, \dots, f}$. Der ∞ -dimensionale **Phasenraum** ist

$$\Gamma = \left\{ (\vec{A}(\vec{x}), -\vec{E}(\vec{x}))_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3} \mid \operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{E} = 0 \right\}. \quad (2.10)$$

Die **Funktionalableitung** übernimmt die Rolle einer partiellen Ableitung. Im einfacheren Fall eines Funktionals $F[\varphi]$, das von einem skalaren Feld $\varphi = \varphi(\vec{x})$, ($\vec{x} \in \mathbb{R}^3$) abhängt, ist sie definiert durch

$$\int d^3x \frac{\delta F}{\delta \varphi(\vec{x})} [\varphi] \psi(\vec{x}) = \frac{d}{d\lambda} F[\varphi + \lambda \psi] \Big|_{\lambda=0},$$

wobei ψ eine beliebige glatte Testfunktion mit kompaktem Träger ist. Im Fall des elektromagnetischen Felds kann die analoge Definition

$$\int d^3x \frac{\delta F}{\delta \vec{A}(\vec{x})} [\vec{A}, -\vec{E}] \cdot \vec{v}(\vec{x}) = \frac{d}{d\lambda} F[\vec{A} + \lambda \vec{v}, -\vec{E}] \Big|_{\lambda=0} \quad (2.11)$$

nicht einfach übernommen werden, denn $(\vec{A} + \lambda \vec{v}, -\vec{E}) \in \Gamma$ nur, falls $\operatorname{div} \vec{v} = 0$. Solche Felder sind von der Form $\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{w}$ (\vec{w} beliebig) und die linke Seite in (2.11) gleich $\int d^3x \operatorname{rot}(\delta F / \delta \vec{A}) \cdot \vec{w}$, sodass die rechte nur $\operatorname{rot}(\delta F / \delta \vec{A})$ bestimmt. Beachte allerdings, dass ein allgemeines Vektorfeld $\vec{u}(\vec{x})$ mit kompaktem Träger durch $\operatorname{rot} \vec{u}$ und $\operatorname{div} \vec{u}$ eindeutig bestimmt ist: Sie bestimmen nämlich $\Delta \vec{u} = \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}$ und damit

$$\vec{u}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{\Delta \vec{u}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Damit ist die Definition (2.11) (mit $\operatorname{div} \vec{v} = 0$) durch

$$\operatorname{div} \frac{\delta F}{\delta \vec{A}(\vec{x})} = 0$$

vervollständigt. Zum Beispiel ist für $\text{div } \vec{v} = 0$, bzw. allgemein

$$\int d^3x' \frac{\delta A_i(\vec{x})}{\delta \vec{A}(\vec{x}')} \cdot \vec{v}(\vec{x}') = v_i(\vec{x}), \quad \frac{\delta A_i(\vec{x}')}{\delta A_j(\vec{x})} = (\delta_{ij} - \partial_i \partial_j \Delta^{-1}) \delta(\vec{x} - \vec{x}'),$$

denn $\sum_{j=1}^3 \partial_j (\delta_{ij} - \partial_i \partial_j \Delta^{-1}) = 0$. Analog ist $\delta F / \delta \vec{E}(\vec{x})$ definiert. Die **Poisson-Klammer** für Funktionen $F[\vec{A}, -\vec{E}]$ auf Γ ist

$$\{F, G\} = c \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \vec{A}(\vec{x})} \cdot \frac{\delta G}{\delta \vec{E}(\vec{x})} - \frac{\delta F}{\delta \vec{E}(\vec{x})} \cdot \frac{\delta G}{\delta \vec{A}(\vec{x})} \right).$$

Insbesondere ist

$$\{F, \vec{A}(\vec{x})\} = -c \frac{\delta F}{\delta \vec{E}(\vec{x})}, \quad \{F, \vec{E}(\vec{x})\} = c \frac{\delta F}{\delta \vec{A}(\vec{x})} \quad (2.12)$$

und

$$- \left\{ \int \vec{E}(\vec{x}) \cdot \vec{u}(\vec{x}) d^3x, \int \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) d^3x \right\} = c \int \vec{u}(\vec{x}) \cdot \vec{v}(\vec{x}) d^3x \quad (2.13)$$

für $\text{div } \vec{u} = 0$ oder $\text{div } \vec{v} = 0$ (vgl. $\{p_\alpha, q^\beta\} = \delta_\alpha^\beta$), bzw.

$$- \{E_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\} = c(\delta_{ij} - \partial_i \partial_j \Delta^{-1}) \delta(\vec{x} - \vec{y}); \quad (2.14)$$

ferner

$$\{E_i(\vec{x}), E_j(\vec{y})\} = 0, \quad \{A_i(\vec{x}), A_j(\vec{y})\} = 0. \quad (2.15)$$

Die Hamiltonfunktion ist die Energie

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\vec{E}(\vec{x})^2 + \vec{B}(\vec{x})^2 \right) = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\vec{E}(\vec{x})^2 - \vec{A}(\vec{x}) \cdot \Delta \vec{A}(\vec{x}) \right), \quad (2.16)$$

wobei der Term mit $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ partiell integriert wurde unter Verwendung von $\text{div}(\vec{A} \wedge \text{rot } \vec{A}) = (\text{rot } \vec{A})^2 - \vec{A} \cdot \text{rot rot } \vec{A}$ und $\text{rot rot } = \vec{\nabla} \text{div} - \Delta$. Die kanonischen Bewegungsgleichungen sind

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \{H, \vec{A}(\vec{x})\} = -c \vec{E}(\vec{x}), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \{H, \vec{E}(\vec{x})\} = -c \Delta \vec{A}(\vec{x}), \quad (2.18)$$

wie angekündigt. Im Hinblick auf die Quantisierung ist es nützlich, die Nebenbedingungen in (2.10) aufzulösen. Dazu verwenden wir die räumliche Fourierdarstellung der Felder

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \vec{q}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \\ -\vec{E}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \vec{p}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}} \end{aligned}$$

mit

$$\vec{q}(-\vec{k}, t) = \overline{\vec{q}(\vec{k}, t)} \quad (2.19)$$

(Reellität) und

$$\vec{k} \cdot \vec{q}(\vec{k}, t) = 0 \quad (2.20)$$

($\text{div } \vec{A} = 0$), und analog für $\vec{p}(\vec{k}, t)$. Ferner ist

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} i\vec{k} \wedge \vec{q}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{x}}$$

Nach der Parseval-Identität lautet die Poisson-Klammer (2.13):

$$\left\{ \int \vec{p}(\vec{k}) \cdot \vec{u}(\vec{k}) d^3k, \int \vec{q}(\vec{k}) \cdot \vec{v}(\vec{k}) d^3k \right\} = \int \vec{u}(\vec{k}) \cdot \vec{v}(\vec{k}) d^3k \quad (2.21)$$

($\vec{k} \cdot \vec{u} = 0$ oder $\vec{k} \cdot \vec{v} = 0$) und die Hamiltonfunktion (2.16)

$$H = \frac{1}{2} \int d^3k (|\vec{p}(\vec{k})|^2 + (c\vec{k})^2 |\vec{q}(\vec{k})|^2). \quad (2.22)$$

Das e.m. Feld erweist sich als Kollektion ungekoppelter harmonischer Oszillatoren ($H_\alpha = (p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 q^{\alpha 2})/2$) der Frequenz $\omega(\vec{k}) = c|\vec{k}|$. Zwar sind die Moden \vec{k} und $-\vec{k}$ wegen (2.19) nicht unabhängig, aber die Integrale $\int d^3k$ in (2.21, 2.22) lassen sich umschreiben zu $\int_{k_1 \geq 0} d^3k$ über (unabhängige) Re/Im $\vec{p}(\vec{k})/\vec{q}(\vec{k})$. Die numerischen Faktoren 1, bzw. 1/2 in (2.21, 2.22) bleiben unverändert, falls man die Modendichten auch anpasst: $\widetilde{d^3k} = 2d^3k$. Beide Nebenbedingungen (2.19, 2.20) werden aufgelöst durch

$$\begin{aligned} \vec{q}(\vec{k}) &= \frac{(c|\vec{k}|)^{-1/2}}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda=1,2} \left(\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}) + \overline{\vec{\varepsilon}_\lambda(-\vec{k})} \overline{a}_\lambda(-\vec{k}) \right), \\ \vec{p}(\vec{k}) &= -i \frac{(c|\vec{k}|)^{1/2}}{\sqrt{2}} \sum_{\lambda=1,2} \left(\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}) - \overline{\vec{\varepsilon}_\lambda(-\vec{k})} \overline{a}_\lambda(-\vec{k}) \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

wobei $\{\vec{k}/|\vec{k}|, \vec{\varepsilon}_1(\vec{k}), \vec{\varepsilon}_2(\vec{k})\}$ ein orthonormales Dreibein in \mathbb{R}^3 oder \mathbb{C}^3 ist. Hier sind $a_\lambda(\vec{k}) \in \mathbb{C}$, ($\vec{k} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda = 1, 2$), unabhängige Koordinaten des Feldes. Nun ist

$$\vec{A}(\vec{x}) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{c}{2|\vec{k}|} \right)^{1/2} \left(\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} + \overline{\vec{\varepsilon}_\lambda(\vec{k})} \overline{a}_\lambda(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right) \quad (2.24)$$

und aus (2.21, 2.15) folgt

$$\{a_\lambda(\vec{k}), \overline{a}_{\lambda'}(\vec{k}')\} = i\delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.25)$$

$$\{a_\lambda^\#(\vec{k}), a_{\lambda'}^\#(\vec{k}')\} = 0, \quad (\# = -, \text{ nichts}), \quad (2.26)$$

$$H = \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k c|\vec{k}| |a_\lambda(\vec{k})|^2. \quad (2.27)$$

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{a}_\lambda(\vec{k}, t) = -ic|\vec{k}| a_\lambda(\vec{k}, t), \quad \dot{\overline{a}}_\lambda(\vec{k}, t) = ic|\vec{k}| \overline{a}_\lambda(\vec{k}, t).$$

Für den späteren Bedarf drücken wir noch den aus der Elektrodynamik (ED) bekannten Feldimpuls durch $a_\lambda(\vec{k})$ aus:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \frac{1}{c} \int d^3x \vec{E}(\vec{x}) \wedge \vec{B}(\vec{x}) \\
&= - \int d^3k \underbrace{\vec{p}(\vec{k}) \wedge (\vec{i}\vec{k} \wedge \vec{q}(\vec{k}))}_{=i\vec{k}(\vec{p}(\vec{k}) \cdot \vec{q}(\vec{k}))} \\
&= \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \vec{k} |a_\lambda(\vec{k})|^2.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

2.3 Kanonische Quantisierung

Quantisierung eines klassischen Hamiltonschen Systems (Phasenraum Γ , Hamiltonfunktion h) bedeutet formal zunächst eine lineare Zuordnung

$$a \longmapsto A$$

zwischen Funktionen a auf Γ und Elementen $A \in \mathcal{A}$ (“Observablen”) einer $*$ -**Algebra** \mathcal{A} , mit der Eigenschaft

$$\bar{a} \longmapsto A^*, \tag{2.29}$$

ferner mit

$$p_\alpha \mapsto P_\alpha, \quad q^\alpha \mapsto Q^\alpha, \quad h \mapsto H$$

sodass

$$\{p_\alpha, q^\beta\} = \delta_\alpha^\beta \implies \frac{i}{\hbar} [P_\alpha, Q^\beta] = \delta_\alpha^\beta \tag{2.30}$$

für **eine** Wahl kanonischer Koordinaten (p_α, q^β) (Bemerkung: (2.30) ist nicht verträglich mit kanonischen Transformationen, ausser linearer). Die Zuordnung ist nicht multiplikativ, da $ab = ba$, aber in der Regel $AB \neq BA$ (Ordnungsprobleme). Die Bewegungsgleichungen im Heisenberg-Bild sind dann

$$\frac{dA}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, A]. \tag{2.31}$$

In einem weitergehenden Sinn bedeutet Quantisierung die Konstruktion einer (irreduziblen) Darstellung von \mathcal{A} , d.h. eines **Hilbertraums** \mathcal{H} und Operatoren $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Für $(i/\hbar)[p_\alpha, x^\beta] = \delta_\alpha^\beta$, $(\alpha, \beta = 1, \dots, f)$ ist diese Darstellung bis auf Isomorphie eindeutig (Satz von v. Neumann), und gegeben durch die Schrödinger Darstellung

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= L^2(\mathbb{R}^f, d^f x), \\
X^\beta : \psi(x) &\mapsto x^\beta \psi(x), \quad P_\alpha : \psi(x) \mapsto \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}.
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Im Fall unendlich vieler Freiheitsgrade, $f = \infty$, gilt dies nicht! Ohne uns aber darum zu kümmern, quantisieren wir das e.m. Feld anhand von (2.21) oder, da (2.23) linear ist, von (2.25, 2.26): Dann entspricht (2.30)

$$\begin{aligned}
[a_\lambda(\vec{k}), a_{\lambda'}^*(\vec{k}')] &= \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \\
[a_\lambda^\#(\vec{k}), a_{\lambda'}^\#(\vec{k}')] &= 0, \quad (\# = *, \text{nichts})
\end{aligned} \tag{2.33}$$

(ohne Verwendung grosser Buchstaben). Wir haben dabei üblichen Konventionen folgend den Faktor \hbar^{-1} vor den Kommutatoren unterschlagen. Deshalb sind die rechten Seiten von (2.24, 2.27, 2.28) mit $\hbar^{1/2}$, bzw. \hbar zu multiplizieren. Die **kanonischen Vertauschungsrelationen** (2.33) werden auf dem **Fockraum** \mathcal{F} realisiert; dies ist der Hilbertraum mit dem ausgezeichneten Zustand $|0\rangle$

$$a_\lambda(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad (\forall \vec{k}, \lambda), \quad (2.34)$$

und der aufgespannt wird durch die Zustände

$$|f_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \int d^3k_1 \cdots d^3k_n f_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n) a_{\lambda_1}^*(\vec{k}_1) \cdots a_{\lambda_n}^*(\vec{k}_n) |0\rangle \quad (2.35)$$

mit $n = 1, 2, \dots$. Die Wellenfunktion $f_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$ kann oEdA als symmetrisch bezüglich Permutationen der Argumente (\vec{k}_i, λ_i) angenommen werden. Das Normquadrat des Zustandes ist dann

$$\langle f_n | f_n \rangle = \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} \int d^3k_1 \cdots d^3k_n |f_{\lambda_1 \dots \lambda_n}(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)|^2.$$

Der Hamiltonoperator ist, vgl. (2.27),

$$H = \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \hbar c |\vec{k}| a_\lambda^*(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}), \quad (2.36)$$

wobei wir $a_\lambda^*(\vec{k})$ links von $a_\lambda(\vec{k})$ gesetzt haben. Gegenüber der in der QMI üblichen Wahl

$$\frac{1}{2} (p_\alpha^2 + \omega_\alpha^2 (q^\alpha)^2) = \frac{\hbar \omega_\alpha}{2} (a_\alpha^* a_\alpha + a_\alpha a_\alpha^*) = \hbar \omega_\alpha (a_\alpha^* a_\alpha + \frac{1}{2})$$

entspricht dies der Subtraktion der Nullpunktsenergie

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \hbar c |\vec{k}| = \infty \cdot 1. \quad (2.37)$$

Dieses Ordnungsproblem ist unbedeutend, da es in (2.31) herausfällt. Der Impulsoperator ist, vgl. (2.28),

$$\vec{P} = \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \hbar k a_\lambda^*(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}). \quad (2.38)$$

So wie H die zeitliche Entwicklung erzeugt, s. (2.31), so erzeugt \vec{P} die räumlichen Translationen:

$$e^{i \frac{\vec{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}} \vec{A}(\vec{x}) e^{-i \frac{\vec{P} \cdot \vec{a}}{\hbar}} = \vec{A}(\vec{x} - \vec{a}), \quad (2.39)$$

was man in der Version $(i/\hbar)[P_i, \vec{A}(\vec{x})] = -(\partial_i \vec{A})(\vec{x})$ anhand von (2.24, 2.38) verifiziert.

Interpretation der Zustände: Es gilt

$$H|0\rangle = 0, \quad \vec{P}|0\rangle = 0,$$

bzw. $e^{-iHt/\hbar}|0\rangle = |0\rangle$, $e^{-i\vec{P}\cdot\vec{a}/\hbar}|0\rangle = |0\rangle$. Der zeitlich und räumlich invariante Zustand $|0\rangle$ wird als **Vakuum** gedeutet. Die Zustände (2.35) mit $n = 1$,

$$|f\rangle = \sum_{\lambda} \int d^3k f_{\lambda}(\vec{k}) |\vec{k}, \lambda\rangle \quad (2.40)$$

sind Superpositionen der uneigentlichen (d.h. nicht normierbaren) Zustände

$$|\vec{k}, \lambda\rangle = a_{\lambda}^*(\vec{k})|0\rangle. \quad (2.41)$$

Für diese gilt

$$H|\vec{k}, \lambda\rangle = \hbar c|\vec{k}| |\vec{k}, \lambda\rangle, \quad \vec{P}|\vec{k}, \lambda\rangle = \hbar\vec{k}|\vec{k}, \lambda\rangle :$$

Sie haben die Energie-Impulsbeziehung $E(\vec{p}) = c|\vec{p}|$ eines relativistischen Teilchens der Masse 0: (2.40, 2.41) werden als **1-Teilchen-** (oder 1-Photon-) **Zustände** interpretiert. Dementsprechend (2.35) als **n-Teilchenzustände**.

Zum Schluss betrachten wir die Ortswellenfunktion eines 1-Teilchenzustandes

$$\check{f}_{\lambda}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} f_{\lambda}(\vec{k}),$$

normiert, sodass

$$\sum_{\lambda} \int d^3x |\check{f}_{\lambda}(\vec{x})|^2 = \sum_{\lambda} \int d^3k |f_{\lambda}(\vec{k})|^2 = \langle f|f\rangle$$

Der Zustand $|\vec{k}, \lambda\rangle$ entspricht $f_{\lambda'}(\vec{k}') = \delta_{\lambda\lambda'}\delta(\vec{k}' - \vec{k})$ und $\check{f}_{\lambda'}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}\delta_{\lambda\lambda'}e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$. Insbesondere besitzt er die räumliche Wahrscheinlichkeitsdichte $(2\pi)^{-3}$ und die

$$\text{Stromdichte} = (2\pi)^{-3}c. \quad (2.42)$$

(Dasselbe folgt aus (1.26), wenn man denselben Zustand durch seine relativistisch normierte Wellenfunktion $\psi_{\lambda'}(\vec{p}') = \hbar^{-3/2}\cdot(2\hbar k^0)^{1/2}f_{\lambda'}(\vec{k}')$ darstellt, d.h. $\psi_{\lambda'}(x) = (2\hbar k^0)^{-1/2}(2\pi)^{-3/2}\delta_{\lambda\lambda'}e^{-ikx}$.)

2.4 Nicht-Relativistische QED

Wir wollen Wechselwirkungen zwischen N nicht-relativistischen Elektronen (Spin 0, Masse m , Ladung e) und dem (relativistischen) Strahlungsfeld beschreiben. Die klassische Hamiltonfunktion dieses Systems ist

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}_i) \right)^2 + \sum_{i<j} \frac{e^2}{4\pi|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \frac{1}{2} \int d^3x \left(\vec{E}_T(\vec{x})^2 + \vec{B}(\vec{x})^2 \right). \quad (2.43)$$

Kanonische Phasenkoordinaten sind die Lagen \vec{x}_i und Impulse \vec{p}_i der Elektronen

$$\{\vec{p}_i \cdot \vec{a}, \vec{x}_j \cdot \vec{b}\} = \delta_{ij}\vec{a} \cdot \vec{b}, \quad (i, j = 1, \dots, N),$$

sowie $(\vec{A}(\vec{x}), -\vec{E}_T(\vec{x}))_{\vec{x} \in \mathbb{R}^3}$, die (2.10, 2.14) genügen. \vec{A} ist das Vektorpotential in der Coulomb-Eichung und \vec{E}_T ist der transversale Anteil ($\text{div } \vec{E}_T = 0$) des elektrischen Feldes. Die Ladungs- und Stromdichten sind

$$\rho(\vec{x}) = e \sum_{i=1}^N \delta(\vec{x} - \vec{x}_i), \quad \vec{j}(\vec{x}) = e \sum_{i=1}^N \dot{\vec{x}}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i);$$

das e.m. Feld ist

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}, \quad \vec{E} = \vec{E}_T + \vec{E}_L, \quad (2.44)$$

wobei

$$\vec{E}_L(\vec{x}) = -\vec{\nabla} \varphi(\vec{x}), \quad \varphi(\vec{x}) = \sum_{i=1}^N \frac{e}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_i|} = -\Delta^{-1} \rho$$

der longitudinale Anteil des elektrischen Feldes ist. Die kanonischen Bewegungsgleichungen des Systems sind die gekoppelten Newton- und Maxwell-Gleichungen in der Coulomb-Eichung. In der Tat: die Gleichungen für die q^α 's sind

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_i}{dt} &= \{H, \vec{x}_i\} = \frac{1}{m} \left(\vec{p}_i - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}_i) \right) = \vec{v}_i, \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{x}) &= \{H, \vec{A}(\vec{x})\} = -c \vec{E}_T(\vec{x}) \end{aligned} \quad (2.45)$$

(vgl. (2.12)), sodass (2.45) mit (2.1) übereinstimmt. Die für die p_α 's lauten

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_i}{dt} &= \{H, \vec{p}_i\} = \frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 v_{il} (\vec{\nabla} A_l)(\vec{x}) - e \vec{\nabla} \varphi(\vec{x}_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}_T(\vec{x}) &= \{H, \vec{E}_T(\vec{x})\} = -c \Delta \vec{A}(\vec{x}) - \frac{e}{c} \sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^3 v_{il} \{A_l(\vec{x}_i), \vec{E}_T(\vec{x})\} \\ &= -c \Delta \vec{A}(\vec{x}) - e \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) + e \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \Delta^{-1} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \end{aligned} \quad (2.46)$$

(vgl. (2.14, 2.16)). Man kann sie besser darstellen unter Verwendung folgender Konsequenz von (2.45):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{A}(\vec{x}_i) &= -c \vec{E}_T(\vec{x}_i) + \sum_{l=1}^3 v_{il} (\partial_l \vec{A})(\vec{x}_i), \\ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{x}) &= - \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \frac{e}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_i|}, \end{aligned}$$

also

$$\vec{\nabla} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{e}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}_i|} = e \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \Delta^{-1} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i).$$

Damit folgen aus (2.46) die Newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m \vec{v}_i &= \frac{e}{c} \sum_{l=1}^3 \left(v_{il} (\vec{\nabla} A_l)(\vec{x}_i) - v_{il} (\partial_l \vec{A})(\vec{x}_i) \right) + e \left(-\vec{\nabla} \varphi(\vec{x}_i) + \vec{E}_T(\vec{x}_i) \right) \\ &= e \left(\vec{E}(\vec{x}_i) + \frac{\vec{v}_i}{c} \wedge \vec{B}(\vec{x}_i) \right), \end{aligned}$$

und die Maxwell-Gleichungen (2.7)

$$\square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \frac{e}{c} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) = \frac{\vec{i}}{c}.$$

Die Quantisierung des Systems erfolgt wie im vorigen Abschnitt: gemäss (2.32) für die Elektronen, wobei nach dem Pauli-Prinzip $L^2(\mathbb{R}^{3N}) = \otimes_{i=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$ durch den Unterraum $\bigwedge_{i=1}^N L^2(\mathbb{R}^3)$ der antisymmetrischen Zustände zu ersetzen ist; und gemäss (2.33, 2.34, 2.35) für das e.m. Feld. Der Hilbertraum ist

$$\mathcal{H} = \mathcal{F} \otimes \bigwedge_{i=1}^N L^2(\mathbb{R}^3).$$

2.5 Störungsrechnung und Thomson-Streuung

Strahlungsvorgänge können berechnet werden im Rahmen der Störungsrechnung in der Kopplungskonstanten e^2 oder der dimensionslosen Kopplungskonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \cong \frac{1}{137} \ll 1.$$

Dazu verwenden wir die Aufspaltung

$$H = H_0 + H_I$$

von (2.43) für $N = 1$ in einen ungestörten Teil

$$H_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \sum_{\lambda=1,2} \int d^3k \hbar c |\vec{k}| a_{\lambda}^*(\vec{k}) a_{\lambda}(\vec{k})$$

und eine Störung

$$H_I = -\frac{e}{2mc} \underbrace{\left(\vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{p} + \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right)}_{2A(\vec{x}) \cdot \vec{p} \text{ wegen } \operatorname{div} \vec{A}=0} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}(\vec{x})^2.$$

Wir behandeln die Streuung eines Photons mit Impuls $\hbar \vec{k}$ (Zustand $|\vec{k}, \lambda\rangle$, s. (2.41)) an einem ruhenden Elektron, d.h. mit Zustand $|\psi\rangle = \int d^3q \psi(\vec{q}) |\vec{q}\rangle$, $(\vec{p}|\vec{q}) = \vec{q}|\vec{q})$ und Wellenfunktion $\psi(\vec{q})$ im Limes

$$|\psi(\vec{q})|^2 \rightarrow \delta(\vec{q}). \quad (2.47)$$

Der Anfangszustand ist somit $|\vec{k}, \lambda; \psi\rangle = |\vec{k}, \lambda\rangle \otimes |\psi\rangle$. Wir betrachten Übergänge

$$|\vec{k}, \lambda; \psi\rangle \longrightarrow |\vec{k}', \lambda'; \vec{q}'\rangle \quad (2.48)$$

zwischen Eigenzuständen von H_0 , die durch H_I vermittelt werden. Wir berechnen die entsprechenden Übergangsamplituden in Ordnung e^2 und unter der Annahme

$$\beta := \frac{\hbar |\vec{k}|}{mc} \ll 1$$

(genauer: in 1. Ordnung in β). Grundsätzlich kann dazu

$$-\frac{e}{mc}\vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{p} \quad (2.49)$$

in 2. Ordnung Störungsrechnung oder

$$\frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}(\vec{x})^2$$

in 1. Ordnung beitragen. Da $\vec{p}|\psi\rangle \rightarrow 0$ wegen (2.47), entfällt aber der Beitrag von (2.49). Das relevante Matrix-Element für (2.48) ist

$$M = \frac{e^2}{2mc^2}\langle \vec{k}', \lambda'; \vec{q}' | \vec{A}(\vec{x})^2 | \vec{k}, \lambda; \psi \rangle,$$

wobei

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x})^2 = \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2|\vec{k}_1|)^{1/2}} \frac{d^3 k_2}{(2|\vec{k}_2|)^{1/2}} \cdot \left(\vec{\varepsilon}_{\lambda_1}(\vec{k}_1) a_{\lambda_1}(\vec{k}_1) e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} + \vec{\varepsilon}_{\lambda_1}(\vec{k}_1) a_{\lambda_1}^*(\vec{k}_1) e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \right) \\ \cdot \left(\vec{\varepsilon}_{\lambda_2}(\vec{k}_2) a_{\lambda_2}(\vec{k}_2) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} + \vec{\varepsilon}_{\lambda_2}(\vec{k}_2) a_{\lambda_2}^*(\vec{k}_2) e^{-i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \right). \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist divergent: Der Beitrag des Kommutators in

$$a_{\lambda_1}(\vec{k}_1) a_{\lambda_2}^*(\vec{k}_2) = a_{\lambda_2}^*(\vec{k}_2) a_{\lambda_1}(\vec{k}_1) + \underbrace{[a_{\lambda_1}(\vec{k}_1), a_{\lambda_2}^*(\vec{k}_2)]}_{\delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)}$$

zu $\vec{A}(\vec{x})^2$ ist

$$\frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda} \int \frac{d^3 k}{2|\vec{k}|} \underbrace{\vec{\varepsilon}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda}(\vec{k})}_{=1} = \infty \cdot 1,$$

was aber wie in (2.37) ignoriert werden darf. Danach ist

$$\begin{aligned} M &= \frac{e^2}{2mc^2} \cdot \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{(2|\vec{k}_1|)^{1/2}} \frac{d^3 k_2}{(2|\vec{k}_2|)^{1/2}} \\ &\quad \cdot [\vec{\varepsilon}_{\lambda_1}(\vec{k}_1) \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda_2}(\vec{k}_2) \langle \vec{k}', \lambda' | a_{\lambda_1}^*(\vec{k}_1) \underbrace{a_{\lambda_2}(\vec{k}_2)}_{\delta_{\lambda_2 \lambda} \delta(\vec{k}_2 - \vec{k})} | \vec{k}, \lambda \rangle \cdot \langle \vec{q}' | e^{i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{x}} | \psi \rangle + (1 \leftrightarrow 2)] \\ &= 2 \cdot \frac{e^2}{2mc^2} \cdot \frac{\hbar c}{(2\pi)^3} \cdot \frac{\vec{\varepsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda}(\vec{k})}{(2|\vec{k}'|)^{1/2} (2|\vec{k}|)^{1/2}} \cdot \psi(\vec{q}' + \vec{k}' - \vec{k}) \end{aligned}$$

und

$$|M|^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \frac{(\hbar c)^2}{(2\pi)^6} \frac{|\vec{\varepsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda}(\vec{k})|^2}{|\vec{k}'||\vec{k}|} \cdot \underbrace{|\psi(\vec{q}' + \vec{k}' - \vec{k})|^2}_{(2.47): = \delta(\vec{q}' + \vec{k}' - \vec{k})}. \quad (2.50)$$

Nun zur Erinnerung **Fermis Goldene Regel**: Die Übergangsrates

$$\Gamma_{f \leftarrow i} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) |M_{f \leftarrow i}|^2 \quad (2.51)$$

ist über alle Endzustände $|f\rangle$ zu summieren, die im Experiment nicht aufgelöst werden. Der Streuquerschnitt $d\sigma$ ergibt sich dann durch Division durch die einfallende Stromdichte.

Wir summieren zunächst bloss über die Photonenimpulse $\vec{k}' = |\vec{k}'|\vec{e}'$, die in einem bestimmten Raumwinkelement $\vec{e}' \in d\Omega$ liegen, sowie über alle Elektronenzustände \vec{q}' . Mit $d^3k' = |\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'| d\Omega$ und (2.50) ist

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot 2\pi\hbar c \cdot \\ &\quad \cdot \int d|\vec{k}'| \cdot |\vec{k}'|^2 \delta \left(\underbrace{\hbar c(|\vec{k}'| - |\vec{k}|) + \frac{\hbar^2 \vec{q}'^2}{2m}}_{=: f(|\vec{k}'|)} \right) \cdot \frac{|\vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \cdot \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})|^2}{|\vec{k}'||\vec{k}|}, \end{aligned}$$

wobei $\vec{q}' = \vec{k} - |\vec{k}'|\vec{e}'$ wegen der δ -Funktion in (2.50). Die Nullstelle $|\vec{k}'|$ von f liegt bei (schreibe $\vec{k} = |\vec{k}|\vec{e}$)

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} &= 1 - \frac{\hbar}{2mc|\vec{k}|} \left(\vec{k} - |\vec{k}'|\vec{e}' \right)^2 = 1 - \frac{\hbar|\vec{k}|}{2mc} \underbrace{\left(\vec{e} - \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|}\vec{e}' \right)^2}_{=(\vec{e}-\vec{e}')^2 + \mathcal{O}(\beta)} \\ &= 1 - \frac{\hbar|\vec{k}|}{mc} (1 - \vec{e} \cdot \vec{e}') + \mathcal{O}(\beta^2) \end{aligned} \quad (2.52)$$

und es gilt dort

$$\begin{aligned} \frac{df}{d|\vec{k}'|} &= \hbar c \cdot \left(1 - \frac{\hbar}{2mc} \cdot 2 \underbrace{(\vec{k} - |\vec{k}'|\vec{e}') \cdot \vec{e}'}_{=|\vec{k}|(\vec{e} - \frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|}\vec{e}')} \right) \\ &= \hbar c \cdot \left(1 - \frac{\hbar|\vec{k}|}{mc} (\vec{e} \cdot \vec{e}' - 1) + \mathcal{O}(\beta^2) \right) \\ &= \hbar c \cdot \left(\frac{|\vec{k}|}{|\vec{k}'|} + \mathcal{O}(\beta^2) \right) \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\delta(f(x)) = |f'(x_0)|^{-1} \delta(x - x_0)$$

für $f(x_0) = 0$ (einzige Nullstelle) findet man

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{4\pi mc^2} \right)^2 \left(\frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} \right)^2 |\vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \cdot \vec{\epsilon}_\lambda(\vec{k})|^2 \quad (2.53)$$

wobei $|\vec{k}'|/|\vec{k}|$ durch (2.52) gegeben ist. Hier ist

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi mc^2} \cong 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$$

der sogenannte klassische Elektronenradius.

- i) Ist der Strahl der einfallenden Photonen unpolarisiert, so muss man über λ **mitteln**:
Nach Pythagoras ist

$$\frac{1}{2} \sum_{\lambda=1,2} |\vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \cdot \vec{\epsilon}_{\lambda}(\vec{k})|^2 = \frac{1}{2} \left(1 - |\vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \cdot \vec{e}|^2 \right),$$

also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} \right)^2 \left(1 - |\vec{\epsilon}_{\lambda'}(\vec{k}') \cdot \vec{e}|^2 \right). \quad (2.54)$$

- ii) Misst man hingegen die Polarisation des gestreuten Photons (\vec{k}', λ') nicht, so ist über λ' zu **summieren**:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left(\frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} \right)^2 \left(1 - |\vec{\epsilon}_{\lambda}(\vec{k}) \cdot \vec{e}'|^2 \right) \quad (2.55)$$

- iii) Treffen die Voraussetzungen von (i) und (ii) zu, so ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(\frac{|\vec{k}'|}{|\vec{k}|} \right)^2 \underbrace{\left(1 + (\vec{e} \cdot \vec{e}')^2 \right)}_{1 + \cos^2 \theta}. \quad (2.56)$$

wobei $\theta = \angle(\vec{e}, \vec{e}')$, ($0 \leq \theta \leq \pi$) der Streuwinkel ist.

Für $\beta \ll 1$ ist $|\vec{k}'|/|\vec{k}| = 1$ in 0. Ordnung. Mit $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ findet man den totalen Wirkungsquerschnitt

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (2.57)$$

(**Thomsonsche Streuformel**). Das Integral über (2.56) kann auch in 1. Ordnung in β berechnet werden:

$$\sigma_{tot} = \sigma_T \left(1 - \frac{2\hbar|\vec{k}|}{mc} + \mathcal{O}(\beta^2) \right). \quad (2.58)$$

3 Klassische Feldtheorie

3.1 Erinnerungen an die klassische Mechanik

Ein klassisches, mechanisches System mit Lagekoordinaten $(q^1, \dots, q^f) = q \in \mathbb{R}^f$ ist durch seine Lagrangefunktion $L(q^1, \dots, q^f, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^f)$ wie folgt bestimmt: Definiere die **Wirkung**

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t)) dt$$

einer Kurve $q(t)$ ($t_1 \leq t \leq t_2$). Die mechanischen Bahnen sind bestimmt durch das Hamiltonsche Variationsprinzip:

$$\delta S[q] = 0$$

bei Variationen mit festen Endpunkten $(q(t_i), t_i)_{i=1,2}$. Äquivalent dazu sind die Euler-Lagrange Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial q^\alpha} = 0, \quad (\alpha = 1, \dots, f) \quad (3.1)$$

Hier heissen die

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\alpha}(q, \dot{q}), \quad (\alpha = 1, \dots, f) \quad (3.2)$$

kanonische Impulse. Allgemein beträgt die Variation der Wirkung für eine Variations-schar $q(t, \lambda)$, ($t^{(1)}(\lambda) \leq t \leq t^{(2)}(\lambda)$) um eine mechanische Bahn $q(t) = q(t, 0)$ bei nicht notwendigerweise festen Endpunkten

$$\delta S = \langle p, \delta q \rangle + L \Delta t \Big|_{(1)}^{(2)} = \langle p, \Delta q \rangle - (\langle p, \dot{q} \rangle - L) \Delta t \Big|_{(1)}^{(2)}, \quad (3.3)$$

wobei $\delta q(t) = (\partial q(t, \lambda) / \partial \lambda)|_{\lambda=0}$ die Variation der Bahn und

$$\Delta q^{(i)} = \frac{d}{d\lambda} q(t^{(i)}(\lambda), \lambda) \Big|_{\lambda=0}, \quad \Delta t^{(i)} = \frac{d}{d\lambda} t^{(i)}(\lambda) \Big|_{\lambda=0}, \quad (i = 1, 2),$$

die der Endpunkte sind, und $\langle a, b \rangle = \sum_{\alpha=1}^f a_\alpha b^\alpha$.

Symmetrien bedingen Erhaltungsgrössen: Wir betrachten einen Fluss ψ^λ auf dem erweiterten Konfigurationsraum $\mathbb{R}^f \times \mathbb{R} \ni (q, t)$:

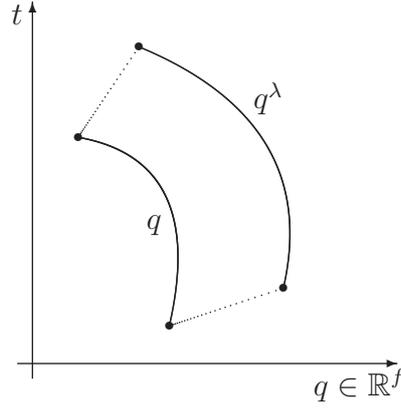
$$(q, t) \longmapsto \psi^\lambda(q, t) = (\phi^\lambda(q, t), \tau^\lambda(q, t)) \quad (3.4)$$

mit erzeugendem Vektorfeld

$$\frac{d\psi^\lambda}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} =: (v(q, t), s(q, t)).$$

Eine Kurve $q(t)$, ($t^{(1)} \leq t \leq t^{(2)}$), wird abgebildet nach der Kurve $q^\lambda(t)$ gemäss

$$q^\lambda(\tau^\lambda(q(t), t)) = \phi^\lambda(q(t), t)$$



(für kleine λ ist das Bild von $(q(t), t)$ unter ϕ^λ auch ein Graph: $(q^\lambda(t), t)$), mit Endpunkten

$$\phi^\lambda(q(t^{(i)}), t^{(i)}), \quad \tau^\lambda(q(t^{(i)}), t^{(i)}), \quad (i = 1, 2),$$

deren Variation

$$\Delta q^{(i)} = v(q(t^{(i)}), t^{(i)}), \quad \Delta t^{(i)} = s(q(t^{(i)}), t^{(i)})$$

beträgt. Der Fluss ψ^λ heisst eine kontinuierliche **Symmetrie** der Wirkung, falls

$$S[q^\lambda] = S[q] + [F(q, \lambda)]_{(1)}^{(2)} \quad (3.5)$$

für eine Funktion F und beliebige Kurven $q(\cdot)$. Grund dafür ist, dass falls $q(\cdot)$ ein stationärer Punkt der Wirkung ist (d.h. eine mechanische Bahn), $q^\lambda(\cdot)$ auch einer ist, denn

$$\delta S[q^\lambda] = \delta S[q]$$

für Variationen (mit festen Endpunkten) von $q(\cdot)$, bzw. $q^\lambda(\cdot)$, die sich unter ψ^λ entsprechen. Betrachtet man hingegen $q(t, \lambda) = q^\lambda(t)$ als Variationsschar, so folgt einerseits nach (3.3)

$$\delta S = \langle p, v \rangle - (\langle p, \dot{q} \rangle - L)s \Big|_{(1)}^{(2)},$$

andererseits nach (3.5)

$$\delta S = \delta F \Big|_{(1)}^{(2)}$$

mit $\delta F(q) = dF(q, \lambda)/d\lambda \Big|_{\lambda=0}$. Erhalten ist somit

$$\langle p, v \rangle - (\langle p, \dot{q} \rangle - L)s - \delta F \quad (3.6)$$

(**Satz von Noether**). Spezialfälle sind:

1) Eine Symmetrie $\varphi^\lambda(q)$ der Lagrange-Funktion:

$$L(q^\lambda(t), \dot{q}^\lambda(t)) = L(q(t), \dot{q}(t)) \quad (3.7)$$

mit $q^\lambda(t) = \varphi^\lambda(q(t))$. Dies entspricht (3.4, 3.5) mit $\tau^\lambda(q, t) = t$ (also $s = 0$) und $F = 0$. Erhalten ist $\langle p, v(q) \rangle$.

2) Die Energieerhaltung. Es gilt (3.5) für $\varphi^\lambda = \text{id}$, $\tau^\lambda(t) = t - \lambda$ (also $v = 0$, $s = -1$) und $F = 0$. Es folgt, dass $\langle p, \dot{q} \rangle - L$ erhalten ist.

Die Hamilton-Funktion ist definiert als Legendre-Transformierte von L in den Variablen \dot{q}^α :

$$H(q, p) = \langle p, \dot{q} \rangle - L(q, \dot{q}), \quad (3.8)$$

wobei $\dot{q}^\alpha = \dot{q}^\alpha(q, p)$ durch Auflösung der Gleichungen (3.2) bestimmt ist. Diese gelingt, zumindest lokal, falls die Matrix

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^\alpha \partial \dot{q}^\beta} \right)_{\alpha, \beta=1}^f \quad (3.9)$$

regulär ist. Die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{q}^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha} \quad (3.10)$$

und die Abbildung $\phi^t : (q, p) \mapsto (q(t), p(t))$, die den Anfangsbedingungen (q, p) die Lösung $(q(t), p(t))$ zuweist, ist der durch H erzeugte kanonische Fluss. Allgemeiner ist die zeitliche Entwicklung einer Funktion $G(q, p)$ längs einer mechanischen Bahn

$$\frac{d}{dt} G(\phi^t(q, p)) = \{H, G\}_{\phi^t(q, p)}, \quad (3.11)$$

wobei

$$\{F, G\} = \sum_{\alpha=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} \right) = -\{F, G\} \quad (3.12)$$

die Poisson-Klammer ist. Insbesondere ist $\{H, q^\alpha\} = \partial H / \partial p_\alpha$, $\{H, p_\alpha\} = -\partial H / \partial q^\alpha$, vgl. (3.10).

Symmetrien und Erhaltungsgrößen bedingen sich nun gegenseitig: Wegen (3.12) ist das Verschwinden von (3.11) (lies: G ist **erhalten**) äquivalent zu

$$\frac{d}{d\lambda} H(\Psi^\lambda(q, p)) = 0$$

wobei Ψ^λ der durch G erzeugte kanonische Fluss ist. (lies: Ψ^λ ist eine **Symmetrie** der Hamilton-Funktion)

Im Beispiel (3.7) einer Symmetrie der Lagrange-Funktion erzeugt die Erhaltungsgröße $G(q, p) = \langle p, v(q) \rangle$ die Symmetrie der Hamilton-Funktion $\Psi^\lambda(q, p) =: (q^\lambda, p^\lambda)$ mit

$$\frac{dq^\lambda}{d\lambda} = \frac{\partial G}{\partial p^\lambda} = v(q^\lambda),$$

d.h. es gilt ebenfalls $q^\lambda = \varphi^\lambda(q)$.

3.2 Klassische Felder

Ein klassisches Feld ordnet jedem Raumzeitpunkt, $(t, \vec{x}) \in \mathbb{R}^4$, einen Wert $\varphi = (\varphi^\alpha)_{\alpha \in I}$ im **Feldraum** zu: z. B. \mathbb{R}, \mathbb{C} , ein Vektorraum V oder eine Mannigfaltigkeit M . Klassische Feldtheorie ist klassische Mechanik unendlich vieler Freiheitsgrade. Die Analogie ist

$$q^\alpha(t) \longrightarrow \varphi^\alpha(t, \vec{x}), \quad (3.13)$$

wobei entweder

$$t \rightarrow (t, \vec{x}) = x, \quad \alpha \rightarrow \alpha$$

oder

$$t \rightarrow t, \quad \alpha \rightarrow (\vec{x}, \alpha)$$

Die erste Sichtweise ist im Lagrangeschen Zugang natürlich und zum Beispiel für die Frage der Lorentz-Invarianz nützlich; die zweite im Hamiltonschen, bzw. für die kanonische Quantisierung.

Die Lagrange-Funktion sei lokal:

$$L[\varphi, \partial_0 \varphi] = \int d^3x \mathcal{L}(\varphi^\alpha(\cdot, \vec{x}), (\partial\varphi^\alpha)(\cdot, \vec{x})),$$

wobei $\mathcal{L}(\varphi^\alpha, \partial\varphi^\alpha)$ die **Lagrange-Dichte** ist und $\partial\varphi^\alpha = (\partial_0\varphi^\alpha, \dots, \partial_3\varphi^\alpha)$. Die Wirkung eines Feldes über $G \subset \mathbb{R}^4$ ist damit

$$S[\varphi] = \int_G d^4x \mathcal{L}(\varphi^\lambda, \partial\varphi^\lambda) \quad (3.14)$$

und das Hamiltonsche Variationsprinzip lautet

$$\delta S = 0 \quad (3.15)$$

für Variationen $\delta\varphi^\alpha(t, \vec{x})$ über festem G , die auf ∂G verschwinden. Ist \mathcal{L} ein Lorentz-invariantes Skalar, d.h.

$$\mathcal{L}(\varphi'(x'), \partial'\varphi'(x')) = \mathcal{L}(\varphi(x), \partial\varphi(x))$$

bei Lorentz-Transformationen $x \mapsto x'$, $\varphi(x) \mapsto \varphi'(x')$, so ist S invariant (denn $d^4x' = d^4x$): damit ist (3.15) relativistisch form-invariant.

Mittels partieller Integration in

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_G d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} \delta\varphi^\alpha(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \underbrace{\delta(\partial_\mu \varphi^\alpha)}_{\partial_\mu \delta\varphi^\alpha}(x) \right) \\ &= \int_{\partial G} d\omega_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} \cdot \delta\varphi^\alpha(x) - \int_G d^4x \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} \right) \delta\varphi^\alpha(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

(Summe über $\alpha \in I$, $\mu = 0, \dots, 3$ inbegriffen) findet man aus (3.15) die Euler-Lagrange Gleichungen

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi^\alpha)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^\alpha} = 0 \quad (\alpha \in I). \quad (3.17)$$

Dies sind nun partielle statt gewöhnliche Differentialgleichungen, vgl. (3.1). Wiederum heissen die

$$\pi^\mu{}_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi^\alpha)}(\varphi, \partial\varphi) \quad (3.18)$$

kanonische Impulse.

Bei Variationen der Wirkung um eine mechanische Bahn, bei welcher sowohl das Gebiet G wie auch die Felder auf ∂G variieren dürfen, ist

$$\delta S = \int_{\partial G} d\sigma_\mu (\mathcal{L} \delta v^\mu + \pi^\mu{}_\alpha \delta \varphi^\alpha), \quad (3.19)$$

wobei δv^μ die Variation von ∂G ist. Dies folgt aus der entsprechenden Ergänzung von (3.16).

Beispiele:

a) Es sei φ ein reelles Skalarfeld mit Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi). \quad (3.20)$$

Dann ist $\pi^\mu = \partial^\mu \varphi$ und die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$\square \varphi + V'(\varphi) = 0$$

($\square = \partial_\mu \partial^\mu$). Für $V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 \varphi^2$ ist dies die **Klein-Gordon** Gleichung

$$(\square + m^2)\varphi = 0, \quad (3.21)$$

vgl. (1.17). Das entsprechende \mathcal{L} ist (bis auf ein Vielfaches) die allgemeinste Lorentzskalare Lagrange-Dichte, die quadratisch in diesem Feld φ ist. Man kann auch ein N -komponentiges Feld $\varphi = (\varphi_i)_{i=1}^N$ betrachten,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - m^2 \sum_{i=1}^N \varphi_i^2 \right), \quad (3.22)$$

was für $N = 2$ auch als komplexes Feld $\varphi = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}}$ geschrieben werden kann:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\varphi} \partial^\mu \varphi - m^2 \bar{\varphi} \varphi. \quad (3.23)$$

Es ist äquivalent, (φ_1, φ_2) oder $(\varphi, \bar{\varphi})$ als Feldkomponenten zu betrachten: mit

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} - i \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \frac{\partial}{\partial \varphi_2} \right)$$

ist $\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = \partial^\mu \bar{\varphi}$, $\bar{\pi}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\varphi})} = \partial^\mu \varphi$ und die Euler-Lagrange Gleichungen sind (3.21) und ihr komplex konjugiertes.

b) Die Lagrange-Dichte des e.m. Feldes, das an die vorgegebene 4er-Stromdichte $j^\mu(x)$ gekoppelt ist, lautet

$$\mathcal{L}(A, \partial A, x) = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - j_\alpha A^\alpha, \quad (3.24)$$

wobei $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ der e.m. Feldtensor ist. Sie weicht von der Form (3.14) ab, da \mathcal{L} über j explizit von x abhängt. Es ist

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu} \quad (3.25)$$

und

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu} = -j_\nu \quad (3.26)$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen sind die **Maxwell-Gleichungen**

$$-F_{\mu\nu}{}^{;\mu} + j_\nu = 0. \quad (3.27)$$

Insbesondere folgt als notwendige Bedingung die Kontinuitätsgleichung

$$j^\nu{}_{;\nu} = 0. \quad (3.28)$$

3.3 Symmetrien und Erhaltungsgrößen

Sei $\Psi^\lambda[\varphi]$ ein Fluss wirkend auf die Feldkonfigurationen $(\varphi(x))_{x \in \mathbb{R}^4}$ (wir lassen den Index α weg). Er soll lokal sein: Es gibt einen Fluss t_λ auf \mathbb{R}^4 , sodass $\Psi^\lambda[\varphi](t_\lambda x)$ nur von $\varphi(x)$ abhängt. Dies führt auf die Form

$$\Psi^\lambda[\varphi](x) = T_\lambda(\varphi(t_{-\lambda}x)), \quad (3.29)$$

wo T_λ ein Fluss auf dem Feldraum ist. Bezeichnen wir mit

$$V = \left. \frac{dT_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad v = \left. \frac{dt_\lambda}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \quad (3.30)$$

die entsprechenden Vektorfelder auf dem Feldraum, bzw. auf \mathbb{R}^4 , so ist die Variation von $\varphi^\lambda = \Psi^\lambda[\varphi]$ (Lie-Ableitung)

$$(\delta\varphi)(x) = (V\varphi)(x) - v^\nu \partial_\nu \varphi(x). \quad (3.31)$$

Wir nennen dann Ψ^λ eine **Symmetrie der Wirkung**, falls

$$S_{t_\lambda(G)}[\Psi^\lambda[\varphi]] = S_G[\varphi] + \int_{\partial G} d\sigma_\mu F^\mu(\varphi(x), \lambda) \quad (3.32)$$

für eine Funktion $F^\mu(\varphi, \lambda)$ auf dem Feldraum. Die Begründung ist wie in (3.5): Ist φ eine Lösung, so auch $\Psi^\lambda[\varphi]$. Vergleich der Variation von (3.32) mit (3.19) ergibt

$$\int_{\partial G} d\sigma_\mu (\mathcal{L}v^\mu + \pi^\mu{}_\alpha \delta\varphi^\alpha - \delta F^\mu) = 0,$$

wobei $\delta F^\mu = \partial F(\varphi, \lambda)/\partial \lambda|_{\lambda=0}$; da G beliebig ist, folgt die Kontinuitätsgleichung (**Satz von Noether**)

$$\partial_\mu \underbrace{(\mathcal{L}v^\mu + \pi^\mu_\alpha \delta\varphi^\alpha - \delta F^\mu)}_{=: J^\mu} = 0. \quad (3.33)$$

J^μ ist der **Noether-Strom**. Erhalten, d.h. unabhängig von t , ist die **Ladung**

$$Q = \int d^3x J^0(t, \vec{x}). \quad (3.34)$$

Wir schreiben J^μ anhand von (3.31) noch um als

$$J^\mu = \pi^\mu_\alpha (V\varphi)^\alpha - \underbrace{(\pi^\mu_\alpha \partial_\nu \varphi^\alpha - \mathcal{L}\delta^\mu_\nu)}_{=: T^\mu_\nu} v^\nu - \delta F^\mu, \quad (3.35)$$

vgl. (3.6). T^μ_ν ist der **kanonische Energie-Impuls-Tensor**.

Bemerkungen

1) Im Allgemeinen ist J^μ kein Lorentz-Vektor. Sein Transformationsverhalten hängt von den Eigenschaften von Ψ^λ ab.

2) Die Ersetzung

$$J^\mu \rightsquigarrow J^\mu + \partial_\lambda f^{\lambda\mu} \quad (3.36)$$

mit $f^{\lambda\mu} = -f^{\mu\lambda}$ verletzt weder (3.33) ($\partial_\mu \partial_\lambda f^{\lambda\mu} = 0$) noch ändert sie den Wert von (3.34): Der Zusatzterm ist

$$\int d^3x \partial_\lambda f^{\lambda 0} = \sum_{i=1}^3 \int d^3x \partial_i f^{i0} = 0$$

nach Gauss, sofern die Randterme im Unendlichen verschwinden. Beides gilt auch für die Ersetzung

$$T^{\mu\nu} \rightsquigarrow T^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \quad (3.37)$$

mit $f^{\lambda\mu\nu} = -f^{\mu\lambda\nu}$ und v^ν konstant.

3) Eine **Symmetrie der Lagrange-Dichte** liegt vor, falls

$$\mathcal{L}(\Psi^\lambda[\varphi], \partial\Psi^\lambda[\varphi]) \Big|_{t_\lambda x} = \mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) + \partial_\mu F^\mu(\varphi, \lambda) \Big|_x \quad (3.38)$$

mit t_λ volumenerhaltend. Dann gilt (3.32). Die Symmetrien in den folgenden Beispielen sind von dieser Form, und zwar oft mit $F = 0$.

Spezialfälle: 1) Innere Symmetrien. Diese entsprechen $t_\lambda = \text{id}$, also $v = 0$. Der Noether Strom ist

$$J^\mu = \pi^\mu_\alpha (V\varphi)^\alpha - \delta F^\mu. \quad (3.39)$$

Beispiele: (Fortsetzungen)

a) Die Lagrange-Dichte (3.23) des komplexen Skalarfeldes ist invariant, vgl. (3.38), unter **globalen Eichtransformationen**

$$\varphi \rightarrow \varphi \cdot e^{-i\lambda}, \quad \bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi} \cdot e^{i\lambda}$$

Dies entspricht $V\varphi = -i\varphi$ in (3.30). Der Strom ist

$$J^\mu = i(\bar{\varphi}\partial^\mu\varphi - \varphi\partial^\mu\bar{\varphi}). \quad (3.40)$$

Analoges gilt bei „minimaler“ Kopplung des Feldes φ an ein äusseres e.m. Feld

$$\mathcal{L} = (-i\partial^\mu - eA^\mu)\bar{\varphi} \cdot (i\partial_\mu - eA_\mu)\varphi - m^2\bar{\varphi}\varphi$$

mit Impulsen

$$\pi^\mu = (\partial^\mu - ieA^\mu)\bar{\varphi}, \quad \bar{\pi}^\mu = (\partial^\mu + ieA^\mu)\varphi \quad (3.41)$$

und Euler-Lagrange Gleichungen

$$-(i\partial^\mu - eA^\mu)(i\partial_\mu - eA_\mu)\varphi + m^2\varphi = 0 \quad (3.42)$$

(& komplex konjugiertes). Der Strom aus der globalen Eichtransformation $\varphi \rightarrow e^{-i\lambda e}\varphi$ ist

$$J^\mu = e(\bar{\varphi}(i\partial^\mu - eA^\mu)\varphi + \varphi(-i\partial^\mu - eA^\mu)\bar{\varphi}), \quad (3.43)$$

vgl. (1.27).

b) Die **lokale Eichtransformation**

$$A_\mu \mapsto A_\mu + \lambda\partial_\mu\chi, \quad (3.44)$$

mit $\chi = \chi(x)$ beliebig, lassen zwar die Lagrange-Dichte (3.24) nicht invariant, aber, falls der äussere Strom (3.28) erfüllt, gilt (3.38) mit Divergenzterm $-\lambda(\partial_\mu\chi)j^\mu = -\lambda\partial_\mu(\chi j^\mu)$, d.h. $\delta F^\mu = -\chi j^\mu$. Zusammen mit $(VA)_\alpha = \partial_\alpha\chi$ ist (3.33)

$$J^\mu = -F^{\mu\alpha}\partial_\alpha\chi + \chi j^\mu \quad (3.45)$$

und

$$\partial_\mu J^\mu = -\underbrace{F^{\mu\alpha}\partial_\mu\partial_\alpha\chi}_{=0} - (F^{\mu\alpha}{}_{,\mu} - j^\alpha)\partial_\alpha\chi \quad (3.46)$$

unter Verwendung von (3.28). Der Noethersche Satz, $\partial_\mu J^\mu = 0$, ist äquivalent zu (3.27).

a) & b) minimal gekoppelt. Die Lagrange-Dichte ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}(A, \varphi, \bar{\varphi}, \partial A, \partial\varphi, \partial\bar{\varphi}) \\ &= -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} + (-i\partial^\mu - eA^\mu)\bar{\varphi} \cdot (i\partial_\mu - eA_\mu)\varphi - m^2\bar{\varphi}\varphi \end{aligned} \quad (3.47)$$

mit Impulsen (3.25, 3.41) sowie

$$\frac{\partial L}{\partial A^\nu} = -j_\nu,$$

wobei j_ν nun durch (3.43) gegeben ist. Die Bewegungsgleichungen sind die gekoppelten Feldgleichungen (3.27, 3.42). Die Lagrange-Dichte (3.47) ist invariant unter lokalen Eichtransformationen

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \lambda \partial_\mu \chi, \quad \varphi \rightarrow \varphi e^{-i\lambda e \chi}, \quad \bar{\varphi} \rightarrow \bar{\varphi} e^{i\lambda e \chi},$$

denn für die **kovariante Ableitung** $i\partial_\mu - eA_\mu$ gilt

$$(i\partial_\mu - e(A_\mu + \partial_\mu \chi)) e^{-ie\chi} \varphi = e^{-ie\chi} (i\partial_\mu - eA_\mu) \varphi.$$

Der Noether-Strom ist (3.45) und, vgl. (3.46),

$$\partial_\mu J^\mu = - (F^{\mu\alpha}{}_{,\mu} - j^\alpha) \partial_\alpha \chi + j^\mu{}_{,\mu} \chi.$$

Zusammenfassend: aus Noether für globale Eichtransformationen ($\chi = \text{konst}$) folgt $j^\mu{}_{,\mu} = 0$; für lokale darüber hinaus $F^{\mu\alpha}{}_{,\mu} = j^\alpha$.

2) Raumzeitliche Translationen

$$\Psi^\lambda[\varphi](x) = \varphi(x - \lambda a)$$

mit $a \in \mathbb{R}^4$ (α weggelassen). Hier ist $V = 0$, der Noether-Strom (3.33) also

$$J^\mu = -T^\mu{}_\nu a^\nu$$

und es folgt

$$T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0.$$

Erhalten ist der **Impuls**

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}(t, \vec{x}) \quad (3.48)$$

Beispiele:

a) Für das reelle Skalarfeld (3.20) ist

$$T^\mu{}_\nu = \partial^\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \left(\frac{1}{2} \partial_\sigma \varphi \partial^\sigma \varphi - V(\varphi) \right) \delta^\mu{}_\nu, \quad (3.49)$$

insbesondere

$$T^{00} = \frac{1}{2} [(\partial_0 \varphi)^2 + (\vec{\nabla} \varphi)^2] + V(\varphi), \quad T^{0i} = -\partial_0 \varphi \partial_i \varphi.$$

b) Für das e.m. Feld mit $j = 0$ ist der kanonische Energie-Impuls-Tensor

$$T^\mu{}_\nu = -F^\mu{}_\sigma \partial_\nu A^\sigma - \mathcal{L} \delta^\mu{}_\nu,$$

d.h.

$$T^{\mu\nu} = -F^\mu{}_\sigma \partial^\nu A^\sigma - \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} g^{\mu\nu}. \quad (3.50)$$

Er ist weder symmetrisch noch eichinvariant, im Unterschied zu dem aus der ED bekannten Energie-Impuls-Tensor ($T_{\text{ED}}^{\mu\nu} = F^\mu{}_\sigma F^{\sigma\nu} - (1/4) F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha} g^{\mu\nu}$). Diesbezüglich fehlt ihm der Term

$$F^\mu{}_\sigma \partial^\sigma A^\nu = F^{\mu\sigma} \partial_\sigma A^\nu = \partial_\sigma (F^{\mu\sigma} A^\nu), \quad (3.51)$$

wobei die letzte Gleichung die Maxwell-Gleichung $\partial_\sigma F^{\mu\sigma} = 0$ voraussetzt. Nach (3.37) bleibt der Unterschied ohne Konsequenzen. Insbesondere liefert (3.50) dieselben, aus der ED bekannten Erhaltungsgrößen (2.16, 2.28).

3) Lorentz-Transformationen. Die infinitesimale Version der Lorentz-Transformation $(tx)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ ist

$$v^\mu = \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \quad (3.52)$$

mit $\varepsilon_{\mu\nu} + \varepsilon_{\nu\mu} = 0$, s. (1.4). Die Transformation eines Feldes,

$$\varphi'(x') = (T_\Lambda \varphi)(\Lambda^{-1}x'),$$

ist bestimmt durch eine Darstellung T_Λ der (eigentlichen, orthochronen) Lorentz-Gruppe auf dem Feldraum. Ist dieser ein Vektorraum, so ist T_Λ eine lineare Abbildung, ebenso seine Erzeugende V , die selbst linear in ε ist:

$$V = \frac{1}{2} \varepsilon_{\lambda\rho} S^{\lambda\rho} \quad (3.53)$$

mit linearen Abbildungen $S^{\lambda\rho}$, $S^{\lambda\rho} + S^{\rho\lambda} = 0$.

Beispiele:

a) Für das Skalarfeld ist $T_\Lambda = \text{id}$, also $S = 0$.

b) Für das e.m. Feld, wo

$$A'(x') = (\Lambda A)(\Lambda^{-1}x'),$$

ist auch $V = \varepsilon$, bzw.

$$(S^{\lambda\rho})^\mu{}_\nu = g^{\lambda\mu} \delta^\rho{}_\nu - g^{\rho\mu} \delta^\lambda{}_\nu. \quad (3.54)$$

Aus (3.35, 3.52, 3.53) folgt der Noether-Strom

$$J^\mu = \frac{1}{2} \theta^{\mu\lambda\nu} \varepsilon_{\lambda\nu}$$

(wobei $\theta^{\mu\lambda\sigma} = -\theta^{\mu\sigma\lambda}$) mit **Drehimpulstensor**

$$\theta^{\mu\lambda\nu} = \underbrace{\pi^\mu{}_\alpha (S^{\lambda\nu} \varphi)^\alpha}_{=: S^{\mu\lambda\nu}} + \underbrace{x^\lambda T^{\mu\nu} - x^\nu T^{\mu\lambda}}_{\text{Bahndrehimpuls-Tensor}}. \quad (3.55)$$

Spin – Tensor

Er erfüllt

$$\theta^{\mu\lambda\nu}{}_{,\mu} = 0 \quad (3.56)$$

und erhalten sind

$$L^{\lambda\nu} = \int d^3x \theta^{0\lambda\nu}(t, \vec{x}). \quad (3.57)$$

Bemerkungen:

1) Unberührt bleiben (3.56, 3.57) unter einer Ersetzung

$$\theta^{\mu\lambda\nu} \rightsquigarrow \theta^{\mu\lambda\nu} + \partial_\sigma f^{\sigma\mu\lambda\nu} \quad (3.58)$$

mit $f^{\sigma\mu\lambda\nu} = -f^{\mu\sigma\lambda\nu}$, vgl. (3.36).

2) Der kanonische Energie-Impuls-Tensor ist im Allgemeinen nicht symmetrisch, vgl. (3.50). Allgemein kann ein symmetrischer Energie-Impuls-Tensor gemäss (3.37) wie folgt konstruiert werden (**Belinfante-Tensor**):

$$T_B^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda f^{\lambda\mu\nu} \quad (3.59)$$

mit

$$f^{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} (S^{\lambda\mu\nu} + \underbrace{S^{\mu\nu\lambda}}_{=-S^{\mu\lambda\nu}} + S^{\nu\mu\lambda}) = -f^{\mu\lambda\nu}$$

Wegen $f^{\lambda\mu\nu} - f^{\lambda\nu\mu} = S^{\lambda\mu\nu}$ folgt aus (3.56) und $T^{\mu\nu}_{,\mu} = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu f^{\mu\lambda\nu} - \partial_\mu f^{\mu\nu\lambda} + x^\lambda T^{\mu\nu}_{,\nu} + T^{\lambda\nu} - x^\nu T^{\mu\lambda}_{,\mu} - T^{\nu\lambda} \\ &= T_B^{\lambda\nu} - T_B^{\nu\lambda}, \end{aligned}$$

d.h. T_B ist längs mechanischen Bahnen symmetrisch. Der Unterschied zwischen $\theta^{\mu\lambda\nu}$ und

$$\theta_B^{\mu\lambda\nu} := x^\lambda T_B^{\mu\nu} - x^\nu T_B^{\mu\lambda}$$

ist

$$S^{\mu\lambda\nu} + x^\lambda (-\partial_\sigma f^{\sigma\mu\nu}) - x^\nu (-\partial_\sigma f^{\sigma\mu\lambda}) = \partial_\sigma (x^\nu f^{\sigma\mu\lambda}) - \partial_\sigma (x^\lambda f^{\sigma\mu\nu}) + \underbrace{f^{\mu\nu\lambda} - f^{\mu\lambda\nu} + S^{\mu\lambda\nu}}_{=0}$$

sodass nach (3.58) auch $\theta_B^{\mu\lambda\nu}$ zulässig ist.

Die Bedeutung von (3.57) ist nebst der Erhaltung der räumlichen Drehimpulskomponenten $L^i = L^{i+1\ i+2}$, ($i = 1, 2, 3$) auch die des Trägheitsgesetz für den Schwerpunkt X^i der Energiedichte T_B^{00} :

$$L^{0i} = t \underbrace{\int d^3x T_B^{0i}}_{P^i} - \underbrace{\int d^3x x^i T_B^{00}}_{=: X^i P^0},$$

$$\text{d.h. } X^i = \frac{P^i}{P^0} t - \frac{L^{0i}}{P^0}.$$

b) Für das e.m. Feld findet man aus (3.54) $f^{\lambda\mu\nu} = F^{\mu\lambda} A^\nu$. Damit ist aber der Zusatzterm in (3.59) identisch mit (3.51).

Zum Schluss und im Hinblick auf die kanonische Quantisierung führen wir noch die Hamiltonsche Behandlung ein: Unter der Analogie (3.13) wird aus (3.8)

$$H[\varphi, \pi] = \int d^3x \mathcal{H}(\varphi^\alpha(\vec{x}), \vec{\nabla}\varphi^\alpha(\vec{x}), \pi_\alpha(\vec{x}))$$

mit **Hamiltondichte**

$$\mathcal{H}(\varphi, \vec{\nabla}\varphi, \pi) = \pi_\alpha \dot{\varphi}^\alpha - \mathcal{L}(\varphi, \underbrace{\dot{\varphi}, \vec{\nabla}\varphi}_{\partial\varphi}) \quad (= T^{00}), \quad (3.60)$$

wobei die $\dot{\varphi}^\alpha = \partial_0\varphi^\alpha$ durch Auflösung von

$$\pi_\alpha \equiv \pi_{0\alpha} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\varphi^\alpha)}$$

zu bestimmen sind. Die Poisson-Klammer für Funktionen $F[\varphi, \pi]$ aus dem Phasenraum ist

$$\{F, G\} = \int d^3x \left(\frac{\delta F}{\delta \pi_\alpha(\vec{x})} \frac{\delta G}{\delta \varphi^\alpha(\vec{x})} - \frac{\delta F}{\delta \varphi^\alpha(\vec{x})} \frac{\delta G}{\delta \pi_\alpha(\vec{x})} \right)$$

und insbesondere gilt

$$\begin{aligned} \{\pi_\alpha(\vec{x}), \varphi^\beta(\vec{y})\} &= \delta_\alpha^\beta \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\pi_\alpha(\vec{x}), \pi_\beta(\vec{y})\} &= 0 = \{\varphi^\alpha(\vec{x}), \varphi^\beta(\vec{y})\}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die zu den Euler-Lagrange Gleichungen äquivalenten kanonischen Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{\varphi}^\alpha(t, \vec{x}) = \{H, \varphi^\alpha(t, \vec{x})\}, \quad \dot{\pi}_\alpha(t, \vec{x}) = \{H, \pi_\alpha(t, \vec{x})\}. \quad (3.62)$$

Beispiele:

a) reelles Skalarfeld (3.20). Mit $\pi = \dot{\varphi}$ ist

$$\mathcal{H} = \pi^2 - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + V(\varphi))$$

b) Für das freie e.m. Feld ist, s. (3.24),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

mit

$$\pi_\nu \equiv \pi_{0\nu} = -F_{0\nu} = \partial_\nu A_0 - \partial_0 A_\nu.$$

In diesen Gleichungen hebt sich \dot{A}_0 weg und kann somit nicht durch π_ν bestimmt werden; ebenso ist $\pi_0(\vec{x}) \equiv 0$ und kann nicht als dynamische Grösse dienen. (Die Bedingung (3.9) für den Übergang zur Hamiltonfunktion ist hier verletzt.) Dass

$$\pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0 A^0)} = 0,$$

ist auch Ausdruck der Eichinvarianz des kinetischen Terms in \mathcal{L} : Unter $A^\nu \rightarrow A^\nu - \lambda \partial^\nu \chi$ mit $\chi = \chi(t)$ ist $\partial^0 A^0 \rightarrow \partial^0 A^0 - \lambda \dot{\chi}$ mit festen restlichen $\partial^\mu A^\nu$. (Die Folgerung gilt also auch, falls ein nicht eichinvarianter Massenterm $\propto A_\mu A^\mu$ zu \mathcal{L} addiert wird.) Wählt man die Coulomb-Eichung $A^0 = 0, \operatorname{div} \vec{A} = 0$, so verbleiben die Impulse

$$\pi_k = F^{0k} = \dot{A}^k = -E_k, \quad (k = 1, 2, 3)$$

(ebenso mit $\operatorname{div} \vec{\pi} = 0$) im Einklang mit (2.10). Die Hamiltondichte ist

$$\mathcal{H} = -\vec{E} \cdot \dot{\vec{A}} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2).$$

Für Betrachtungen, die die relativistische Kovarianz hervorheben, ist folgende, nicht eichinvariante Lagrange-Dichte zwecksmässiger:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{2}(\partial_\alpha A^\alpha)^2 \quad (3.63)$$

$$= -\frac{1}{2}(\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) + \frac{1}{2}(\partial_\beta A_\alpha)(\partial^\alpha A^\beta) - \frac{\lambda}{2}(\partial^\alpha A_\alpha)(\partial_\beta A^\beta). \quad (3.64)$$

Die kanonischen Impulse sind

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} = -F_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} \partial_\alpha A^\alpha,$$

die Euler-Lagrange Gleichungen also

$$-F_{\mu\nu}{}^{;\mu} - \lambda \partial_\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = 0,$$

d.h.

$$\square A^\nu - (1 - \lambda) \partial^\nu (\partial_\alpha A^\alpha) = 0. \quad (3.65)$$

Insbesondere folgt $\lambda \square (\partial_\nu A^\nu) = 0$: Für $\lambda \neq 0$ gilt die (lorentz-invariante) Lorentz-Eichung

$$\partial_\nu A^\nu = 0, \quad (3.66)$$

sobald $\partial_\nu A^\nu|_{t=0} = 0$, $\partial_0 (\partial_\nu A^\nu)|_{t=0} = 0$ gilt (letzte Bedingung lautet $\Delta A^0 + \partial^0 (\partial_i A^i)|_{t=0} = 0$ nach Elimination von $\partial_0^2 A$ mittels (3.65)). Man nennt deshalb $-(\lambda/2) (\partial_\alpha A^\alpha)^2$ in (3.63) einen **eichfixierenden Term**, obschon dies später in der quantenmechanischen Behandlung nicht so einfach zu bewerkstelligen sein wird. Gilt (3.66), so ist (3.65) äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen. Beachte, dass $\pi_\nu \equiv \pi_{0\nu} = -F_{0\nu} - \lambda \delta_{0\nu} (\partial_\alpha A^\alpha)$, d.h.

$$\pi_0 = -\lambda(\dot{\varphi} + \text{div } \vec{A}), \quad \pi_k = \dot{A}_k,$$

was für $\lambda \neq 0$ nach $(\dot{\varphi}, \vec{A})$ auflösbar ist und eine Hamiltonsche Formulierung erlaubt. Wir besprechen bloss den Fall $\lambda = 1$ (**Feynman Eichung**) näher: wegen $\partial_\beta (\partial^\alpha A^\beta - g^{\alpha\beta} \partial_\rho A^\rho) = 0$ sind die beiden letzten Terme in (3.64) gleich der Divergenz

$$\frac{1}{2} \partial_\beta [A_\alpha (\partial^\alpha A^\beta - g^{\alpha\beta} \partial_\rho A^\rho)]. \quad (3.67)$$

Damit ist die Lagrange-Dichte äquivalent zu (Fermi)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\alpha A_\beta) (\partial^\alpha A^\beta) \quad (3.68)$$

(der Term (3.67) liefert einen Randterm zur Wirkung, der keinen Beitrag zu ihrer Variation liefert): dies entspricht der Lagrange-Dichte eines masselosen Skalarfeldes für jede Komponente A^β , ($\beta = 0, \dots, 3$), bis auf das unübliche Vorzeichen für $\beta = 0$. Allerdings ist die Eichbedingung $\partial_\nu A^\nu = 0$ noch aufzuerlegen.

Gelegentlich werden wir zu (3.68) noch einen Massenterm hinzugügen,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_\alpha A_\beta) (\partial^\alpha A^\beta) + \frac{\mu^2}{2} A_\alpha A^\alpha \quad (3.69)$$

allerdings in der Absicht, am Schluss $\mu \rightarrow 0$ zu nehmen.

4 Die Dirac Gleichung

4.1 Die quantenmechanische Lorentz-Gruppe

Aus der QM bekannt ist die quantenmechanische Drehgruppe $SU(2)$, die die Drehgruppe $SO(3)$ überlagert:

$$SU(2)/\{\pm 1\} \cong SO(3).$$

Zugrunde liegt der Homomorphismus $R : SU(2) \rightarrow SO(3)$, $U \mapsto R(U)$, wobei $R(U)$ definiert ist durch

$$U(\vec{x} \cdot \vec{\sigma})U^* = (R(U)\vec{x}) \cdot \vec{\sigma} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3) \quad (4.1)$$

mit $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ (Pauli-Matrizen). Die **quantenmechanische Lorentz-Gruppe** ist

$$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \text{ komplexe } 2 \times 2 \text{ Matrix} \mid \det A = 1\}$$

und enthält $SU(2)$ als Untergruppe. Ihre einfachsten Darstellungen (nebst der trivialen) sind 2-dimensional:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad A &\mapsto A, & \text{(ii)} \quad A &\mapsto (A^T)^{-1}, \\ \text{(iii)} \quad A &\mapsto \bar{A}, & \text{(iv)} \quad A &\mapsto (A^*)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die entsprechenden Darstellungsräume \mathbb{C}^2 werden mit $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}^0, \mathcal{V}_\bullet, \mathcal{V}^\bullet$ bezeichnet. Ihre Vektoren – **Bispinoren** genannt – werden wie folgt bezeichnet:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_0 \ni u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} & ; & \quad \mathcal{V}^0 \ni \tilde{u} = \begin{pmatrix} \tilde{u}^1 \\ \tilde{u}^2 \end{pmatrix} \\ \mathcal{V}_\bullet \ni u &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} & ; & \quad \mathcal{V}^\bullet \ni \tilde{v} = \begin{pmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ihr Transformationsverhalten ist

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad u' &= Au : & u'_\alpha &= A_\alpha^\beta u_\beta \\ \text{(ii)} \quad \tilde{u}' &= (A^T)^{-1}\tilde{u} : & \tilde{u}'^\alpha &= A^\alpha_\beta \tilde{u}^\beta \\ \text{(iii)} \quad v' &= \bar{A}v : & v'_\alpha &= \bar{A}_\alpha^\beta v_\beta \\ \text{(iv)} \quad \tilde{v}' &= (A^*)^{-1}\tilde{v} : & \tilde{v}'^{\dot{\alpha}} &= \bar{A}^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \tilde{v}^{\dot{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Für $u \in \mathcal{V}_0$ und $\tilde{u} \in \mathcal{V}^0$ (und analog für $v \in \mathcal{V}_\bullet, \tilde{v} \in \mathcal{V}^\bullet$) ist $u_\alpha \tilde{u}^\alpha$ invariant:

$$u'_\alpha \tilde{u}'^\alpha = (Au)^T (A^T)^{-1} \tilde{u} = u^T \tilde{u} = u_\alpha \tilde{u}^\alpha, \quad \text{d.h. } A_\gamma^\alpha A^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta \quad (4.4)$$

Die Darstellungen (i) und (ii), bzw. (iii) und (iv), sind äquivalent. Dies folgt aus der für beliebige, reguläre 2×2 Matrizen geltende Beziehung

$$(\det A) (A^T)^{-1} = \varepsilon A \varepsilon^T, \quad (4.5)$$

wobei

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\varepsilon^{-1}$$

Bezeichnung: $\varepsilon = (\varepsilon^{\alpha\beta})$, $\varepsilon^{-1} = (\varepsilon_{\alpha\beta})$. Damit ist

$$\varepsilon : \mathcal{V}_0 \rightarrow \mathcal{V}^0, \quad \tilde{u}^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta} u_\beta. \quad (4.6)$$

und (4.5) lautet für $A \in SL(2, \mathbb{C})$

$$A^\alpha{}_\beta = \varepsilon^{\alpha\gamma} A_\gamma{}^\delta \varepsilon_{\delta\beta}.$$

Bemerkung: (i) und (iii) sind inäquivalent, da $\text{tr } A \neq \text{tr } \bar{A}$ für allgemeine $A \in SL(2, \mathbb{C})$. Schränkt man sie jedoch auf $SU(2)$ ein, so sind sie (bzw. (i) und (iv)) ebenfalls äquivalent: $A = (A^*)^{-1}$.

Die Darstellungen auf $\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{V}_\bullet \ni \tilde{x} = (\tilde{x}_{\alpha\dot{\beta}})$ und $\mathcal{V}^\bullet \otimes \mathcal{V}^0 \ni \hat{x} = (\hat{x}^{\dot{\alpha}\beta})$ sind

$$\tilde{\Lambda}(A) : \tilde{x}_{\alpha\dot{\beta}} \mapsto A_\alpha{}^\gamma \bar{A}_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\delta}} \tilde{x}_{\gamma\dot{\delta}}, \quad \text{d.h.} \quad \tilde{x} \mapsto A\tilde{x}A^* \quad (4.7)$$

$$\hat{\Lambda}(A) : \hat{x}^{\dot{\alpha}\beta} \mapsto \bar{A}^{\dot{\alpha}}{}_\gamma A^\beta{}_\delta \hat{x}^{\gamma\delta}, \quad \text{d.h.} \quad \hat{x} \mapsto (A^*)^{-1} \hat{x} A^{-1} \quad (4.8)$$

Sie sind verträglich mit $\tilde{x} = \tilde{x}^*$, bzw. $\hat{x} = \hat{x}^*$ und ferner zueinander äquivalent über Transposition und (4.6):

$$\hat{x} = \varepsilon \tilde{x}^T \varepsilon^T. \quad (4.9)$$

Dabei ist $\hat{x} = \hat{x}^*$ genau dann, falls $\tilde{x}^* = \tilde{x}$. Eine Basis für $\mathcal{V}_0 \otimes \mathcal{V}_\bullet$ ist $\{\sigma_\mu\} = (\sigma_0 = \mathbf{1}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$:

$$\tilde{x} = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\tilde{x}_{\alpha\dot{\beta}} = x^\mu \sigma_{\mu, \alpha\dot{\beta}}$$

mit $\tilde{x}^* = \tilde{x}$ genau dann, falls $x^\mu \in \mathbb{R}$. Unter (4.9) entspricht dieser Basis aufgrund von (4.5)

$$\hat{\sigma}_\mu = (\hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta}) = \varepsilon \sigma_\mu^T \varepsilon^T = (\det \sigma_\mu) \sigma_\mu^{-1} = (P\sigma)_\mu, \quad (4.10)$$

wobei $P : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(P\xi)_0 = \xi_0$, $(P\xi)_i = -\xi_i$ die Raumspiegelung ist. Wir bemerken

$$\sigma_\nu \hat{\sigma}_\mu + \sigma_\mu \hat{\sigma}_\nu = 2g_{\mu\nu} \mathbf{1} \quad (4.11)$$

und

$$\text{tr}(\hat{\sigma}_\mu \sigma_\nu) = 2g_{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

sodass

$$x_\mu = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\sigma}_\mu \tilde{x}),$$

wobei, wie üblich, $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu$.

Es gilt

$$\det \tilde{x} = x_\mu x^\mu.$$

Die Darstellung (4.7), $\tilde{x}' = A\tilde{x}A^*$, erfüllt $\det \tilde{x}' = \det \tilde{x}$ und definiert somit eine Lorentz-Transformation $\Lambda(A) \in L_+^\uparrow$

$$\Lambda(A) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto x' = \Lambda(A)x,$$

kurz

$$A(x^\nu \sigma_\nu) A^* = (\Lambda(A)x)^\mu \sigma_\mu \quad (4.13)$$

oder

$$\Lambda(A)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{tr}(\hat{\sigma}^\mu A \sigma_\nu A^*).$$

Man zeigt, dass jedes $\Lambda \in L_+^\uparrow$ von der Form $\Lambda(A)$ ist und dass $\Lambda(A) = 1$ nur für $A = \pm 1$.
Damit ist

$$L_+^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm 1\}.$$

Da $\tilde{x} = x^\mu \sigma_\mu$ und $\hat{x} = x^\mu \hat{\sigma}_\mu$ sich unter (4.9) entsprechen, definiert auch (4.8) dieselbe Darstellung (4.13). Zusammen mit $\hat{x} = (Px)^\mu \sigma_\mu$ folgt $P\Lambda(A)x = \Lambda(A^{*-1})Px$, d.h.

$$P\Lambda(A)P = \Lambda(A^{*-1}). \quad (4.14)$$

Bemerkungen:

1) Für $U \in SU(2)$, also $U = U^{*-1}$, gilt

$$\Lambda^0_0(U) = 1, \quad \Lambda^0_i(U) = \Lambda^i_0(U) = 0.$$

Somit zerfällt

$$\Lambda(U) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R(U) \end{array} \right),$$

wobei $R(U) \in SO(3)$ durch (4.1) gegeben ist.

2) Die infinitesimale Version von (4.13) ist

$$a = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} S^{\mu\nu} \quad \text{mit } S^{0j} = \sigma_j/2, \quad S^{j+1j+2} = -i\sigma_j/2, \quad (j = 1, 2, 3); \quad (4.15)$$

dabei ist $a = dA(\lambda)/d\lambda|_{\lambda=0}$ (mit $A(0) = 1$) eine infinitesimale quantenmechanische Lorentz-Transformation, und $\varepsilon = d\Lambda(A(\lambda))/d\lambda|_{\lambda=0}$. Dies folgt aus (4.13) über $a\sigma_\nu + \sigma_\nu a^* = \varepsilon^\mu{}_\nu \sigma_\mu$ (s. Übungen).

4.2 Die Weyl Gleichungen

Als Lagrangedichte für ein masseloses Spin $\frac{1}{2}$ -Feld bietet sich an

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_L &= \frac{i}{2} \varphi^* \hat{\sigma}_\mu \overleftrightarrow{\partial}^\mu \varphi \\ &= \frac{i}{2} (\overline{\varphi}_\alpha \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \partial^\mu \varphi_\beta - \partial^\mu \overline{\varphi}_\alpha \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \varphi_\beta) \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit $\varphi = (\varphi_\alpha)_{\alpha=1,2}$, $\varphi^* = \overline{\varphi}^T$. Aus der Stellung der Indizes geht hervor, dass \mathcal{L}_L ein Lorentz-Skalar unter L_+^\uparrow ist, oder ausführlicher: Aus $\varphi'(x') = A\varphi(x)$, ($x' = \Lambda(A)x$), d.h. $\varphi_\beta(x) = A^\gamma{}_\beta \varphi'_\gamma(x')$, folgt

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_\alpha(x) \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \partial^\mu \varphi_\beta(x) &= \overline{\varphi}_\delta(x') \overline{A}^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\alpha}} \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} A^\gamma{}_\beta \partial^\mu \varphi'_\gamma(x') \\ &= \overline{\varphi}_\delta(x') \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\delta}\gamma} \underbrace{(\Lambda(A)\partial)^\mu}_{\partial'} \varphi'_\gamma(x'). \end{aligned}$$

(Der Faktor i in (4.16) stellt sicher, dass \mathcal{L}_L reell ist). Die kanonischen Impulse sind

$$\begin{aligned}\bar{\pi}_\mu{}^{\dot{\alpha}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}})} = -\frac{i}{2} \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \varphi_\beta, \\ \pi_\mu{}^\beta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_\beta)} = \frac{i}{2} \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta},\end{aligned}$$

ferner

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}} = \frac{i}{2} \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \partial^\mu \varphi_\beta, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_\beta} = -\frac{i}{2} \partial^\mu \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta},$$

woraus sich die Euler-Lagrange Gleichung ergibt

$$i \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \partial^\mu \varphi_\beta = 0. \quad (4.17)$$

Sie beschreibt ein masseloses Feld, denn ihre Lösungen erfüllen die Klein-Gordon Gleichung (3.21) mit $m = 0$ wegen, vgl. (4.11),

$$\sigma_{\gamma\dot{\alpha}}^\nu \partial_\nu \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \partial^\mu = \delta_\gamma^\beta \delta^\nu_\mu \partial_\nu \partial^\mu = \delta_\gamma^\beta \square.$$

Die Lagrange-Dichte besitzt die globale Eichsymmetrie

$$\varphi_\beta \rightarrow e^{-i\lambda} \varphi_\beta, \quad \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \rightarrow e^{i\lambda} \bar{\varphi}^{\dot{\alpha}} \quad (4.18)$$

mit Noether-Strom

$$J_\mu = \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}} \hat{\sigma}_\mu^{\dot{\alpha}\beta} \varphi_\beta.$$

Die infinitesimale Variation des Feldes unter Lorentz-Transformationen ist nach (3.31, 3.53)

$$\delta \varphi_\alpha = -\varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \varphi_\alpha + a_\alpha{}^\beta \varphi_\beta = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} ((x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu + S_{\mu\nu}) \varphi)_\alpha,$$

der Drehimpulsoperator also

$$M_{\mu\nu} = -i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) - iS_{\mu\nu} \quad (4.19)$$

bei Konvention (1.7). Insbesondere ist nach (4.15) der Spin $-iS_{i+1}{}^{i+2} = \sigma_i/2$. Die Gleichung (4.17) mit $p^\mu = i\partial^\mu$ besagt $\vec{p} \cdot \vec{\sigma} \varphi = -p^0 \varphi$. Somit sind Impuls \vec{p} und Spin $\vec{\sigma}/2$ entgegengesetzt gerichtet, d.h. das Feld, bzw. das Teilchen ist linkshändig.

Analoges lässt sich sagen über die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_R &= \frac{i}{2} \chi^* \sigma_\mu \overleftrightarrow{\partial}^\mu \chi \\ &= \frac{i}{2} (\bar{\chi}^\alpha \sigma_{\mu,\alpha\dot{\beta}} \partial^\mu \chi^{\dot{\beta}} - \partial^\mu \bar{\chi}^\alpha \sigma_{\mu,\alpha\dot{\beta}} \chi^{\dot{\beta}})\end{aligned} \quad (4.20)$$

mit $\chi = (\chi^{\dot{\alpha}})_{\dot{\alpha}=1,2}$, $\chi^* = \bar{\chi}^T$ und über die entsprechende Feldgleichung

$$i \sigma_{\mu,\alpha\dot{\beta}} \partial^\mu \chi^{\dot{\beta}} = 0. \quad (4.21)$$

Die Gleichungen (4.17, 4.21) sind die **Weyl-Gleichungen** (1929). Sie sind nicht spiegelungsinvariant: Es gibt keine Transformation S derart, dass sie invariant sind unter $\varphi \rightarrow \varphi'$ mit $\varphi'(x') = S\varphi(x)$, $x' = Px$, (vgl. Übungen).

4.3 Die Dirac Gleichung

Ein Feld, das die Spiegelungssymmetrie besitzt, ergibt sich wie folgt

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi_\alpha \\ \chi^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \quad (\text{Dirac-Spinor}) \quad (4.22)$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi \quad (4.23)$$

mit

$$\bar{\Psi} := \Psi^* \gamma^0.$$

Aus dem Vergleich mit (4.16, 4.20) muss gelten $\gamma^0 \gamma^\mu = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix}$: Dies ist durch

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \hat{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix},$$

d.h.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

erfüllt.

Bemerkung: Die Matrizen (4.24) sind die **chirale Darstellung** der Dirac-Algebra (1.29)

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.25)$$

Aus (4.3) ergibt sich das Transformationsverhalten des Dirac-Feldes (4.22) unter Lorentz-Transformationen aus L_+^\uparrow :

$$\Psi'(x') = S(A)\Psi(x) \quad (x' = \Lambda(A)x)$$

mit

$$S(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^*)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Die Raumspiegelung P ist nun durch Vertauschung der beiden Bispinoren φ und χ gegeben

$$\Psi'(x') = \gamma^0 \Psi(x) \quad (x' = Px). \quad (4.27)$$

Es gilt

$$\gamma^0 S(A) \gamma^0 = S((A^*)^{-1}), \quad (4.28)$$

was in Analogie zu (4.14) steht. Zusammen stellen sie sicher, dass S zu einer (zweideutigen) Darstellung von $L^\uparrow = L_+^\uparrow \cup PL_+^\uparrow$ wird: zerlegt man $\Lambda \in PL_+^\uparrow$ als $\Lambda = P\Lambda_1 = \Lambda_2 P$ mit $\Lambda_i = \Lambda(A_i) \in L_+^\uparrow$, so ist $\gamma^0 S(A_1) = S(A_2) \gamma^0$, da (bis auf das Vorzeichen) $A_2 = (A_1^*)^{-1}$. Aus (4.28) folgt zudem $\bar{\Psi}'(x') = \bar{\Psi}(x) S(A^{-1})$.

Die Lagrangedichte (4.23) kann durch einen Massenterm ergänzt werden:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (4.29)$$

Die Lorentzinvarianz von \mathcal{L} folgt aus der von \mathcal{L}_L , \mathcal{L}_R und von, s. (4.4),

$$\bar{\Psi}\Psi = \varphi^*\chi + \chi^*\varphi = \bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}\chi^{\dot{\alpha}} + \bar{\chi}^{\alpha}\varphi_{\alpha}, \quad (4.30)$$

Anders gesagt: Die Invarianz unter L_+^{\uparrow} des kinetischen Terms folgt aus der Zusammenlegung von (4.13) für $\hat{\sigma}^{\mu}$ und σ^{μ}

$$S(A^{*-1})x_{\nu}\gamma^0\gamma^{\nu}S(A)^{-1} = (\Lambda(A)x)_{\mu}\gamma^0\gamma^{\mu}, \quad (4.31)$$

die des Massenterms aus (4.28). Deswegen lautet (4.31) auch

$$S(A)x_{\nu}\gamma^{\nu}S(A)^{-1} = (\Lambda(A)x)_{\mu}\gamma^{\mu}. \quad (4.32)$$

Die Invarianz von (4.29) unter der Raumspiegelung (4.27) mit $P : \Psi \rightarrow \gamma^0\Psi$, $\bar{\Psi} \rightarrow \bar{\Psi}\gamma^0$ folgt aus, s. (4.25),

$$\gamma^0(x_{\nu}\gamma^{\nu})\gamma^0 = (Px)_{\mu}\gamma^{\mu}.$$

Die Ableitungen von \mathcal{L} (mit Ψ , $\bar{\Psi}$ als unabhängige Größen) sind

$$\bar{\pi}^{\mu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\bar{\Psi})} = -\frac{i}{2}\gamma^{\mu}\Psi, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\Psi}} = \frac{i}{2}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Psi - m\Psi, \quad (4.33)$$

die Euler-Lagrange Gleichungen

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi = 0, \quad (4.34)$$

$$\bar{\Psi}(i\gamma^{\mu}\overleftarrow{\partial}_{\mu} + m) = 0 \quad (4.35)$$

sind die **Dirac-Gleichung** (1.28). In Bispinoren ausgedrückt lautet sie, vgl. (4.17, 4.21),

$$\begin{aligned} i\hat{\sigma}_{\mu}^{\dot{\alpha}\beta}\partial^{\mu}\varphi_{\beta} &= m\chi^{\dot{\alpha}}, \\ i\sigma_{\mu,\alpha\dot{\beta}}\partial^{\mu}\chi^{\dot{\beta}} &= m\varphi_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Die globale Eichsymmetrie (4.18) liegt für (4.29) mit $m \neq 0$ nur vor, falls φ und χ gleich transformieren:

$$\Psi \rightarrow e^{-i\lambda}\Psi, \quad \bar{\Psi} \rightarrow e^{i\lambda}\bar{\Psi}. \quad (4.37)$$

Der Noether Strom ist

$$J^{\mu} = \bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi.$$

Es sei noch bemerkt, dass in \mathcal{L} ein weiterer (chiraler) Massenterm möglich ist:

$$-i\tilde{m}\bar{\Psi}\gamma^5\Psi = i\tilde{m}(\bar{\varphi}_{\dot{\alpha}}\chi^{\dot{\alpha}} - \bar{\chi}^{\alpha}\varphi_{\alpha}) \quad (4.38)$$

mit

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

bzw. (ohne Bezug auf die Darstellung) $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Er ist invariant unter (4.37) und L_+^{\uparrow} , nicht aber unter der Raumspiegelung. Dies folgt aus

$$S(A)\gamma^5S(A)^{-1} = \gamma^5, \quad \gamma^0\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^5.$$

Infinitesimale Lorentz-Transformationen sind

$$S(a)|_{\lambda=0} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu}S^{\mu\nu} \quad \text{mit } S^{\mu\nu} = \frac{1}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Aus (4.26, 4.15) folgt ja $S^{0j} = (1/2)\begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & -\sigma_j \end{pmatrix}$, $S^{j+1j+2} = -(i/2)\begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}$, was sich wie behauptet zusammenfassen lässt. Insbesondere folgt mit (4.19) der Drehimpulsoperator (1.40).

Schliesslich kann das Dirac-Feld minimal an ein e.m. Feld gekoppelt werden:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (4.39)$$

(dabei wurde gegenüber (4.29) noch eine Divergenz, $(i/2)\partial_\mu(\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi)$, hinzugenommen). Das Feld Ψ wird nach Quantisierung geladene Teilchen beschreiben.

4.4 Die Majorana Bedingung

Um aus dem komplexen Dirac-Feld ein reelles zu erhalten, und damit neutrale Teilchen zu beschreiben, ist eine Bedingung zu stellen (vgl. $\varphi = \bar{\varphi}$ beim komplexen Skalarfeld (3.23)), die mit Lorentz-Transformationen verträglich ist. Diese ist

$$\chi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\bar{\varphi}_\beta, \quad (4.40)$$

(also auch $\varphi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\bar{\chi}^\beta$), bzw.

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = i\gamma^2 \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

oder

$$\Psi = i\gamma^2\gamma^0\bar{\Psi}^T. \quad (4.42)$$

Sie ist nicht invariant unter Eichtransformationen (4.37), dafür aber unter **chiralen Eichtransformationen**

$$\varphi_\alpha \rightarrow e^{-i\lambda}\varphi_\alpha, \quad \chi^\alpha \rightarrow e^{i\lambda}\chi^\alpha, \quad (4.43)$$

d.h.

$$\Psi \longrightarrow e^{i\lambda\gamma_5}\Psi.$$

Die Dirac Gleichung (4.34) wird zu einer Gleichung für einen Bispinor,

$$i\hat{\sigma}_\mu^{\alpha\beta}\partial^\mu\varphi_\beta = m\varepsilon^{\alpha\beta}\bar{\varphi}_\beta, \quad (4.44)$$

und die Lagrange-Dichte (4.29) lässt sich durch φ_α ausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R^T &= -\frac{i}{2}\chi^T\sigma_\mu^T\overleftrightarrow{\partial}^\mu\bar{\chi} \\ &= -\frac{i}{2}\varphi^*\underbrace{\varepsilon^T\sigma_\mu^T\varepsilon}_{(4.10):\hat{\sigma}_\mu}\overleftrightarrow{\partial}^\mu\varphi = -\mathcal{L}_L, \end{aligned} \quad (4.45)$$

sowie, s. (4.30),

$$\bar{\Psi}\Psi = \bar{\varphi}^T\varepsilon\bar{\varphi} + \varphi^T\varepsilon^T\varphi.$$

Da ε antisymmetrisch ist, folgt $\mathcal{L} \equiv 0$. Der Ausweg ist, φ_α und $\chi^{\dot{\beta}}$ als Grassmann Variablen aufzufassen:

$$\varphi_\alpha \varphi_\beta = -\varphi_\beta \varphi_\alpha, \quad \varphi_\alpha \chi^{\dot{\beta}} = -\chi^{\dot{\beta}} \varphi_\alpha, \quad \chi^{\dot{\alpha}} \chi^{\dot{\beta}} = -\chi^{\dot{\beta}} \chi^{\dot{\alpha}}. \quad (4.46)$$

Die Ableitung $\partial/\partial\varphi_\alpha$ eines Produkts solcher Variablen ist zu berechnen, indem zuerst Faktoren φ_α anhand von (4.46) unmittelbar rechts der Ableitung geschrieben werden. So ergibt sich statt (4.45) $\mathcal{L}_R = -\mathcal{L}_R^T = +\mathcal{L}_L$, also

$$\mathcal{L}' \equiv \frac{1}{2}\mathcal{L} = \frac{i}{2}\bar{\varphi}^T \hat{\sigma}_\mu \overleftrightarrow{\partial}^\mu \varphi + \frac{m}{2} (\varphi^T \varepsilon \varphi - \bar{\varphi}^T \varepsilon \bar{\varphi}), \quad (4.47)$$

(der Massenterm heisst Majorana Masse). Unabhängige Variation nach φ , $\bar{\varphi}$ ergibt (4.44) als Euler-Lagrange Gleichung.

Die Interpretation der Felder als Grassmann Variablen ist auch mit den vorigen beiden Abschnitten kompatibel und steht in Verbindung damit, s. später, dass die Dirac Gleichung fermionisch zu quantisieren sein wird. Insbesondere lässt sich das Dirac-Feld Ψ als Kombination zweier unabhängiger Majorana-Felder $\Psi^{(1)}$, $\Psi^{(2)}$ auffassen: $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^{(1)} + i\Psi^{(2)})$.

Schliesslich ist die **Majorana-Darstellung** der Dirac-Algebra (4.25) zu erwähnen:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} i\sigma_3 & 0 \\ 0 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sie ist rein imaginär, sodass die Dirac-Gleichung (4.34) reelle Koeffizienten hat. Im Falle der Majorana-Bedingung (4.42), d.h. $\Psi = i\gamma^2\Psi^*$, wird Ψ reell.

5 Kanonische Quantisierung freier Felder

5.1 Der Fock-Raum

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum (physikalisch: 1-Teilchen Hilbertraum). Auf $\otimes^n \mathcal{H}$ operiert die Gruppe S_n der Permutationen σ von $\{1, \dots, n\}$ durch

$$P_\sigma : \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n \longmapsto \psi_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{\sigma^{-1}(n)}$$

(Teilchen permutieren nach σ , Zustände nach σ^{-1} ; es gilt $P_\sigma P_\tau = P_{\sigma\tau}$). Die Teilräume

$$\mathcal{H}_\pm^{(n)} = \{\psi \in \otimes^n \mathcal{H} \mid P_\sigma \psi = \delta(\sigma)\psi\}$$

$$\delta(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{im } \pm \text{ Fall} \\ \text{sgn } \sigma & \end{cases}$$

bestehend aus symmetrischen (+), bzw. antisymmetrischen (−) Zuständen sind die Hilberträume für n **Bosonen**, bzw. n **Fermionen**. Dabei ist $\mathcal{H}^{(0)} = \mathbb{C}$ mit dem einzigen Zustand $|0\rangle$ ($\langle 0|0\rangle = 1$): dem **Vakuum**.

Der **Fockraum**

$$\mathcal{F}_\pm = \otimes_{n=0}^\infty \mathcal{H}_\pm^{(n)} \tag{5.1}$$

enthält Zustände mit beliebiger aber endlicher Teilchenzahl. Der Teilchenzahloperator $N : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ ist

$$N\psi = n\psi \quad \text{für } \psi \in \mathcal{H}_\pm^{(n)}.$$

Sei $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ein Operator. Auf \mathcal{F}_\pm definiere

$$\Gamma(A), d\Gamma(A) : \mathcal{H}_\pm^{(n)} \rightarrow \mathcal{H}_\pm^{(n)}$$

$$\Gamma(A) = \underbrace{A \otimes \dots \otimes A}_{n \text{ mal}}$$

$$d\Gamma(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1} \otimes \underbrace{A}_{i\text{-te Stelle}} \otimes \mathbf{1} \otimes \dots \otimes \mathbf{1}.$$

Beispiele: $N = d\Gamma(1)$; $(d/dt)\Gamma(e^{itA})\Big|_{t=0} = i d\Gamma(A)$, also

$$\Gamma(e^{itA}) = e^{itd\Gamma(A)}. \tag{5.2}$$

Für $f \in \mathcal{H}$ ist der **Vernichtungsoperator** $a(f) : \otimes^n \mathcal{H} \rightarrow \otimes^{n-1} \mathcal{H}$ definiert durch

$$\begin{aligned} a(f)(\varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_n) &= \sqrt{n}(f, \varphi_1)\varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_n \\ a(f)|0\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Er bildet $\mathcal{H}_\pm^{(n)}$ nach $\mathcal{H}_\pm^{(n-1)}$ ab, also

$$a(f) : \mathcal{F}_\pm \longrightarrow \mathcal{F}_\pm. \tag{5.4}$$

Der **Erzeugungsoperator** $a^*(f) := a(f)^*$ ist der Adjungierte von (5.4). Er bildet $\mathcal{H}_\pm^{(n-1)}$ nach $\mathcal{H}_\pm^{(n)}$ ab gemäss

$$a^*(f)\psi = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\pm 1)^{k-1} P_{\pi_k}(f \otimes \psi), \quad (5.5)$$

wobei $\pi_k^{-1} = (k, 1, 2, \dots, k-1)$. **Beweis:** Die rechte Seite, $\tilde{\psi}$, liegt in $\mathcal{H}_\pm^{(n)}$: $P_\sigma \tilde{\psi} = \delta(\sigma) \tilde{\psi}$ denn $(\pi_{\sigma(k)}^{-1} \circ \sigma \circ \pi_k)(1) = 1$, also $(P_{\pi_{\sigma k}} P_\sigma P_{\pi_k})(f \otimes \psi) = \delta(\sigma) (\pm 1)^{(\sigma(k)-1)-(k-1)} f \otimes \psi$.

Die Behauptung (5.5) lautet $(a(f)\varphi, \psi) = (\varphi, \tilde{\psi})$, ($\varphi \in \mathcal{F}_\pm$): Für $\varphi \in \mathcal{H}^{(n)}$ (ansonsten verschwinden beide Seiten) ist

$$(a(f)\varphi, \psi) = \sqrt{n}(\varphi, f \otimes \psi) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \left(\underbrace{P_{\pi_k} \varphi}_{=(\pm 1)^{k-1} \varphi}, P_{\pi_k}(f \otimes \psi) \right) = (\varphi, \tilde{\psi}).$$

Bemerkungen:

1) $a(f)$ ist antilinear, $a^*(f)$ linear in f .

2) $Na(f) = a(f)(N-1)$, d.h.

$$[N, a(f)] = -a(f), \quad [N, a^*(f)] = a^*(f). \quad (5.6)$$

3) Sei $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unitär. Dann ist

$$a(Uf) = \Gamma(U)a(f)\Gamma(U)^*, \quad a^*(Uf) = \Gamma(U)a^*(f)\Gamma(U)^*. \quad (5.7)$$

Der (Anti-) Kommutator ist

$$[A, B]_\pm = AB \mp BA = \begin{cases} [A, B] \\ \{A, B\} \end{cases} \quad \text{im } \pm \text{ Fall.}$$

Es gelten die **Vertauschungsrelationen**

$$\begin{aligned} [a(f), a(g)]_\pm &= [a^*(f), a^*(g)]_\pm = 0, \\ [a(f), a^*(g)]_\pm &= (f, g). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Beweis: (nur (5.8)). Für $\varphi = \varphi_1 \otimes \dots \otimes \varphi_{n-1} \in \otimes^{n-1} \mathcal{H}$ gilt

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} a(f) (P_{\pi_{k+1}}(g \otimes \varphi)) \\ \frac{1}{\sqrt{n-1}} P_{\pi_k}(g \otimes a(f)\varphi) \end{aligned} \right\} = (f, \varphi_1) \varphi_2 \otimes \dots \otimes \varphi_k \otimes g \otimes \dots \otimes \varphi_{n-1},$$

also sind die linken Seiten auch für $\varphi \in \mathcal{H}_\pm^{(n-1)}$ gleich. Damit ist

$$\begin{aligned} a(f)a^*(g)\varphi &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\pm 1)^{k-1} a(f) P_{\pi_k}(g \otimes \varphi) \\ &= (f, g)\varphi \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} (\pm 1)^{k-1} a(f) P_{\pi_{k+1}}(g \otimes \varphi) \\ &= (f, g)\varphi \pm a^*(g)a(f)\varphi \end{aligned}$$

□

Normalgeordnete Produkte: A_1, \dots, A_n seien Vernichtungs- oder Erzeugungsoperatoren. Ihr normalgeordnetes Produkt ist definiert durch

$$: A_1 \dots A_n : = \delta(\sigma) A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}, \quad (5.9)$$

wobei σ eine Permutation der Indizes ist, derart, dass auf der rechten Seite alle **Vernichtungsoperatoren rechts von den Erzeugungsoperatoren** liegen. Durch Multilinearität ist $: A_1 \dots A_n :$ auch definiert für A_i 's die Linearkombinationen von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren sind.

Offenbar gilt

$$: A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)} : = \delta(\sigma) : A_1 \dots A_n : . \quad (5.10)$$

Für $n > 0$ gilt nach (5.3)

$$\langle 0 | : A_1 \dots A_n : | 0 \rangle = 0. \quad (5.11)$$

Mit Hilfe von

$$AB = \pm BA + [A, B]_{\pm} \quad (5.12)$$

kann man Vernichtungsoperatoren nach rechts bringen. Dabei gilt wegen (5.8)

$$[a(f), a^*(g)]_{\pm} = \langle 0 | [a(f), a^*(g)]_{\pm} | 0 \rangle = \langle 0 | a(f) a^*(g) | 0 \rangle \quad (5.13)$$

(der Ausdruck rechts heisst **Kontraktion** von $a(f), a^*(g)$). So entsteht die Entwicklung eines Produkts nach normalgeordneten Produkten:

Lemma (Wick)

$$A_1 \dots A_n = \sum_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_p < k_p)} \delta(\sigma_P) \left(\prod_{l=1}^p \langle 0 | A_{i_l} A_{k_l} | 0 \rangle \right) : A_1 \dots \hat{A}_{i_1} \dots \hat{A}_{k_p} \dots A_n : , \quad (5.14)$$

wobei die Summe über alle Paarungen P aus $p = 0, \dots, [n/2]$ Paare von Indizes aus $\{1, \dots, n\}$ läuft und σ_P eine Permutation ist, die die kontrahierten Paare zusammenbringt, d.h. $\sigma_P(k_l) = \sigma_P(i_l) + 1$, die Reihenfolge der restlichen Indizes aber fest lässt. ($\hat{}$ bedeutet Auslassung).

Beweis: Wegen der Multilinearität beider Seiten genügt es anzunehmen, jedes A_i sei entweder ein Vernichtungs- oder Erzeugungsoperator; ferner genügt es, die Summe über Paarungen zu erstrecken, wo jedes A_{i_l} ein Vernichtungs- und jedes A_{k_l} ein Erzeugungsoperator ist, denn die anderen Kontraktionen verschwinden. Verschiebt man die Vernichtungsoperatoren nach rechts, so entstehen nach (5.12, 5.13) lauter Terme, die durch diese Paarungen gekennzeichnet werden können. \square

Für die **Vakuumerwartungswerte** folgt mit (5.11)

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_1 \dots A_{2n+1} | 0 \rangle &= 0, \\ \langle 0 | A_1 \dots A_{2n} | 0 \rangle &= \sum_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_n < k_n)} \delta(\sigma_P) \prod_{l=1}^n \langle 0 | A_{i_l} A_{k_l} | 0 \rangle . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Das Lemma besitzt noch einige Varianten, zu deren Beweis folgende Fassung von (5.14) nützlich ist:

$$A_1 \dots A_n = \sum_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_p < k_p)} \delta(\sigma_P) \left(\prod_{l=1}^p \langle 0 | A_{i_l} A_{k_l} | 0 \rangle \right) : A_{\sigma_P^{-1}(1)} \dots \underbrace{\hat{A}_{i_l}}_{\text{Stelle } \sigma_P(i_l)} \dots \hat{A}_{k_l} \dots A_{\sigma_P^{-1}(n)} : \quad (5.16)$$

Hier ist σ_P eine Permutation wie in (5.14) mit dem Unterschied, dass sich die Reihenfolge der nicht gepaarten Indizes verändern darf. Dies folgt aus (5.10) und aus folgendem: für eine Permutation σ , die bestimmte benachbarte Paare verschiebt aber nicht bricht, ändert sich $\text{sgn } \sigma$ nicht, wenn die Indizes solcher Paare nicht berücksichtigt werden. Es gilt

$$: A_1 \dots A_k :: A_{k+1} \dots A_n := \sum'_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_p < k_p)} \delta(\sigma_P) \left(\prod_{l=1}^p \langle 0 | A_{i_l} A_{k_l} | 0 \rangle \right) : A_1 \dots \hat{A}_{i_1} \dots \hat{A}_{k_p} \dots A_n : , \quad (5.17)$$

wobei in \sum' nur über Paarungen zu summieren ist, wo kein Paar $(i_l < k_l)$ aus dem selben normalgeordneten Produkt stammt. Insbesondere ist

$$\langle 0 | : A_1 \dots A_k :: A_{k+1} \dots A_{2n} : | 0 \rangle = \sum'_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_n < k_n)} \delta(\sigma_P) \prod_{l=1}^n \langle 0 | A_{i_l} A_{k_l} | 0 \rangle. \quad (5.18)$$

Beweis: Schreibe $: A_1 \dots A_k :$ und $: A_{k+1} \dots A_n :$ in normalgeordneter Reihenfolge (5.9):

$$: A_1 \dots A_k :: A_{k+1} \dots A_n := \delta(\sigma) (A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(k)}) (A_{\sigma(k+1)} \dots A_{\sigma(n)}), \quad (5.19)$$

wobei σ die Zusammenlegung der entsprechenden Permutationen von $\{1, \dots, k\}$ und $\{k+1, \dots, n\}$ ist. Wende dann (5.16) auf $B_1 \dots B_n$ mit $B_i = A_{\sigma(i)}$ an; Kontraktionen zwischen B 's aus dem selben Faktor in (5.19) verschwinden wegen (5.11). Unter der Normalordnung in (5.16) stehen

$$B_{\sigma_P^{-1}(i)} = A_{\sigma \circ \sigma_P^{-1}(i)} = A_{(\sigma_P \circ \sigma^{-1})^{-1}(i)}, \quad (5.20)$$

d.h. $\sigma_P \circ \sigma^{-1}$ bringt die A -Paare zusammen. Zusammen mit dem δ aus (5.19) ist $\delta(\sigma)\delta(\sigma_P) = \delta(\sigma_P \circ \sigma^{-1})$. \square

Sei nun unter Operatoren A_1, A_2, \dots eine gewisse Reihenfolge vorgegeben (nicht notwendigerweise die natürliche $1, 2, \dots$; dies wird in der Form der Zeitordnung in der Störungstheorie vorkommen). Sei

$$T(A_1 \dots A_n) := \delta(\sigma) A_{\sigma(1)} \dots A_{\sigma(n)}, \quad (5.21)$$

wobei σ die Permutation ist, welche die Faktoren ihrer Reihenfolge nach ordnet. Dann ist

$$T(A_1 \dots A_n) = \sum_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_p < k_p)} \delta(\sigma_P) \left(\prod_{l=1}^p \langle 0 | T A_{i_l} A_{k_l} | 0 \rangle \right) : A_1 \dots \hat{A}_{i_1} \dots \hat{A}_{k_p} \dots A_n : \quad (5.22)$$

$$\langle 0|T(A_1 \dots A_{2n})|0\rangle = \sum_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_n < k_n)} \delta(\sigma_P) \prod_{l=1}^n \langle 0|T A_{i_l} A_{k_l}|0\rangle. \quad (5.23)$$

Beweis: Wende (5.16) auf $B_1 \dots B_n$ mit $B_i = A_{\sigma(i)}$ an. Für die kontrahierten Paare gilt $B_{i_l} B_{k_l} = T B_{i_l} B_{k_l} = T A_{\sigma(i_l)} A_{\sigma(k_l)}$, da die B 's nach Konstruktion geordnet sind. Der Rest folgt wieder aus (5.20). \square

Schliesslich können Faktoren unter dem T -Produkt selbst normalgeordnete Produkte sein:

$$T(: A_1 \dots A_k :: A_{k+1} \dots A_n :) = \sum_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_p < k_p)} \delta(\sigma_P) \left(\prod_{l=1}^p \langle 0|T A_{i_l} A_{k_l}|0\rangle \right) : A_1 \dots \hat{A}_{i_1} \dots \hat{A}_{k_p} \dots A_n :, \quad (5.24)$$

$$\langle 0|T(: A_1 \dots A_k :: A_{k+1} \dots A_{2n} :)|0\rangle = \sum_{P:(i_1 < k_1) \dots (i_n < k_n)} \delta(\sigma_P) \prod_{l=1}^n \langle 0|T A_{i_l} A_{k_l}|0\rangle, \quad (5.25)$$

wobei \sum' wie in (5.17) ist. Die Verallgemeinerung davon und von (5.17, 5.18) auf mehr als zwei normalgeordnete Faktoren ist offensichtlich.

5.2 Das reelle Skalarfeld

Das klassische, reelle Skalarfeld ist beschrieben durch die kanonischen Koordinaten $\varphi(\vec{x})$, $\pi(\vec{x})$, s. (3.61),

$$\begin{aligned} \{\pi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})\} &= \delta(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})\} &= 0 = \{\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})\}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

mit Hamiltonfunktion

$$\begin{aligned} H[\varphi, \pi] &= \int d^3x \mathcal{H}(\varphi(\vec{x}), \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x})), \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2}(\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2), \end{aligned} \quad (5.27)$$

oder, allgemeiner, Feldimpuls $P^\mu = \int d^3x T^{0\mu}$

$$P^0 = H, \quad \vec{P} = - \int d^3x \pi(\vec{x}) \vec{\nabla}\varphi(\vec{x}). \quad (5.28)$$

Die Feldgleichung (3.21)

$$(\square + m^2) \varphi(t, \vec{x}) = 0 \quad (5.29)$$

hat spezielle Lösungen $\varphi(x) = e^{-ipx}$, ($px = p_\mu x^\mu$), mit $p^2 = m^2$ und allgemeine, reelle Lösung

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d^4p \delta(p^2 - m^2) A(p) e^{-ipx}$$

mit $A(-p) = \overline{A(p)}$. Wegen (1.11) ist auch

$$\varphi(t, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2p^0} (a(\vec{p}) e^{-i(p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})} + \overline{a(\vec{p})} e^{i(p^0 t - \vec{p} \cdot \vec{x})}), \quad (5.30)$$

wobei $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und $a(\vec{p}) = A(p^0, \vec{p})$. Hier ist $d^3p/2p^0$ das Lorentz-invariante Mass (1.10) auf der Massenschale

$$V_m = \{p \in \mathbb{R}^4 | p^2 = m^2, p^0 \geq 0\} . \quad (5.31)$$

Wegen $\dot{\varphi}(t, \vec{x}) = \partial\mathcal{H}/\partial\pi(\vec{x}) = \pi(t, \vec{x})$ ist

$$\pi(t, \vec{x}) = -i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2} (a(\vec{p})e^{-i(p^0t - \vec{p}\cdot\vec{x})} - \overline{a(\vec{p})}e^{i(p^0t - \vec{p}\cdot\vec{x})}) \quad (5.32)$$

Die kanonische Quantisierung (2.30) ersetzt (5.26) durch

$$[\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (5.33)$$

$$[\varphi(\vec{x}), \varphi(\vec{y})] = 0 = [\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] . \quad (5.34)$$

Die Dynamik ist dann durch

$$\dot{\varphi}(t, \vec{x}) = i[H, \varphi(t, \vec{x})] , \quad \dot{\pi}(t, \vec{x}) = i[H, \pi(t, \vec{x})] \quad (5.35)$$

bestimmt. Beachte, dass sowohl (5.33, 5.34) wie auch (5.27) sich auf eine feste Zeit – ein nicht Lorentz-invarianter Begriff – beziehen. Trotzdem wird die resultierende Theorie Lorentz kovariant sein, d.h. das skalare Transformationsverhalten des quantisierten Feldes $\varphi(x)$ ist verträglich mit (5.35). Um (5.33, 5.34) auf einem Hilbertraum darzustellen, verwenden wir, wie auf S. 22, die räumliche Fouriertransformation der Felder:

$$\varphi(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2p^0} (e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} a(\vec{p}) + e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} a^*(\vec{p})) , \quad (5.36)$$

$$\pi(\vec{x}) = -i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2} (e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} a(\vec{p}) - e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} a^*(\vec{p})) .$$

Wir haben hier, vgl. (2.23), **zwei reelle** Felder φ, π durch **eine komplexe** Fouriertransformierte $a(\vec{p})$, dafür ohne Reellitätsbedingung, ausgedrückt. Diese wurde ferner so normiert, dass Übereinstimmung mit (5.30, 5.32) bei $t = 0$ vorliegt.

Die kanonischen Vertauschungsrelationen (5.33, 5.34) lauten nun

$$[a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] = 2p^0\delta(\vec{p} - \vec{p}') , \quad (5.37)$$

$$[a^\sharp(\vec{p}), a^\sharp(\vec{p}')] = 0 , \quad (\sharp = *, \text{ nichts}) .$$

So folgt daraus in der Tat

$$\begin{aligned} [\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] &= i(2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2p^0} \frac{d^3p'}{2} \left(e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{p}'\cdot\vec{x}} [a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] - e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{p}'\cdot\vec{x}} [a^*(\vec{p}), a(\vec{p}')] \right) \\ &= \frac{i}{2}(2\pi)^{-3} \int d^3p (e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})}) = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) , \end{aligned}$$

ebenso (5.34).

Hamiltonoperator und Feldimpuls sind quadratisch in $\varphi(\vec{x}), \pi(\vec{x})$, bzw. $a(\vec{p}), a^*(\vec{p})$. Wir legen die Ordnung fest, wie bereits in Kap. 2, durch Normalordnung (5.9), und zwar bosonische, im Einklang mit (5.37). Man findet

$$H = \int \frac{d^3p}{2p^0} p^0 a^*(\vec{p}) a(\vec{p}) , \quad \vec{P} = \int \frac{d^3p}{2p^0} \vec{p} a^*(\vec{p}) a(\vec{p}) . \quad (5.38)$$

In der Tat: Die Fouriertransformierten von $\pi, \varphi, \vec{\nabla}\varphi$ sind der Reihe nach

$$-\frac{i}{2}(a(\vec{p}) - a^*(-\vec{p})), \frac{1}{2p^0}(a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})), \frac{i\vec{p}}{2p^0}(a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})).$$

Aus Parseval und

$$\begin{aligned} & : (a^*(\vec{p}) \pm a(-\vec{p})) \cdot (a(\vec{p}) \pm a^*(-\vec{p})) := \\ & \quad a^*(\vec{p})a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})a(-\vec{p}) \pm (a(-\vec{p})a(\vec{p}) + a^*(\vec{p})a^*(-\vec{p})) \end{aligned} \quad (5.39)$$

folgt

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int d^3x : \pi^2(x) + (\vec{\nabla}\varphi(x))^2 + m^2\varphi(\vec{x})^2 : \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{4(p^0)^2} \left[((p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2)(a^*(\vec{p})a(\vec{p}) + a^*(-\vec{p})a(-\vec{p})) \right. \\ & \quad \left. + \underbrace{(-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2)}_{=0} (a(-\vec{p})a(\vec{p}) + a^*(\vec{p})a^*(-\vec{p})) \right] \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung. Analog für \vec{P} .

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \dot{a}(\vec{p}) &= i[H, a(\vec{p})] = -ip^0 a(\vec{p}), \\ \dot{a}^*(\vec{p}) &= i[H, a^*(\vec{p})] = ip^0 a^*(\vec{p}), \end{aligned}$$

d.h.

$$a(\vec{p}, t) = e^{-ip^0 t} a(\vec{p}), \quad a^*(\vec{p}, t) = e^{ip^0 t} a^*(\vec{p}). \quad (5.40)$$

Die Lösung $\varphi(\vec{x}, t)$ von

$$\partial_t \varphi(x) = i[H, \varphi(x)] \quad (5.41)$$

ergibt sich durch Einsetzen von (5.40) in (5.36) und ist identisch mit (5.30). Dies war zu erwarten, da der klassische Propagator für φ, π (oder a, \bar{a}) eine lineare kanonische transformation ist (harmonische Oszillatoren), vgl. Bemerkung nach (2.30). Die Beziehung (5.41) gilt entsprechend für raumzeitliche Richtungen:

$$\partial_\mu \varphi(x) = i[P_\mu, \varphi(x)]. \quad (5.42)$$

P_μ erweist sich als Erzeugende der Translationen.

Bemerkung: Hätte man in (5.39) die fermionische Normalordnung verwendet, so hätte dies auf $P^\mu = 0$ geführt. Die Ausdrücke (5.38), die dann in Abweichung zur kanonischen Quantisierung stehen, liefern aber (5.42), selbst wenn in (5.37) Kommutatoren durch Antikommutatoren ersetzt werden. Dies folgt aus der ersten der beiden Identitäten

$$\begin{aligned} [AB, C] &= A\{B, C\} - \{A, C\}B, \\ [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B. \end{aligned} \quad (5.43)$$

Die kanonischen Vertauschungsrelationen (5.37) können auf einem Fockraum \mathcal{F} dargestellt werden, der aufgespannt wird durch die (uneigentlichen) Zustände

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = a^*(\vec{p}_1) \dots a^*(\vec{p}_n)|0\rangle, \quad (5.44)$$

($n = 0, 1, 2, \dots$). Der Zustand mit $n = 0$, $|0\rangle$, erfüllt $P_\mu|0\rangle = 0$ und ist somit invariant unter raumzeitlichen Translationen, $e^{iP_\mu a^\mu}|0\rangle = |0\rangle$ (Vakuum). Die Zustände mit $n = 1$, $|\vec{p}\rangle = a^*(\vec{p})|0\rangle$, erfüllen

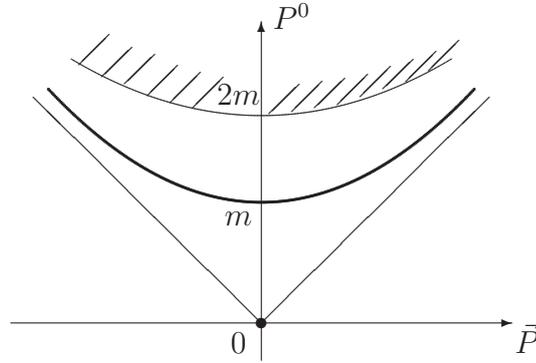
$$P^\mu|\vec{p}\rangle = p^\mu|\vec{p}\rangle$$

mit $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$: Dies ist die Energie-Impuls Beziehung eines relativistischen Teilchens der Masse m ; entsprechend werden (5.44) als **n -Teilchenzustände** gedeutet.

Die P^μ kommutieren, haben gemeinsame Eigenvektoren (5.44) und somit das kombinierte Spektrum

$$\sigma(P^\mu) = \left\{ \sum_{i=1}^n p^{(i)} |p^{(i)}\rangle \in V_m, n = 0, 1, 2, \dots \right\} \quad (5.45)$$

$$= \{0\} \cup \{p \in \mathbb{R}^4 | p^0 \geq 0; p^2 = m^2 \text{ oder } p^2 \geq 4m^2\} \quad (5.46)$$



Das Spektrum (5.45) bildet nämlich eine Lorentz-invariante Menge: Falls $(M, \vec{0}) \in \sigma(P^\mu)$, so auch $V_M \subset \sigma(P^\mu)$. Gleichung (5.46) folgt also daraus, dass für $n \geq 2$

$$\sum_{i=1}^n p^{(i)0} \geq nm \geq 2m,$$

wobei die linke Seite für $n = 2$, $p^{(1)} = (p^0, \vec{p})$, $p^{(2)} = (p^0, -\vec{p})$ jeden Wert $2p^0 = 2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \geq 2m$ auch annimmt. Insbesondere gibt es keine Zustände negativer Energie (**Stabilität**): $H \geq 0$, was bereits aus (5.38) folgt. Beachte den Unterschied zur “erst-quantisierten” Klein-Gordon Gleichung (1.17), wo dieselbe Eigenschaft erst durch explizite Einschränkung der zugelassenen Lösungen erzielt wurde.

Die **2-Punkt-Funktion** $\langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle$ berechnet sich mit (5.30) zu

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2p^0} \frac{d^3p'}{2p'^0} e^{-ipx} e^{ip'y} \underbrace{\langle 0|a(p)a^*(p')|0\rangle}_{2p^0 \delta(\vec{p}-\vec{p}')} \\ &=: i\Delta_+(x-y), \end{aligned} \quad (5.47)$$

wobei $i\Delta_+$ die L^\uparrow -invariante Distribution

$$i\Delta_+(z) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{-ipz} \quad (5.48)$$

ist. Ist z raumartig, d.h. $z^2 < 0$, so ist $-z = \Lambda z$ bei passender Lorentz-Transformation Λ ; also

$$\Delta_+(-z) = \Delta_+(z), \quad (z^2 < 0). \quad (5.49)$$

Der Kommutator $[\varphi(x), \varphi(y)]$ ist wegen (5.37) ein Vielfaches der 1, und zwar

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= \langle 0 | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0 \rangle \\ &= i(\Delta_+(x-y) - \Delta_+(y-x)) =: i\Delta(x-y). \end{aligned} \quad (5.50)$$

Insbesondere gilt

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0, \quad ((x-y)^2 < 0) : \quad (5.51)$$

die Observablen $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ vertauschen in raumartig getrennten Ereignissen x , y . Physikalisch vertauschen die entsprechenden Messungen (**Kausalität**).

In der Störungsrechnung werden wir der **zeitgeordneten** Greensche Funktion (**Feynman-Propagator**) begegnen

$$\begin{aligned} i\Delta_F(x-y) &:= \langle 0 | T\varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \varphi(x)\varphi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \varphi(y)\varphi(x) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.52)$$

d.h.

$$\Delta_F(z) = \theta(z^0)\Delta_+(z) + \theta(-z^0)\Delta_+(-z). \quad (5.53)$$

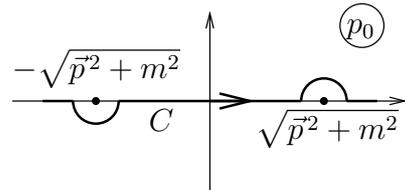
Hier ist $\theta(z^0)$ nicht L^\uparrow -invariant, und zwar wenn z raumartig ist. In diesem Fall ist aber, s. (5.49), $\Delta_F(z) = \Delta_+(z)$, so dass Δ_F doch invariant ist (und zwar bezüglich L). Die Fourierdarstellung ist

$$\Delta_F(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ipz}. \quad (5.54)$$

Beweis: Die Pole des Integranden liegen bei $(p^0)^2 = \vec{p}^2 + m^2 - i0$, d.h. bei $p^0 = \pm(\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - i0)$. Das Integral ist

$$I = \frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3p e^{i\vec{p}\cdot\vec{z}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_C dp^0 \frac{1}{(p^0)^2 - (\vec{p}^2 + m^2)} e^{-ip^0 z^0},$$

wobei C der Pfad in der Figur ist. Bei $z^0 > 0$ fällt der Integrand für $\text{Im } p^0 \rightarrow -\infty$ exponentionell ab, sodass C ohne Fehler zu einer (negativ orientierten) Contour im Unendlichen der unteren Halbebene geschlossen werden kann. Der Residuenbetrag von $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ ist



$$I = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{-i(p^0 z^0 - \vec{p}\cdot\vec{z})} = \Delta_+(z).$$

Bei $z^0 < 0$ ist analog $I = \Delta_+(-z)$. □

Zum Schluss geben wir noch eine Konstruktion des Fockraumes \mathcal{F} , s. (5.44), im Sinne von (5.1). Sei \mathcal{H} der Hilbertraum der Lösungen, $f(x)$, **positiver Energie** der Klein-Gordon Gleichung $(\square + m^2)f = 0$, d.h.

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int_{V_m} d\mu(p) f(p) e^{-ipx},$$

wobei $f(p)$ für $p \in V_m$, s. (5.31), definiert ist. Das positiv definite Skalarprodukt (1.22, 1.24) ist

$$(f, g) = \int_{V_m} d\mu(p) \overline{f(p)} g(p) = i \int_{x^0=t} d^3x \left(\overline{f(x)} \frac{\partial g}{\partial x^0} - \frac{\partial \overline{f}}{\partial x^0} g(x) \right) \quad (5.55)$$

(unabhängig von t). Auf dem Fockraum \mathcal{F}_+ , s. (5.1), sind dann $a(f), a^*(f)$ definiert, s. (5.3, 5.5). Operatoren $a(p), a^*(p)$ ($p \in V_m$) werden eingeführt als Distributionen durch (vgl. dazu, dass $a(f)$ antilinear, bzw. $a^*(f)$ linear in f ist, Bemerkung 1 auf S. 54)

$$a(f) = \int d\mu(p) \overline{f(p)} a(p), \quad a^*(f) = \int d\mu(p) f(p) a^*(p). \quad (5.56)$$

Die Vertauschungsrelationen (5.8) implizieren dann (5.37), wobei $p = (\sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \vec{p})$ durch $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ ersetzt wurde: Denn einerseits ist

$$[a(f), a^*(g)] = \int d\mu(p) d\mu(p') \overline{f(p)} g(p') \cdot [a(p), a^*(p')],$$

andererseits gleich

$$(f, g) = \int d\mu(p) d\mu(p') \overline{f(p)} g(p') \cdot 2p^0 \delta(\vec{p} - \vec{p}').$$

Der Feldoperator (5.30),

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-3/2} \int d\mu(p) \left(e^{-ipx} a(p) + e^{ipx} a^*(p) \right), \quad (5.57)$$

ist eine operatorwertige Lösung der Klein-Gordon Gleichung $(\square + m^2)\varphi = 0$. Die Lorentz-Kovarianz der Theorie ist nun manifest: Auf dem 1-Teilchenraum \mathcal{H} wirkt eine Poincaré-Transformation (Λ, a) , d.h. $x' = \Lambda x + a$, durch

$$(U(\Lambda, a)f)(x') = f(\Lambda^{-1}(x' - a))$$

bzw.

$$(U(\Lambda, a)f)(p') = e^{ip'a} f(\Lambda^{-1}p')$$

was $U(\Lambda, a) : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ als unitär ausweist, s. (5.55). Auf \mathcal{F}_+ sind die Transformationen durch $\Gamma(U(\Lambda, a))$ dargestellt. Aus (5.7), d.h. $\Gamma(U)a^*(f)\Gamma(U)^* = a^*(Uf)$, folgt die besagte **Kovarianz**

$$\Gamma(U(\Lambda, a))\varphi(x)\Gamma(U(\Lambda, a))^* = \varphi(\Lambda x + a) \quad (5.58)$$

(verwende, formal, (5.56) mit $f_x(p) = (2\pi)^{-3/2} e^{ipx}$).

Bemerkung: Bei obiger Fockraum-Quantisierung des Feldes $\varphi(x)$ werden die kanonischen Vertauschungsrelationen (5.33) nicht vorausgesetzt. Sie sind vielmehr Konsequenz der Wahl der Zustände mit positiver Energie und bosonischer Statistik \mathcal{F}_+ . Hätte man die **fermionische** \mathcal{F}_- gewählt, so wäre (5.47) immer noch richtig, aber $[\varphi(x), \varphi(y)]$ kein Vielfaches der 1 mehr (dafür aber $\{\varphi(x), \varphi(y)\}$):

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \varphi(y)] &= \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x) \\ &=: \varphi(x)\varphi(y) : + \langle 0|\varphi(x)\varphi(y)|0\rangle - : \varphi(y)\varphi(x) : - \langle 0|\varphi(y)\varphi(x)|0\rangle \\ &= 2 : \varphi(x)\varphi(y) : + i\Delta(x - y). \end{aligned}$$

Nur der zweite Term verschwindet für $(x - y)^2 < 0$. So ist zum Beispiel nach (5.18)

$$\begin{aligned}\langle \vec{p} | : \varphi(x)\varphi(y) : | \vec{p} \rangle &= \langle 0 | a(\vec{p}) : \varphi(x)\varphi(y) : a^*(\vec{p}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | a(\vec{p})\varphi(x) | 0 \rangle \langle 0 | \varphi(y)a^*(\vec{p}) | 0 \rangle - (x \leftrightarrow y) \\ &= (2\pi)^{-3} (e^{ipx}e^{-ipy} - (x \leftrightarrow y)) = 2i(2\pi)^{-3} \sin(p(x - y))\end{aligned}$$

wegen $\langle 0 | a(\vec{p})\varphi(x) | 0 \rangle = (2\pi)^{-3/2}e^{ipx}$. Auch der Antikommutator

$$\{\varphi(x), \varphi(y)\} = i(\Delta_+(x - y) + \Delta_+(y - x)) \quad (5.59)$$

verschwindet nicht für $(x - y)^2 < 0$. Dies zeigt, dass die **Kausalität** des freien Skalarfeldes nur **bosonisch** zu gewährleisten ist.

5.3 Das komplexe Skalarfeld

Wir betrachten zwei reelle Skalarfelder $\varphi_i(x) = \varphi_i^*(x)$, ($i = 1, 2$), wie in (5.30), die miteinander vertauschen (realisiert auf $\mathcal{F}_+ \otimes \mathcal{F}_+$ als $\varphi_1(x) = \varphi_1(x) \otimes \mathbf{1}$, $\varphi_2(x) = \mathbf{1} \otimes \varphi_2(x)$). Sie können, wie bereits im klassischen Fall, s. S. 36, zu einem komplexen Fall zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)) \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2p^0} (e^{-ipx}a(\vec{p}) + e^{ipx}b^*(\vec{p}))\end{aligned} \quad (5.60)$$

mit

$$a(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p})), \quad b(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1(\vec{p}) - ia_2(\vec{p})), \quad (5.61)$$

deren Vertauschungsrelationen lauten

$$[a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] = 2p^0\delta(\vec{p} - \vec{p}') = [b(\vec{p}), b^*(\vec{p}')] \quad (5.62)$$

(restliche, insbesondere zwischen a 's und b 's, = 0). Denn z.B. ist

$$\begin{aligned}[a(\vec{p}), a^*(\vec{p}')] &= \frac{1}{2}[a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p}), a_1^*(\vec{p}') - ia_2^*(\vec{p}')] = \frac{1}{2}(1 + 1) \cdot 2p^0\delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [a(\vec{p}), b^*(\vec{p}')] &= \frac{1}{2}[a_1(\vec{p}) + ia_2(\vec{p}), a_1^*(\vec{p}') + ia_2^*(\vec{p}')] = \frac{1}{2}(1 - 1) \cdot 2p^0\delta(\vec{p} - \vec{p}').\end{aligned}$$

Die Erzeugenden der Translationen sind

$$\begin{aligned}P^\mu &= \int \frac{d^3p}{2p^0} p^\mu (a_1^*(\vec{p})a_1(\vec{p}) + a_2^*(\vec{p})a_2(\vec{p})) \\ &= \int \frac{d^3p}{2p^0} p^\mu (a^*(\vec{p})a(\vec{p}) + b^*(\vec{p})b(\vec{p})).\end{aligned}$$

Die globale Eichsymmetrie $\varphi(x) \rightarrow e^{-i\lambda}\varphi(x)$ führt klassisch auf die erhaltene Ladung

$$Q = i \int_{x^0=t} d^3x (\bar{\varphi}(x)(\partial_0\varphi)(x) - (\partial_0\bar{\varphi})(x)\varphi(x)),$$

die, als normalgeordneter Ladungsoperator aufgefasst, lautet

$$Q = \int \frac{d^3p}{2p^0} (a^*(\vec{p})a(\vec{p}) - b^*(\vec{p})b(\vec{p})).$$

In der Hamiltonschen (s. Spezialfälle des Satzes von Noether) und in der Quantenmechanik ist Q die Erzeugende der Symmetrie:

$$e^{i\lambda Q}\varphi(x)e^{-i\lambda Q} = e^{-i\lambda}\varphi(x). \quad (5.63)$$

Beachte dazu, dass

$$[Q, a^*(\vec{p})] = a^*(\vec{p}), \quad [Q, b^*(\vec{p})] = -b^*(\vec{p}), \quad (5.64)$$

woraus $[Q, \varphi(x)] = -\varphi(x)$ und (5.63) folgen. Aus (5.64) resultiert die Bedeutung von $a^*(\vec{p})$, $b^*(\vec{p})$ als Erzeugungsoperator eines Teilchens der Ladung $+1$, bzw. des **Antiteilchens** der Ladung -1 . Beide Teilchensorten tragen positiv zur Energie $H = P^0$ bei.

Die Greenschen Funktionen sind

$$\begin{aligned} \langle 0|\varphi(x)\varphi^*(y)|0\rangle &= \langle 0|\varphi^*(x)\varphi(y)|0\rangle = i\Delta_+(x-y), \\ [\varphi(x), \varphi^*(y)] &= [\varphi^*(x), \varphi(y)] = i\Delta(x-y), \\ \langle 0|T\varphi(x)\varphi^*(y)|0\rangle &= \langle 0|T\varphi^*(x)\varphi(y)|0\rangle = i\Delta_F(x-y) \end{aligned} \quad (5.65)$$

(und = 0 für “ $\varphi\varphi$ ” oder “ $\varphi^*\varphi^*$ ”).

5.4 Das Dirac-Feld

Das klassische Dirac-Feld Ψ mit Lagrange-Dichte (4.29)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m)\Psi - \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m)\Psi) \quad (5.66)$$

erfüllt die Euler-Lagrange Gleichung

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0. \quad (5.67)$$

Die Impulse sind

$$\bar{\pi}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\Psi})} = -\frac{i}{2}\gamma^\mu \Psi, \quad \pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Psi)} = \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu,$$

der Energie-Impuls-Tensor (3.35)

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \pi^\mu (\partial^\nu \Psi) + (\partial^\nu \bar{\Psi}) \bar{\pi}^\mu - \mathcal{L}g^{\mu\nu} \\ &= \frac{i}{2}\bar{\Psi}\gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi - \mathcal{L}g^{\mu\nu}, \end{aligned}$$

der Feldimpuls also

$$P^\nu = \int_{x^0=0} d^3x T^{0\nu} = \frac{i}{2} \int_{x^0=0} d^3x \bar{\Psi}\gamma^0 \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi - \left(\int d^3x \mathcal{L} \right) g^{0\nu}, \quad (5.68)$$

und P^0 kann auch geschrieben werden als

$$P^0 = \int_{x^0=0} d^3x \left(-\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^i \overleftrightarrow{\partial}_i \Psi + m \bar{\Psi} \Psi \right) \quad (5.69)$$

mit Summe über $i = 1, 2, 3$. Alle P^μ hängen damit nicht von $\partial_0 \Psi$, $\partial_0 \bar{\Psi}$ ab, d.h. sie sind bestimmt durch die Felder $\Psi(x^0 = 0, \vec{x})$, $\bar{\Psi}(x^0 = 0, \vec{x})$. Die Impulse π^0 , $\bar{\pi}^0$ bestimmen $\partial_0 \Psi$, $\partial_0 \bar{\Psi}$ nicht: der Übergang zur Hamiltonschen Beschreibung ist (zumindest in der üblichen Form (3.8)) nicht möglich.

Spezielle Lösungen der Dirac-Gleichung (5.67) sind

$$\Psi(x) = u e^{-ipx}, \quad (u \in \mathbb{C}^4), \quad (5.70)$$

falls

$$(\not{p} - m)u = 0, \quad (5.71)$$

wobei $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$ (Summenkonvention). Wegen (4.25) und

$$\not{p}^2 = p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = \frac{1}{2} p_\mu p_\nu \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = p^2 1$$

erfordert (5.71), dass $p^2 = m^2$: $p \in V_m$ oder $-p \in V_m$. Im zweiten Fall schreiben wir statt (5.70)

$$\Psi(x) = v e^{ipx}$$

mit $p \in V_m$ und

$$(\not{p} + m)v = 0. \quad (5.72)$$

Die Eigenräume $\not{p} = \pm m$ sind je 2-dimensional, da $\text{tr } \not{p} = p_\mu \text{tr } \gamma^\mu = 0$. Wir wollen die „Polarisationsvektoren“ $u^{(\alpha)}(p)$, $v^{(\alpha)}(p)$, ($\alpha = 1, 2$; $p \in V_m$) geeignet normieren: Für $p = (m, \vec{0})$ lauten (5.71, 5.72)

$$(\gamma^0 - 1)u = 0, \quad (\gamma^0 + 1)v = 0. \quad (5.73)$$

Da $\gamma^0 = \gamma^{0*}$ können die Eigenvektoren orthogonal (bezüglich des Standard-Skalarprodukt auf \mathbb{C}^4) gewählt werden:

$$u^{*(\alpha)}(m, \vec{0}) u^{(\beta)}(m, \vec{0}) = 2m \delta^{\alpha\beta} = v^{*(\alpha)}(m, \vec{0}) v^{(\beta)}(m, \vec{0}),$$

$$u^{*(\alpha)}(m, \vec{0}) v^{(\beta)}(m, \vec{0}) = 0 = v^{*(\alpha)}(m, \vec{0}) u^{(\beta)}(m, \vec{0}),$$

(der Faktor $2m$ ist Konvention). Sie bilden dann auch eine Basis der beiden Eigenräume:

$$\sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \otimes u^{*(\alpha)}(m, \vec{0}) = 2m \cdot \frac{1 + \gamma^0}{2},$$

$$\sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(m, \vec{0}) \otimes v^{*(\alpha)}(m, \vec{0}) = 2m \cdot \frac{1 - \gamma^0}{2}$$

Diese Beziehungen entsprechen wegen (5.73) auch dem Fall $p = (m, \vec{0})$ von

$$\begin{aligned} \bar{u}^{(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p) &= 2m \delta^{\alpha\beta}, & \bar{v}^{(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) &= -2m \delta^{\alpha\beta}, \\ \bar{u}^{(\alpha)}(p) v^{(\beta)}(p) &= 0 = \bar{v}^{(\alpha)}(p) u^{(\beta)}(p), \end{aligned} \quad (5.74)$$

wobei $\bar{u}^{(\alpha)}(p) = u^{*(\alpha)}(p)\gamma^0$, bzw.

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(p) \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(p) &= \not{p} + m, \\ \sum_{\alpha} v^{(\alpha)}(p) \otimes \bar{v}^{(\alpha)}(p) &= \not{p} - m.\end{aligned}\tag{5.75}$$

All diese Beziehungen sind nun Lorentz-invariant im folgenden Sinne: Sei $\Lambda(A)p = p'$. Dann folgt aus (s. (4.32))

$$S(A)(\not{p} - m) = (\not{p}' - m)S(A),$$

dass $u^{(\alpha)}(p') := S(A)u^{(\alpha)}(p)$

$$(\not{p}' - m)u^{(\alpha)}(p') = 0$$

erfüllt (desgleichen für $v^{(\alpha)}$) mit z.B.

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p')u^{(\beta)}(p') = \bar{u}^{(\alpha)}(p) \underbrace{\gamma^0 S(A)^* \gamma^0}_{S(A^{-1}), \text{ s. (4.28)}} S(A)u^{(\beta)}(p) = 2m\delta^{\alpha\beta}$$

oder

$$\sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(p') \otimes \bar{u}^{(\alpha)}(p') = S(A)(\not{p} + m)S(A)^{-1} = \not{p}' + m.$$

Somit vererben sich (5.74, 5.75) von $p = (m, \vec{0})$ auf alle $p \in V_m$. Ebenfalls gilt dann

$$u^{*(\alpha)}(p)u^{(\beta)}(p) = 2p^0\delta^{\alpha\beta} = v^{*(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(p),\tag{5.76}$$

$$u^{*(\alpha)}(p)v^{(\beta)}(\tilde{p}) = 0 = v^{*(\alpha)}(\tilde{p})u^{(\beta)}(p) = 0,\tag{5.77}$$

wobei $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$; denn mit $u^{(\beta)}(p) = (\not{p}/m)u^{(\beta)}(p)$, $\bar{u}^{(\alpha)}(p) = \bar{u}^{(\alpha)}(p)(\not{p}/m)$ ist der linke Ausdruck (5.76) gleich, s. (4.25),

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)\gamma^0 u^{(\beta)}(p) = \bar{u}^{(\alpha)}(p) \frac{\{\gamma^0, \not{p}\}}{2m} u^{(\beta)}(p) = 2p^0\delta^{\alpha\beta}.$$

Analog folgt (5.77) aus $\not{p}\gamma^0 = \gamma^0\not{\tilde{p}}$.

Die allgemeine klassische Lösung von (5.67) lautet somit

$$\Psi(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{d^3p}{2p^0} (b_{\alpha}(p)u^{(\alpha)}(p)e^{-ipx} + \bar{d}_{\alpha}(p)v^{(\alpha)}(p)e^{ipx})\tag{5.78}$$

mit $p = (p^0, \vec{p})$, $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$ und beliebigen Amplituden $b_{\alpha}(p), d_{\alpha}(p) \in \mathbb{C}$.

Quantenmechanisch soll das Feld $\Psi(x)$ operatorwertig sein. Da $\pi(x) \equiv \pi^0(x)$ keine Phasenkoordinaten sind, s. S. 65, ist die kanonische Quantisierung nicht wie in (5.33, 5.34) möglich. Wir möchten aber trotzdem die Dirac-Gleichung $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\Psi(x) = 0$ als Heisenbergsche Bewegungsgleichung

$$\partial_t\Psi(t, \vec{x}) = i[H, \Psi(t, \vec{x})]\tag{5.79}$$

erhalten, wobei der Hamiltonoperator H und die Vertauschungsrelationen noch zu bestimmen sind.

Das Feld zur Zeit $t = 0$

$$\Psi(t = 0, \vec{x}) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{d^3p}{2p^0} (b_\alpha(p)u^{(\alpha)}(p)e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d_\alpha^*(p)v^{(\alpha)}(p)e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \quad (5.80)$$

und die $b_\alpha(p)$, $d_\alpha(p)$, ($p \in V_m$), bestimmen sich gegenseitig. Wir fassen letztere als Operatoren auf und drücken P^ν , s. (5.68, 5.69) durch sie aus, vorderhand ohne Festlegung der verwendeten Normalordnung:

$$P^\nu = \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{d^3p}{2p^0} p^\nu : b_\alpha^*(p)b_\alpha(p) - d_\alpha(p)d_\alpha^*(p) : . \quad (5.81)$$

Rechnung: In (5.68) fallen, wie in (5.69) bemerkt, $\partial_0\Psi$, $\partial_0\bar{\Psi}$ heraus. Wir können also P^ν berechnen, indem wir $\Psi(t, \vec{x})$ durch (5.78) definieren (mit $\bar{d}_\alpha \rightarrow d_\alpha^*$): Obschon es (5.67) erfüllt, meinen wir damit (noch) nicht die quantenmechanische Entwicklung (5.79). Damit wird, s. (5.66), $\mathcal{L} = 0$, also

$$P^\nu = \frac{i}{2} \int d^3x : \Psi^*(x) \overleftrightarrow{\partial}^\nu \Psi(x) : . \quad (5.82)$$

Die räumlichen Fouriertransformierten von Ψ , $\partial^\nu\Psi|_{t=0}$ sind

$$\begin{aligned} & \sum_\alpha \frac{1}{2p^0} (b_\alpha(p)u^{(\alpha)}(p) + d_\alpha^*(\tilde{p})v^{(\alpha)}(\tilde{p})) , \\ & \sum_\beta \frac{-i}{2p^0} (p^\nu b_\beta(p)u^{(\beta)}(p) - \tilde{p}^\nu d_\beta^*(\tilde{p})v^{(\beta)}(\tilde{p})) , \end{aligned} \quad (5.83)$$

wobei $\tilde{p} = (p^0, -\vec{p})$. Wende die Parseval-Identität auf (5.82) an. Wegen des Minuszeichens in $\overleftrightarrow{\partial}^\nu$ werden die reinen Terme ($b_\alpha^*(p)b_\beta(p)$, $-d_\alpha^*(\tilde{p})d_\beta(\tilde{p})$) mit $1 + 1 = 2$ multipliziert, die Summe \sum_β liefert einen Faktor $\delta_{\alpha\beta} \cdot 2p^0$, s. (5.76). (Deshalb die Wahl der Normierung $2m$ in (5.74).) Die gemischten Terme werden mit (5.77) multipliziert. \square

Wir wählen $H = P^0$. Als Vertauschungsrelationen bieten sich die kanonischen Antivertauschungsrelationen an

$$\{b_\alpha(p), b_\alpha^*(p')\} = 2p^0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\alpha\beta} = \{d_\alpha(p), d_\alpha^*(p')\} \quad (5.84)$$

(restliche Antikommutatoren = 0) oder die analogen Kommutationsrelationen. Beachte, dass nur im **fermionischen** Fall die Energie

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1,2} \int d^3p : b_\alpha^*(p)b_\alpha(p) - d_\alpha(p)d_\alpha^*(p) : \quad (5.85)$$

nach unten beschränkt ist, und damit einen stabilen Grundzustand (Vakuum) besitzt. Da wir noch auf der Suche des geeigneten H sind, korrigieren wir dies im **bosonischen**

Fall durch die Ersetzung $- : d_\alpha(p)d_\alpha^*(p) := -d_\alpha^*(p)d_\alpha(p) \rightarrow +d_\alpha^*(p)d_\alpha(p)$. So erhalten wir in beiden Fällen

$$P^\mu = \sum_\alpha \int \frac{d^3p}{2p^0} p^\mu (b_\alpha^*(p)b_\alpha(p) + d_\alpha^*(p)d_\alpha(p)).$$

In beiden Fällen gilt auch

$$[b_\alpha^*(p)b_\alpha(p), b_\beta(p')] = -2p^0\delta(\vec{p} - \vec{p}')\delta_{\alpha\beta}b_\beta(p)$$

aufgrund der Identitäten (5.43). Es folgt

$$[P^\mu, b_\alpha(p)] = -p^\mu b_\alpha(p), \quad [P^\mu, d_\alpha^*(p)] = p^\mu d_\alpha^*(p). \quad (5.86)$$

Insbesondere ist mit (5.80)

$$i [P^i, \Psi(t=0, \vec{x})] = \partial_i \Psi(t=0, \vec{x})$$

($i = 1, 2, 3$) und die Bewegungsgleichung (5.79) lautet

$$\partial_t b_\alpha(p) = -ip^0 b_\alpha(p), \quad \partial_t d_\alpha^*(p) = ip^0 d_\alpha^*(p),$$

d.h.

$$b_\alpha(p, t) = e^{-ip^0 t} b_\alpha(p), \quad d_\alpha^*(p, t) = e^{ip^0 t} d_\alpha^*(p),$$

was (5.78) (mit $\bar{d}_\alpha(p) \rightarrow d_\alpha^*(p)$) auch zur quantenmechanischen Zeitentwicklung macht. Somit gilt

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi(x) = 0$$

für das quantenmechanische Feld $\Psi(x)$. Entsprechend ist

$$\bar{\Psi}(x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$$

für das Dirac-konjugierte Feld

$$\bar{\Psi}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{\alpha=1,2} \int \frac{d^3p}{2p^0} (b_\alpha^*(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p)e^{ipx} + d_\alpha(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p)e^{-ipx}).$$

Eine 2-Punkt-Funktion ist

$$\begin{aligned} \langle 0 | \Psi_i(x) \bar{\Psi}_j(y) | 0 \rangle &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2p^0} \frac{d^3p'}{2p'^0} e^{-ipx} e^{ip'y} \underbrace{\sum_{\alpha,\beta} u_i^{(\alpha)}(p) \bar{u}_j^{(\beta)}(p')}_{(5.75) : (\not{p} + m)_{ij}} \underbrace{\langle 0 | b_\alpha(p) b_\beta^*(p') | 0 \rangle}_{2p^0 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{\alpha\beta}} \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2p^0} e^{-ip(x-y)} (\not{p} + m)_{ij} = (i\not{\partial}_x + m)_{ij} i\Delta_+(x-y) \end{aligned} \quad (5.87)$$

mit $i\Delta_+$ wie in (5.48). Die restlichen 2-Punkt-Funktionen sind

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\Psi}_i(x) \Psi_j(y) | 0 \rangle &= (i\not{\partial}_x - m)_{ji} i\Delta_+(x-y), \\ \langle 0 | \Psi_i(x) \Psi_j(y) | 0 \rangle &= 0 = \langle 0 | \bar{\Psi}_i(x) \bar{\Psi}_j(y) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.88)$$

Im **fermionischen** Fall folgt

$$\begin{aligned}
\{\Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y)\} &= \langle 0 | \{\Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y)\} | 0 \rangle \\
&= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i\Delta_+(x-y) + (i\cancel{\partial}_y - m)_{ij} i\Delta_+(y-x) \\
&= (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i\Delta_+(x-y)
\end{aligned} \tag{5.89}$$

wegen $\partial_y f(y-x) = -\partial_x f(y-x)$ und (5.50). Insbesondere folgt

$$\{\Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y)\} = 0 \quad \text{für } (x-y)^2 < 0.$$

Diese Form der **Kausalität** ist ebenfalls physikalisch sinnvoll, sind doch $\Psi(x)$ und $\bar{\Psi}(y)$ selbst keine Observablen (s. die Eichtransformationen (5.94) unten), sondern nur gerade (eichinvariante) Produkte von ihnen, wie z.B. (5.93): Solche kommutieren bei raumartiger Separation $x-y$ wegen (5.43).

Bemerkung: Hätte man Ψ **bosonisch** quantisiert, so wäre $\{\Psi_i(x), \Psi_j(y)\}$ kein Vielfaches der 1, und es würde für $(x-y)^2 < 0$ auch nicht verschwinden. Ebenso würde

$$[\Psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y)] = (i\cancel{\partial}_x + m)_{ij} i(\Delta_+(x-y) + \Delta_+(y-x)) \tag{5.90}$$

dort nicht verschwinden.

Also: die **Kausalität** kann beim Dirac-Feld nur **fermionisch** gewährleistet werden.

Die Verallgemeinerung davon und der Bemerkung auf S. 62 ist das **Spin-Statistik-Theorem**: Die Forderungen nach **Kausalität** und **Stabilität** bedingen bosonische (bzw. fermionische) Statistik für Felder mit ganzzahligem (bzw. halbzahligem) Spin (Pauli 1940 für freie Felder, Jost 1957 für allgemeine Felder).

Das zeitgeordnete Produkt

$$T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_j(y) = \theta(x^0 - y^0)\Psi_i(x)\bar{\Psi}_j(y) - \theta(y^0 - x^0)\bar{\Psi}_j(y)\Psi_i(x)$$

liefert den Feynman-Propagator

$$\begin{aligned}
iS_F(x-y)_{ij} &:= \langle 0 | T\Psi_i(x)\bar{\Psi}_j(y) | 0 \rangle, \\
iS_F(z) &= \theta(z^0)(i\cancel{\partial}_z + m)_{ij} i\Delta_+(z) + \theta(-z^0)(i\cancel{\partial}_z + m)_{ij} i\Delta_+(-z) \\
&= (i\cancel{\partial}_z + m)_{ij} i\Delta_F(z)
\end{aligned} \tag{5.91}$$

(die Ableitung von $\theta(\pm z^0)$ liefert keinen Beitrag: $\delta(z^0) \cdot (\Delta_+(z) - \Delta_+(-z)) = 0$ wegen (5.49)). Ebenso ist

$$\begin{aligned}
\langle 0 | T\bar{\Psi}_i(x)\Psi_j(y) | 0 \rangle &= -iS_F(x-y)_{ji}, \\
\langle 0 | T\Psi_i(x)\Psi_j(y) | 0 \rangle &= 0 = \langle 0 | T\bar{\Psi}_i(x)\bar{\Psi}_j(y) | 0 \rangle.
\end{aligned}$$

Die Fourierdarstellung, vgl. (5.54), ist

$$S_F(z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\cancel{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} e^{-ipz}. \tag{5.92}$$

Die Stromdichte

$$j^\mu(x) = : \bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x) : \tag{5.93}$$

liefert die Ladung

$$Q = \int_{x^0=t} d^3x : \Psi^*(x) \Psi(x) :,$$

die auch quantenmechanisch erhalten ist, $[Q, H] = 0$, wie ersichtlich aus

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{\alpha} \int \frac{d^3p}{2p^0} : b_{\alpha}^*(p) b_{\alpha}(p) + d_{\alpha}(p) d_{\alpha}^*(p) : \\ &= \sum_{\alpha} \int \frac{d^3p}{2p^0} (b_{\alpha}^*(p) b_{\alpha}(p) - d_{\alpha}^*(p) d_{\alpha}(p)). \end{aligned}$$

Die Rechnung dazu ist wie jene um (5.83).

Wie in (5.63) folgt

$$e^{i\lambda Q} \Psi(x) e^{-i\lambda Q} = e^{-i\lambda} \Psi(x) \quad (5.94)$$

aus

$$[Q, b_{\alpha}^*(p)] = b_{\alpha}^*(p), \quad [Q, d_{\alpha}^*(p)] = -d_{\alpha}^*(p).$$

Damit erzeugt $b_{\alpha}^*(p)$ ein Teilchen der Ladung +1 (Elektron), $d_{\alpha}^*(p)$ ein Antiteilchen der Ladung -1 (Positron).

5.5 Das elektromagnetische Feld (kovariante Quantisierung)

Ausgangspunkt ist die Lagrange-Dichte (3.68)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial_{\mu} A_{\nu}) (\partial^{\mu} A^{\nu}) = -\frac{1}{2} \left((\partial_{\mu} A^0) (\partial^{\mu} A^0) - \sum_{i=1}^3 (\partial_{\mu} A^i) (\partial^{\mu} A^i) \right)$$

mit Euler-Lagrange Gleichung

$$\square A^{\nu} = 0 : \quad (5.95)$$

Diese ist äquivalent zu den Maxwell-Gleichungen nur auf Feldern, die den Anfangsbedingungen

$$\partial_{\nu} A^{\nu} |_{t=0} = 0, \quad \partial_0 (\partial_{\nu} A^{\nu}) |_{t=0} = 0 \quad (5.96)$$

genügen und damit stets die Lorentz-Eichung $\partial_{\nu} A^{\nu}(x) = 0$ erfüllen. Selbst dann bestimmt das Feld $F^{\mu\nu}$ das Potential A^{μ} nur bis auf residuelle Eichtransformationen

$$A^{\mu} \rightarrow A^{\mu} + \partial^{\mu} \chi \quad (5.97)$$

mit

$$\square \chi = 0. \quad (5.98)$$

Der Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu}_{\nu} = -\partial^{\mu} A_{\beta} \partial_{\nu} A^{\beta} - \mathcal{L} \delta^{\mu}_{\nu}$$

liefert den Feldimpuls

$$P^{\nu} = \int_{x^0=0} d^3x T^{0\nu} = - \int d^3x (\partial^0 A_{\beta} \partial^{\nu} A^{\beta} + \mathcal{L} g^{0\nu})$$

und insbesondere

$$P^0 = -\frac{1}{2} \int d^3x (\partial_0 A_\beta \partial_0 A^\beta + (\vec{\nabla} A_\beta)(\vec{\nabla} A^\beta)).$$

Die kanonischen Impulse

$$\pi_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} = -\partial_\mu A_\nu$$

und insbesondere $\pi_\nu \equiv \pi_{0\nu} = -\partial_0 A_\nu$ liefern dann

$$H = P^0 = -\frac{1}{2} \int d^3x (\pi_\beta \pi^\beta + (\vec{\nabla} A_\beta)(\vec{\nabla} A^\beta)), \quad (5.99)$$

$$P^i = - \int d^3x \pi_\beta \partial^i A^\beta. \quad (5.100)$$

Beachte, dass H indefinit ist.

Spezielle klassische Lösungen zu (5.95) sind

$$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu e^{\mp i k x}$$

mit $k^2 = 0$, $k^0 > 0$, d.h. $k \in V_0$. Die Polarisationsvektoren $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k)$, ($\lambda = 0, \dots, 3$) werden reell gewählt mit Orthogonalitätsbedingung

$$\varepsilon_\mu^{(\lambda)} \varepsilon^{(\lambda')\mu} = g^{\lambda\lambda'}. \quad (5.101)$$

Die Vollständigkeitsrelation $g_{\lambda\lambda'} \varepsilon^{(\lambda')} \otimes \varepsilon^{(\lambda)} = 1$, d.h.

$$g_{\lambda\lambda'} \varepsilon^{(\lambda')\mu} \varepsilon_\nu^{(\lambda)} = \delta^\mu_\nu, \quad (5.102)$$

folgt dann aus der Zerlegung eines beliebigen Vektors $x = x_{\lambda'} \varepsilon^{(\lambda')}$: $\varepsilon^{(\lambda)} \cdot x = x_{\lambda'} g^{\lambda\lambda'}$. Die Polarisierungen können näher festgelegt werden durch Auszeichnung eines (zeitartigen) Vektors n mit $n^2 = 1$ (zum Beispiel ist $n = (1, 0, 0, 0)$ die Zeitrichtung im betreffenden Bezugssystem): Dann erfüllen

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(k) &= n, \\ \varepsilon^{(i)}(k)^2 &= -1 \text{ mit } n \cdot \varepsilon^{(i)}(k) = 0, k \cdot \varepsilon^{(i)}(k) = 0, (i = 1, 2), \\ \varepsilon^{(3)}(k) &= \frac{k - (k \cdot n)n}{k \cdot n} \end{aligned} \quad (5.103)$$

die Normierung (5.101) (verwende $(k - (k \cdot n)n)^2 = -(k \cdot n)^2$, da $k^2 = 0$). Ferner gilt

$$\varepsilon^{(0)}(k) + \varepsilon^{(3)}(k) = \frac{k}{k \cdot n}. \quad (5.104)$$

Im Beispiel ist

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}(k) &= (1, \vec{0}) \\ \varepsilon^{(i)}(k) &= (0, \vec{\varepsilon}^{(i)}(k)) \text{ mit } (\vec{\varepsilon}^{(i)})^2(k) = 1 \text{ und} \\ \vec{\varepsilon}^{(i)} \cdot \vec{k} &= 0 (i = 1, 2), \quad \vec{\varepsilon}^{(3)}(k) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}. \end{aligned}$$

Wir nennen $\varepsilon^{(0)}$ skalare; $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$ transversale; $\varepsilon^{(3)}$ longitudinale Polarisation. Nicht physikalisch sind $\varepsilon^{(0)}$, $\varepsilon^{(3)}$: Sie stellen den Preis der Kovarianz dar. Die allgemeine reelle Lösung von (5.95) lautet somit

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= (2\pi)^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{2k^0} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) (a_\lambda(k)e^{-ikx} + \bar{a}_\lambda(k)e^{ikx}) \\ &\equiv A_\mu^+(x) + \bar{A}_\mu^+(x) \end{aligned} \quad (5.105)$$

mit $k = (|\vec{k}|, \vec{k}) \in V_0$ und beliebigen Amplituden $a_\lambda(k) \in \mathbb{C}$. Wegen $\dot{A}_\mu(x) = -\pi_\mu(x)$ ist

$$\pi_\mu(x) = i(2\pi)^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{2} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) (a_\lambda(k)e^{-ikx} - \bar{a}_\lambda(k)e^{ikx}). \quad (5.106)$$

Wir quantisieren das Feld kanonisch (Gupta 1950, Bleuler 1950), vorderhand ohne Berücksichtigung der Eichbedingung. Die Vertauschungsrelationen zu fester Zeit sind, vgl. (5.33, 5.34)

$$[A^\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})] = i\delta^\mu{}_\nu \delta(\vec{x} - \vec{y}),$$

d.h.

$$[A_\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})] = ig_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (5.107)$$

sowie

$$[A^\mu(\vec{x}), A^\nu(\vec{y})] = 0 = [\pi_\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})]. \quad (5.108)$$

Anhand der räumlichen Fouriertransformierten (5.105, 5.106) der Felder A_μ , π_ν zur Zeit $t = 0$ überträgt man diese auf die Operatoren $a_\lambda(k)$, $a_\lambda(k)^*$:

$$\begin{aligned} [a_\lambda(k), a_{\lambda'}^*(k')] &= -2k^0 g_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \\ [a_\lambda^\#(k), a_{\lambda'}^\#(k')] &= 0, \quad (\# = *, \text{nichts}) \end{aligned} \quad (5.109)$$

(beachte das unübliche Vorzeichen für $\lambda = \lambda' = 0$). So folgt zum Beispiel daraus und aus (5.102)

$$\begin{aligned} [A_\mu(\vec{x}), \pi_\nu(\vec{y})] &= -i(2\pi)^{-3} \sum_{\lambda, \lambda'} \int \frac{d^3k}{2k^0} \frac{d^3k'}{2} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \varepsilon_\nu^{(\lambda')}(k') \cdot \\ &\quad \cdot (e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{y}} [a_\lambda(k), a_{\lambda'}^*(k')] - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\vec{k}'\cdot\vec{y}} [a_{\lambda'}^*(k), a_\lambda(k)]) \\ &= \frac{i}{2} (2\pi)^{-3} g_{\mu\nu} \int d^3k (e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})} + e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}) = ig_{\mu\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}). \end{aligned}$$

Für den Feldimpuls findet man aus (5.99, 5.100) nach bosonischer Normalordnung

$$P^\nu = \int \frac{d^3k}{2k^0} k^\nu \left(\sum_{i=1}^3 a_i^*(k) a_i(k) - a_0^*(k) a_0(k) \right). \quad (5.110)$$

Aus

$$\partial_t A^\mu(x) = i[H, A^\mu(x)]$$

folgt, wie in früheren Fällen, dass (5.105) (mit $\bar{a}_\lambda(k) \rightarrow a_\lambda^*(k)$) auch die Bewegung des quantenmechanischen Feldes ist. Auch für die räumlichen Indizes gilt $\partial^\nu A^\mu = i [P^\nu, A^\mu(x)]$, d.h. P^ν erzeugt die raumzeitlichen Translationen.

Die Operatoren $a_\lambda(k)$, $a_\lambda^*(k)$ seien auf einem Fockraum \mathcal{F} mit Vakuum $|0\rangle$ ($\langle 0|0\rangle = 1$), dargestellt

$$a_\lambda(k)|0\rangle = 0 \quad (\text{alle } \lambda, k \in V_0).$$

Normierbare 1-Teilchenzustände sind

$$|f\rangle = \sum_\lambda \int \frac{d^3k}{2k^0} f_\lambda(k) a_\lambda^*(k) |0\rangle$$

mit

$$\begin{aligned} \langle f|f\rangle &= \sum_{\lambda\lambda'} \int \frac{d^3k}{2k^0} \frac{d^3k'}{2k'^0} \overline{f_\lambda(k)} f_{\lambda'}(k') \underbrace{\langle 0|a_\lambda(k) a_{\lambda'}^*(k')|0\rangle}_{=-2k^0 g_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{k}-\vec{k}')} \\ &= \int \frac{d^3k}{2k^0} \left(\sum_{i=1}^3 |f_i(k)|^2 - |f_0(k)|^2 \right) : \end{aligned}$$

Es gibt Zustände $|f\rangle \neq 0$ mit $\langle f|f\rangle = 0$ oder gar < 0 (**Geister**)! Das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ ist indefinit. Dies widerspricht der Interpretation der Quantenmechanik, wonach

$$p = \frac{|\langle \varphi | \psi \rangle|^2}{\langle \varphi | \varphi \rangle \langle \psi | \psi \rangle}$$

die Wahrscheinlichkeit ist, den Zustand $|\psi\rangle$ in $|\varphi\rangle$ vorzufinden: Diese Interpretation ist nicht mehr möglich, wenn der Nenner ≤ 0 ist.

Der Grund für das indefinite Skalarprodukt ist, dass die Eichbedingung (5.96) noch nicht berücksichtigt wurde. Wir suchen einen Unterraum $\mathcal{F}_{\text{phys}} \subset \mathcal{F}$, auf dem

- die Eichbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ realisiert ist;
- das Skalarprodukt positiv definit ist.

Der naheliegende Versuch, $\mathcal{F}_{\text{phys}} \ni \psi$ durch

$$\partial_\mu A^\mu(x) |\psi\rangle = 0 \quad (\text{alle } x)$$

zu definieren, scheitert, und zwar schon für $x = (0, \vec{x})$: mit $\partial_\mu A^\mu(0, \vec{x}) = -\pi^0 + \sum_{i=1}^3 \partial_i A^i$ würde folgen, s. (5.107, 5.108),

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \psi | [\partial_\mu A^\mu(0, \vec{x}), A_\nu(0, \vec{y})] | \psi \rangle = -\langle \psi | [\pi_0(\vec{x}), A_\nu(\vec{y})] | \psi \rangle \\ &= i g_{0\nu} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \langle \psi | \psi \rangle. \end{aligned}$$

Stattdessen sei $\widetilde{\mathcal{F}} \subset \mathcal{F}$ definiert durch $\psi \in \widetilde{\mathcal{F}}$, falls (s. (5.105))

$$\partial_\mu A^{+\mu}(x) |\psi\rangle = 0 \tag{5.111}$$

Dann gilt die Eichbedingung im Sinne der Erwartungswerte:

$$\langle \psi | \partial_\mu A^\mu(x) | \psi \rangle = \langle \psi | \partial_\mu A^{+\mu}(x) \psi \rangle + \langle \partial_\mu A^{+\mu}(x) \psi | \psi \rangle = 0.$$

Wegen (5.103, 5.104) und $k^2 = 0$ ist

$$\partial_\mu A^{+\mu}(x) = -i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2k^0} k \cdot \varepsilon^{(3)}(k) (a_3(k) - a_0(k)) e^{-ikx}.$$

Die Bedingung (5.111), die wie (5.96) bloss für $x^0 = 0$ zu fordern ist, bedeutet

$$(a_3(k) - a_0(k)) | \psi \rangle = 0 \quad (\text{alle } k \in V_0). \quad (5.112)$$

Wichtig ist: Für alle $\psi \in \widetilde{\mathcal{F}}$ gilt

$$\langle \psi | \psi \rangle \geq 0, \quad (5.113)$$

d.h. das Skalarprodukt ist positiv-semidefinit auf $\widetilde{\mathcal{F}}$.

Beweis: Der Operator auf \mathcal{F}

$$N' = \int \frac{d^3k}{2k^0} (a_3^*(k) a_3(k) - a_0^*(k) a_0(k))$$

hat Spektrum $n = 0, 1, 2, \dots$. Für $N' | \psi_i \rangle = n'_i | \psi_i \rangle$, ($i = 1, 2$), ist

$$\langle \psi_1 | N' | \psi_2 \rangle = \begin{cases} n'_1 \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \\ n'_2 \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \end{cases},$$

also

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0 \quad \text{für } n'_1 \neq n'_2. \quad (5.114)$$

Wegen $(a_3(k) - a_0(k)) N' = (N' + 1)(a_3(k) - a_0(k))$ lässt N' den Unterraum $\widetilde{\mathcal{F}}$ invariant. Es genügt somit, (5.113) für $N' | \psi \rangle = n' | \psi \rangle$ zu zeigen: Mit (5.112) ist

$$n' \langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | N' | \psi \rangle = 0$$

d.h. $\langle \psi | \psi \rangle = 0$ ausser für $n' = 0$; für letztere Zustände,

$$| \psi \rangle = \prod_{r=1}^n a_{i_r}^*(k_r) | 0 \rangle, \quad (i_r = 1, 2)$$

(und Linearkombinationen), ist die Behauptung evident. □

Wir halten noch fest: Wegen

$$a_3^*(k) a_3(k) - a_0^*(k) a_0(k) = (a_3^*(k) - a_0^*(k)) a_0(k) + a_3^*(k) (a_3(k) - a_0(k))$$

gilt für Zustände $|\varphi\rangle \in \widetilde{\mathcal{F}}$ mit $n' > 0$

$$n' |\varphi\rangle = N' |\varphi\rangle = \int \frac{d^3k}{2k^0} (a_3^*(k) - a_0^*(k)) a_0(k) |\varphi\rangle, \quad (5.115)$$

d.h. sie liegen im Bild der Operatoren $a_3^*(k) - a_0^*(k)$.

Die Zustände $|\varphi\rangle \in \widetilde{\mathcal{F}}$ mit $\langle\varphi|\varphi\rangle = 0$ sind Ausdruck der residuellen Eichfreiheit (5.97):
Ist

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + |\varphi\rangle, \quad (5.116)$$

so ist $\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$ und

$$\langle\psi'|A^\mu(x)|\psi'\rangle = \langle\psi|A^\mu(x)|\psi\rangle + \partial^\mu\chi(x). \quad (5.117)$$

mit (5.98).

Beweis: Wir bemerken zunächst, dass

$$\begin{aligned} [A^\mu(x), a_3^*(k) - a_0^*(k)] &= \\ &= (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k'}{2k'^0} [\varepsilon^{\mu(3)}(k')a_3(k') + \varepsilon^{\mu(0)}(k')a_0(k'), a_3^*(k) - a_0^*(k)] e^{-ik'x} \\ &= (2\pi)^{-3/2} (\varepsilon^{\mu(3)}(k) + \varepsilon^{\mu(0)}(k)) e^{ikx} = (2\pi)^{-3/2} \frac{k^\mu}{k \cdot n} e^{ikx}. \end{aligned}$$

Man darf oEdA (5.115) annehmen. Der Unterschied der Erwartungswerte in (5.117) ist

$$\langle\psi|A^\mu(x)|\varphi\rangle + \langle\varphi|A^\mu(x)|\psi\rangle + \langle\varphi|A^\mu(x)|\varphi\rangle.$$

Der letzte Term verschwindet, da

$$\begin{aligned} \langle\varphi|A^\mu(x) (a_3^*(k) - a_0^*(k)) a_0(k)|\varphi\rangle &= \langle\varphi|[A^\mu(x), a_3^*(k) - a_0^*(k)] a_0(k)|\varphi\rangle \\ &= (2\pi)^{-3/2} \frac{k^\mu}{k \cdot n} e^{-ikx} \langle\varphi|a_0(k)|\varphi\rangle = 0 \end{aligned}$$

wegen (5.112, 5.114). Die ersten beiden sind analog gleich

$$\frac{(2\pi)^{-3/2}}{n'} \int \frac{d^3k}{2k^0} \frac{k^\mu}{k \cdot n} e^{-ikx} \langle\psi|a_0(k)|\varphi\rangle + \text{komplex Konjugiertes} = \partial^\mu\chi(x)$$

mit

$$\chi(x) = \frac{i(2\pi)^{-3/2}}{n'} \int \frac{d^3k}{2k^0} \frac{e^{ikx}}{k \cdot n} \langle\psi|a_0(k)|\varphi\rangle + \text{komplex Konjugiertes},$$

was (5.98) erfüllt. □

Zustände $\psi, \psi' \in \widetilde{\mathcal{F}}$ wie in (5.116) sind demnach zu identifizieren:

$$\mathcal{F}_{\text{phys}} := \widetilde{\mathcal{F}} / \sim,$$

wobei $\psi \sim \psi'$, falls $\langle\psi - \psi'|\psi - \psi'\rangle = 0$. Das Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{\text{phys}}$ ist unabhängig vom Repräsentanten und positiv definit: Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf $\widetilde{\mathcal{F}}$,

$$|\langle\psi|\varphi\rangle| \leq \langle\psi|\psi\rangle^{1/2} \langle\varphi|\varphi\rangle^{1/2} \quad (5.118)$$

ist $\langle\psi_1 + \varphi_1|\psi_2 + \varphi_2\rangle = \langle\psi_1|\psi_2\rangle$ für $\langle\varphi_i|\varphi_i\rangle = 0$, ($i = 1, 2$). Ein ausgezeichneter Repräsentant jeder Klasse ist der mit $N'|\psi\rangle = 0$. Allerdings hängt er von der Wahl (5.103) der Polarisierungen und insbesondere vom Vektor n ab.

Observablen $\mathcal{O} = \mathcal{O}^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, die $\widetilde{\mathcal{F}}$ invariant lassen, heissen **eichinvariant**. Wegen (5.118) ist $\mathcal{O}|\psi\rangle \sim 0$ für $|\psi\rangle \sim 0$, das heisst \mathcal{O} operiert auf $\mathcal{F}_{\text{phys}}$. Beispiele sind das elektromagnetische Feld,

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \\ &= -i(2\pi)^{-3/2} \sum_{\lambda=0}^3 \int \frac{d^3k}{2k^0} (k_\mu \varepsilon_\nu^{(\lambda)} - k_\nu \varepsilon_\mu^{(\lambda)}) (a_\lambda(k) e^{-ikx} - a_\lambda^*(k) e^{ikx}) \\ &= F_{\mu\nu}^T(x) - i(2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3k}{2k^0} (k_\mu \varepsilon_\nu^{(0)} - k_\nu \varepsilon_\mu^{(0)}) [(a_3(k) - a_0(k)) e^{-ikx} - (a_3^*(k) - a_0^*(k)) e^{ikx}], \end{aligned}$$

da $k_\mu \varepsilon_\nu^{(3)} - k_\nu \varepsilon_\mu^{(3)} = -(k_\mu \varepsilon_\nu^{(0)} - k_\nu \varepsilon_\mu^{(0)})$ wegen (5.104) (hier ist $F_{\mu\nu}^T$ der Beitrag der transversalen Polarisierungen $\lambda = 1, 2$), sowie der Feldimpuls (5.110)

$$P_\mu = P_\mu^T + \int \frac{d^3k}{2k^0} k^\nu [(a_3^*(k) - a_0^*(k)) a_3(k) + a_0^*(k) (a_3(k) - a_0(k))].$$

Die Geister tragen nicht zu den Erwartungswerten $\langle \psi | F_{\mu\nu}(x) | \psi \rangle$, $\langle \psi | P_\mu | \psi \rangle$ bei. Insbesondere ist $H = P^0$ positiv auf $\mathcal{F}_{\text{phys}}$.

Die 2-Punkt-Funktion ist, s. (5.102),

$$\begin{aligned} \langle 0 | A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle &= \\ &= (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3k}{2k^0} \frac{d^3k'}{2k'^0} e^{-ikx} e^{ik'y} \sum_{\lambda\lambda'} \varepsilon^{(\lambda)\mu}(k) \varepsilon^{(\lambda')\nu}(k') \underbrace{\langle 0 | a_\lambda(k) a_{\lambda'}^*(k') | 0 \rangle}_{-g_{\lambda\lambda'} 2k^0 \delta(\vec{k} - \vec{k}')} \\ &= -g^{\mu\nu} i\Delta_+(x - y), \end{aligned} \quad (5.119)$$

also

$$[A^\mu(x), A^\nu(y)] = -g^{\mu\nu} i\Delta(x - y). \quad (5.120)$$

Der Feynman Propagator ist

$$\langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = -g^{\mu\nu} i\Delta_F(x - y). \quad (5.121)$$

6 Wechselwirkende Felder

6.1 Einführung

Wechselwirkende Felder erhält man, zumindest klassisch, durch Abänderung der Lagrange-Dichte eines freien Feldes. Beispiele sind:

- a) $\frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 \rightarrow V(\varphi) = \frac{1}{2}m_0^2\varphi^2 + \lambda\varphi^4$ beim reellen Skalarfeld (3.20) (Selbstwechselwirkung),
- b) die minimale Kopplung eines komplexen Skalarfeldes (3.47) an das e.m. Feld, oder
- c) des Dirac Feldes, s. (3.68, 4.39), wo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (6.1)$$

mit Nebenbedingung $\partial_\mu A^\mu = 0$ (QED).

Die Konstruktion eines Hilbertraums \mathcal{H} , auf welchem die Euler-Lagrange-Gleichung im Operatorsinne als Heisenbergsche Bewegungsgleichung realisiert ist, ist nun äusserst schwierig und kann insbesondere nicht durch kanonische (oder Fockraum) Quantisierung realisiert werden. Stattdessen formulieren wir allgemeine Eigenschaften einer QFT. Der Einfachheit halber behandeln wir bis auf Weiteres den Fall eines reellen Skalarfeldes.

- 1) Der Zustandsraum ist ein Hilbertraum \mathcal{H} , der eine unitäre Darstellung $U(\Lambda, a)$ der Poincaré-Gruppe ($x \mapsto \Lambda x + a$ mit $\Lambda \in L_+^{\uparrow}$, $a \in \mathbb{R}^4$) trägt und einen einzigen invarianten Zustand $|\Omega\rangle$ (Vakuum) enthält:

$$U(\Lambda, a)|\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \quad (6.2)$$

- 2) Das (kombinierte) Spektrum $\sigma(P^\mu)$ der Erzeugenden P^μ der Translationen $U(1, a) = e^{iP_\mu a^\mu}$ liegt im (vollen) Vorwärtslichtkegel (vgl. (5.46)):

$$\sigma(P^\mu) \subset V := \{p \in \mathbb{R}^4 | p^0 \geq 0, p^\mu p_\mu \geq 0\}. \quad (6.3)$$

Insbesondere ist $P^\mu|\Omega\rangle = 0$ und $H = P^0$ ist nach unten beschränkt (Stabilität).

- 3) Das Feld $\varphi(x) = \varphi(x)^*$ ist ein Operator auf \mathcal{H} . Genauer trifft dies zu auf raumzeitlich ausgeschmierte Felder

$$\varphi(f) = \int d^4x \varphi(x)f(x), \quad (6.4)$$

(f : Testfunktion auf \mathbb{R}^4).

- 4) Kovarianz, vgl. (5.58):

$$U(\Lambda, a)\varphi(x)U(\Lambda, a)^* = \varphi(\Lambda x + a). \quad (6.5)$$

- 5) Kausalität:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = 0 \quad \text{für } (x - y)^2 < 0.$$

Eine allgemeinere und zugleich präzisere Fassung dieser Forderungen sind die **Wightman Axiome**. Sie implizieren den Spin-Statistik Zusammenhang und die PCT-Symmetrie. Hier soll bloss gezeigt werden, wie sie die Struktur der 2-Punkt-Funktion

$$i\Delta_+(x-y) = \langle \Omega | \varphi(x) \varphi(y) | \Omega \rangle$$

festlegen: Sie ist eine Superposition derjenigen freier Felder. Wir nehmen dabei an $\langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle = 0$ (ansonsten betrachte $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) - \langle \Omega | \varphi(x) | \Omega \rangle$). Sei $M^2 := P^\mu P_\mu$ (Massenoperator).

Satz (Källen, Lehmann).

$$i\Delta_+(x) = \int_0^\infty d\rho(m^2) i\Delta_+(x; m^2) \quad (6.6)$$

für ein positives Mass $d\rho$ mit

$$\text{supp } d\rho \subset \sigma(M^2) \subset [0, \infty) \quad (6.7)$$

und (vgl. (5.48))

$$i\Delta_+(x; m^2) = (2\pi)^{-3} \int \frac{d^3p}{2\sqrt{p^2 + m^2}} e^{-ipx}.$$

Beweis: Sei $dE(p)$ das Spektralmaß für P^μ , d.h. $P^\mu = \int_V p^\mu dE(p)$. Dann ist wegen (6.2, 6.5)

$$i\Delta_+(x) = \langle \Omega | \varphi(x) \varphi(0) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \varphi(0) e^{-iP^0 x} \varphi(0) | \Omega \rangle = \int_V e^{-ipx} \underbrace{\langle \Omega | \varphi(0) dE(p) \varphi(0) | \Omega \rangle}_{=: d\mu(p)}.$$

$d\mu(p)$ ist ein positives Mass mit $\text{supp } d\mu \subset \sigma(P^\mu) \subset V$ und $d\mu(\Lambda p) = d\mu(p)$. Die einzigen Lorentz-invarianten Masse auf V sind, vgl. (1.10), $d\mu(p; m^2)$, ($m^2 \geq 0$), und $\delta^{(4)}(p) d^4p$, sowie deren Superpositionen. Also

$$d\mu(p) = \rho_0 \delta^{(4)}(p) d^4p + (2\pi)^{-3} \int_0^\infty d\rho(m^2) d\mu(p; m^2)$$

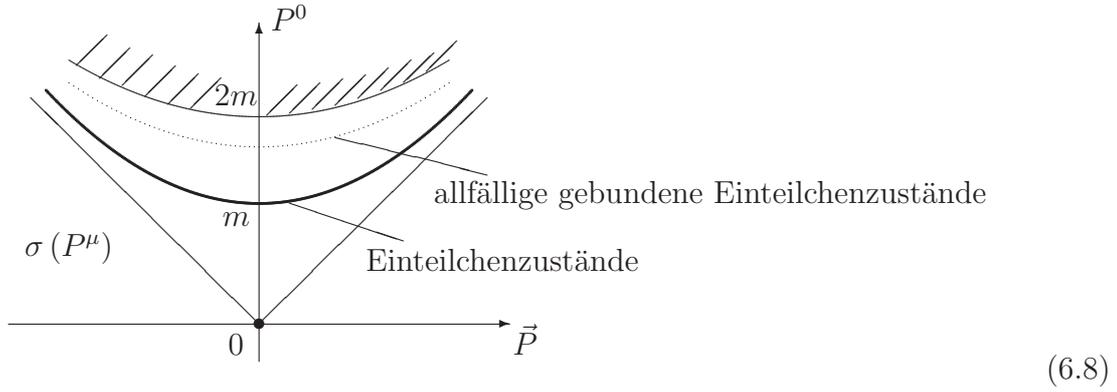
mit (6.7) und

$$\rho_0 = \mu(\{0\}) = \langle \Omega | \varphi(0) E(\{0\}) \varphi(0) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \varphi(0) | \Omega \rangle^2$$

wegen der Eindeutigkeit des Vakuums, $E(\{0\}) = |\Omega\rangle\langle\Omega|$. Der letzte Erwartungswert verschwindet und es folgt (6.6). \square

6.2 Die LSZ-Asymptotenbedingung

Eine Teilcheninterpretation der wechselwirkenden QFT ist möglich, vgl. Abschnitt 1.2, falls das Spektrum $\sigma(P^\mu)$ eine isolierte Massenschale V_m enthält. Genauer nehmen wir an:



6) 0 und $m^2 > 0$ sind isolierte Eigenwerte von $M^2 = P^\mu P_\mu$. Auf dem Eigenraum \mathcal{H}_m zu $M^2 = m^2$ ist die Darstellung $U(\Lambda, a)$ der Poincaré-Gruppe eine (irreduzible) Spin 0 Darstellung.

Damit ist die Darstellung $U(\Lambda, a)$ auf \mathcal{H}_m äquivalent zu derjenigen auf den 1-Teilchenzuständen des freien, reellen Skalarfelds. Verwendet man verallgemeinerte Zustände $|p\rangle$, ($p \in V_m$),

$$P^\mu |p\rangle = p^\mu |p\rangle, \quad \langle p|p'\rangle = 2p^0 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (6.9)$$

so sind 1-Teilchenzustände $|f\rangle \in \mathcal{H}_m$ (vgl. Abschnitt 1.2) dargestellt als

$$|f\rangle = \int \frac{d^3 p}{2p^0} f(p) |p\rangle \quad (6.10)$$

mit $\langle f|f\rangle = \int \frac{d^3 p}{2p^0} |f(p)|^2$.

Ferner lautet die Källen-Lehmann Darstellung (6.6)

$$i\Delta_+(x) = Z \cdot i\Delta_+(x; m^2) + \int d\tilde{\rho}(m'^2) i\Delta_+(x, m'^2) \quad (6.11)$$

mit $Z \geq 0$ und $m^2 \notin \text{supp } d\tilde{\rho}$; dies durch Abspaltung des Beitrags des isolierten Punkts $m^2 \in \text{supp } d\rho$:

$$d\rho(m'^2) = Z\delta(m'^2 - m^2)dm'^2 + d\tilde{\rho}(m'^2).$$

Aus dem Beweis halten wir noch fest

$$\langle \Omega | \varphi(x) E(\{p^\mu p_\mu = m^2\}) \varphi(y) | \Omega \rangle = Z \cdot i\Delta_+(x - y; m^2), \quad (6.12)$$

und nehmen noch an

$$Z > 0,$$

d.h. $\{\varphi(x)|\Omega\} | x \in \mathbb{R}^4 \}$ stehe nicht orthogonal auf den 1-Teilchenzuständen.

Mehrteilchenzustände sind wegen der Wechselwirkung nicht direkt identifizierbar. Die Grundidee der Streutheorie ist aber, dass vor und nach langen Zeiten ein physikalisches System (bei Temperatur 0 und Dichte 0) sich wie eines wechselwirkungsfreier Teilchen verhält. In der QFT werden diese freie Teilchen durch ein freies Feld beschrieben. Die **Asymptotenbedingung** von Lehmann, Symanzik und Zimmermann postuliert, in einem noch zu präzisierenden Sinn, dass

$$\varphi(t, \vec{x}) \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} Z^{1/2} \varphi_{\text{in}}(t, \vec{x}), \quad \varphi(t, \vec{x}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} Z^{1/2} \varphi_{\text{out}}(t, \vec{x}), \quad (6.13)$$

wo

$$\varphi_{\text{as}}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2\omega(\vec{p})} (a_{\text{as}}(p)e^{-ipx} + a_{\text{as}}^*(p)e^{ipx})$$

(as = in, out; $\omega(\vec{p}) = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$) freie Felder der Masse m sind, die kanonisch normiert sind:

$$[a_{\text{as}}(p), a_{\text{as}}^*(p')] = 2\omega(\vec{p})\delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad [a_{\text{as}}^\sharp(p), a_{\text{as}}^\sharp(p')] = 0.$$

Auf den Faktor $Z^{1/2}$ wird später eingegangen. Eine präzisere Fassung von (6.13) ist

$$i \int d^3x \varphi(t, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(t, \vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{\text{w}} Z^{1/2} \cdot i \int d^3x \varphi_{\text{as}}(t, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(t, \vec{x}) \quad (6.14)$$

für Lösungen positiver Energie

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \frac{d^3p}{2\omega(\vec{p})} f(p)e^{-ipx} \quad (6.15)$$

der freien Klein-Gordon-Gleichung (3.21) der Masse m . Hier bedeutet “w” schwache Konvergenz, d.h. im Sinne der Matrixelemente zwischen beliebigen Zuständen $\langle\psi_1|$ und $|\psi_2\rangle$. Für eine ebene Welle $f(p) = 2\omega(\vec{p})\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$, $f(x) = (2\pi)^{-3/2}e^{-iqx}$ lautet sie

$$(2\pi)^{-3/2}i \int d^3x \varphi(t, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 e^{-iqx} \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{\text{w}} Z^{1/2}a_{\text{as}}^*(q). \quad (6.16)$$

Die rechte Seite von (6.14) ist wegen

$$i \int d^3x \varphi_{\text{as}}(t, \vec{x}) \overleftrightarrow{\partial}_0 f(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3p}{2\omega(\vec{p})} f(p)a_{\text{as}}^*(p) \equiv a_{\text{as}}^*(f)$$

ein von t unabhängiger Erzeugungsoperator. Seine Bedeutung folgt aus (6.14): Ersetzt man t durch $t+s$, also $\varphi(t, \vec{x})$ durch $e^{isH}\varphi(t, \vec{x})e^{-isH}$ und $f(t, \vec{x})$ durch $f(t+s, \vec{x}) =: f_s(t, \vec{x})$, so folgt wegen $Z \neq 0$, dass $a_{\text{as}}^*(f) = e^{isH}a_{\text{as}}^*(f_s)e^{-isH}$, d.h.

$$e^{-itH}a_{\text{as}}^*(f) = a_{\text{as}}^*(f_t)e^{-itH},$$

wobei $f_t(x)$ die um die Zeit t evolvierte Lösung $f(x)$ der Klein-Gordon Gleichung ist. Damit erzeugt $a_{\text{as}}^*(f)$ ein Teilchen, das sich asymptotisch frei verhält. Insbesondere ist $e^{-itH}a_{\text{as}}^*(f)|\Omega\rangle = a_{\text{as}}^*(f_t)|\Omega\rangle$, also $a_{\text{as}}^*(f)|\Omega\rangle$ ein **freier** 1-Teilchen Zustand, der mit (6.9) übereinstimmen muss:

$$|f\rangle = a_{\text{as}}^*(f)|\Omega\rangle,$$

bzw. $|p\rangle = a_{\text{as}}^*(p)|\Omega\rangle$. Die Zustände

$$|p_1 \dots p_n\rangle_{\text{as}} = a_{\text{as}}^*(p_1) \dots a_{\text{as}}^*(p_n)|\Omega\rangle \quad (6.17)$$

zeichnen sich hingegen durch n nur **asymptotisch freie** Teilchen aus.

Wir beweisen die Asymptotenbedingung (6.14) nicht. Sie kann aber aus den „Axiomen“ 1 – 6 hergeleitet werden. Dies ist der Inhalt der **Haag-Ruelle-Streutheorie**, wobei eine bestimmte Form von (6.14), die berücksichtigt, dass die bloss räumliche Ausschmierung von $\varphi(x)$ im Allgemeinen nicht wohldefiniert ist, vgl. (6.4), von Hepp bewiesen wurde.

Hier zeigen wir bloss, dass die Z 's in (6.11, 6.13) gleich sind und nennen dazu letzteres \tilde{Z} . Verwendet man

$$E(\{p^\mu p_\mu = m^2\}) = \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} |p\rangle \langle p| \quad (6.18)$$

in (6.12), sowie $x = (\vec{x}, t)$, $y = (\vec{y}, t)$, so ist die rechte Seite unabhängig von t und die linke strebt für $t \rightarrow \pm\infty$ gegen

$$\tilde{Z} \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} \langle \Omega | \varphi_{\text{as}}(x) | p \rangle \langle p | \varphi_{\text{as}}(y) | \Omega \rangle = \tilde{Z} \cdot i \Delta_+(x - y; m^2),$$

da $|p\rangle = |p\rangle_{\text{as}}$. Also $\tilde{Z} = Z$. Befriedigender wäre es, (6.14) statt (6.13) zu verwenden. Sei $\varphi(f; t)$ dessen linke Seite. Dann ist

$$\langle \Omega | \varphi(f; t)^* | g \rangle = \tilde{Z}^{1/2} \langle f, g \rangle,$$

oder $\langle \Omega | \varphi(f; t)^* | p \rangle = \tilde{Z}^{1/2} \bar{f}(p)$, denn einerseits gilt dies im Limes $t \rightarrow \pm\infty$ und andererseits ist die linke Seite unabhängig von t : Dies trifft wegen (6.2, 6.5) zu auf $\langle \Omega | \varphi(f; t)^* \varphi(g; t + s) | \Omega \rangle$, also auch auf den Limes $s \rightarrow \pm\infty$, d.h. auf $\langle \Omega | \varphi(f; t)^* a_{\text{as}}^*(g) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \varphi(f; t)^* | g \rangle$. Damit folgt mit (6.18) und (5.55)

$$\langle \Omega | \varphi(f; t)^* E(\{p^\mu p_\mu = m^2\}) \varphi(g; t) | \Omega \rangle = \tilde{Z} \cdot \int \frac{d^3 p}{2\omega(\vec{p})} \bar{f}(p) g(p) = \tilde{Z} i \int_{x^0=t} d^3 x \bar{f}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(x).$$

Nach (6.12) ist dies auch gleich

$$\begin{aligned} & - Z \cdot \int_{x^0=y^0=t} d^3 x d^3 y i \Delta_+(x - y; m^2) \overleftrightarrow{\partial}_0 \bar{f}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(y) = \\ & = -2Z \int_{x^0=y^0=t} d^3 x d^3 y (\partial_{x^0} i \Delta_+(x - y; m^2)) \bar{f}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(y) = Z \cdot i \int_{x^0=t} d^3 x \bar{f}(x) \overleftrightarrow{\partial}_0 g(x) \end{aligned}$$

wegen $(\partial/\partial x^0) \Delta_+(x; m^2)|_{x^0=0} = -\frac{1}{2} \delta^{(3)}(\vec{x})$. Also $\tilde{Z} = Z$.

Bemerkung: Falls $\varphi(x)$ und $\pi(y) = \partial_0 \varphi(y)$ zur Zeit $x^0 = y^0$ den kanonischen Vertauschungsrelationen (5.34) genügen, so ist $\int_0^\infty d\rho(m^2) = 1$ und insbesondere $Z \leq 1$. Beweis: Aus (6.6) folgt

$$\langle \Omega | [\varphi(x), \varphi(y)] | \Omega \rangle = \int_0^\infty d\rho(m^2) i (\Delta_+(x - y; m^2) - \Delta_+(y - x; m^2)).$$

Ableitung ∂_{y_0} bei $x^0 = y^0$ liefert die Behauptung nach Kürzung von $i\delta(\vec{x} - \vec{y})$. Wir werden später sehen, dass die Voraussetzung für wechselwirkende Felder unzutreffend sein kann.

6.3 Die LSZ-Reduktionsformeln

Die LSZ-Reduktionsformeln erlauben es, **Streuamplituden** zwischen in- und out-Zuständen (6.17) durch **zeitgeordnete Vakuumserwartungswerte** von φ auszudrücken

(Greensfunktionen). Damit werden die Streuamplituden der Störungsrechnung (s. Kap. 7) zugänglich.

Satz. Seien $p_i, q_j \in V_m$ mit

$$p_i \neq q_j \quad (6.19)$$

für alle i, j . Für die Streuamplituden gilt dann

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_n \rangle_{\text{in}} = & \\ \left(\frac{iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \right)^{k+n} \int \prod_{i=1}^k (d^4 y_i e^{ip_i y_i} (\square_{y_i} + m^2)) \prod_{j=1}^n (d^4 x_j e^{-iq_j x_j} (\square_{x_j} + m^2)) \cdot & \\ \cdot \langle \Omega | T \prod_i \varphi(y_i) \prod_j \varphi(x_j) | \Omega \rangle & \quad (6.20) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- 1) Falls $p_i = q_j$ für ein Paar i, j , so kommt ein Term $\propto \delta^{(3)}(\vec{p}_i - \vec{q}_j)$ hinzu, der einen Prozess beschreibt, in welchem ein Teilchen mit diesem Impuls an der Streuung nicht teilnimmt.
- 2) Es bezeichne

$$G(p_1, \dots, p_n) = \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n e^{-i \sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i} \langle \Omega | T \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) | \Omega \rangle \quad (6.21)$$

die Greensfunktion im Impulsraum, sodass (6.20) lautet

$$\begin{aligned} \text{out} \langle p_1 \dots p_k | q_1 \dots q_n \rangle_{\text{in}} = & \\ \left(\frac{-iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \right)^{k+n} \prod_{i=1}^k (p_i^2 - m^2) \prod_{j=1}^n (q_j^2 - m^2) G(-p_1, \dots, -p_k, q_1, \dots, q_n). & \quad (6.22) \end{aligned}$$

Obschon $p_i^2 = q_j^2 = m^2$, verschwindet der Ausdruck in der Regel nicht, da $G(-p_1, \dots, q_n)$ Pole auf der Massenschale hat. Bis auf konstante Faktoren ist die Streuamplitude das Residuum dieses Pols in $n + k$ Variablen.

- 3) Aus (6.22) folgt auch die „**crossing**“-**Symmetrie**: Die Streuamplitude bleibt sich gleich, falls man ein in-Teilchen mit Impuls $q_i \in V_m$ formal ersetzt durch ein out-Teilchen mit unphysikalischem Impuls $-q_i \in -V_m$ und insbesondere mit negativer Energie.
- 4) Ersetzt man $y_i \rightarrow y_i + a$, $x_j \rightarrow x_j + a$, ($a \in \mathbb{R}^4$, beliebig) unter dem Integral (6.20), so entfällt a aus der Greensfunktion wegen (6.2, 6.5). Also ist

$$(1 - e^{i(\sum_i p_i - \sum_j q_j) \cdot a}) \cdot (\text{rechte Seite}) = 0, \quad (6.23)$$

d.h. aus der rechten Seite lässt sich eine den 4er-Impuls erhaltende Distribution $\delta^{(4)}(\sum_{i=1}^k p_i - \sum_{j=1}^n q_j)$ abspalten.

- 5) Offensichtlich ist $\text{out} \langle \Lambda p_1, \dots, \Lambda p_k | \Lambda q_1 \dots \Lambda q_n \rangle_{\text{in}} = \text{out} \langle p_1, \dots, p_k | q_1 \dots q_n \rangle_{\text{in}}$.

Beweis: Wir beweisen eine Rekursionsformel für eine etwas allgemeinere Grösse als (6.20), und zwar

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle p_1 \dots p_k | T\varphi(z_1) \dots \varphi(z_l) | q_1 \dots q_n \rangle_{\text{in}} \\ &= \frac{iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{-iq_1x} (\square_x + m^2) \text{out} \langle p_1 \dots p_k | T\varphi(z_1) \dots \varphi(z_l) \varphi(x) | q_2 \dots q_n \rangle_{\text{in}} \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$= \frac{iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4y e^{ip_1y} (\square_y + m^2) \text{out} \langle p_2 \dots p_k | T\varphi(y) \varphi(z_1) \dots \varphi(z_l) | q_1 \dots q_n \rangle_{\text{in}} \quad (6.25)$$

Die linke Seite ist nämlich wegen (6.16) gleich

$$\begin{aligned} & \text{out} \langle p_1 \dots p_k | T\varphi(z_1) \dots \varphi(z_l) a_{\text{in}}^*(q_1) | q_2 \dots q_n \rangle_{\text{in}} \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^0=t} d^3x e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1 \dots p_k | T\varphi(z_1) \dots \varphi(z_l) \varphi(x) | q_2 \dots q_n \rangle_{\text{in}} \quad (6.26) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^0=t} d^3x e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1 \dots p_k | T\varphi(z_1) \dots \varphi(z_l) \varphi(x) | q_2 \dots q_n \rangle_{\text{in}} \\ &+ \frac{iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x \partial_0 \{ e^{-iq_1x} \overleftrightarrow{\partial}_0 \text{out} \langle p_1 \dots p_k | T\varphi(z_1) \dots \varphi(z_l) \varphi(x) | q_2 \dots q_n \rangle_{\text{in}} \}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Dabei konnte in (6.26) $\varphi(x)$ unter die Zeitordnung T genommen werden, da für $t \rightarrow -\infty$ dies die früheste Zeit ist. Im ersten Term in (6.27) ist sie hingegen die späteste. Dieser ist nach (6.16) also gleich

$$\text{out} \langle p_1 \dots p_k | a_{\text{out}}^*(q_1) (T\varphi(z_1) \dots \varphi(z_l)) | q_2 \dots q_n \rangle_{\text{in}} = 0$$

unter der Voraussetzung (6.19): $a_{\text{out}}^*(q_1)$ wirkt nach links als $a_{\text{out}}(q_1)$. Der zweite Term in (6.27) ist wegen $(\square + m^2)e^{-iq_1x} = 0$ gleich

$$\frac{iZ^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x \{ e^{-iq_1x} \partial_0^2 \langle \dots \rangle - [(\Delta - m^2) e^{-iq_1x}] \langle \dots \rangle \},$$

also gleich (6.24) dank partieller Integration in \vec{x} . Dabei entstehen keine Randterme, denn das Argument ist grundsätzlich nicht für $(2\pi)^{-3/2}e^{-iq_1x}$, sondern für Wellenpakete (6.15) zu führen: Diese verschwinden für $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ (nicht für $x^0 \rightarrow \pm\infty$). Der Beweis von (6.25) ist analog und (6.20) folgt durch wiederholte Anwendung von (6.24, 6.25). \square

Ohne Beweis führen wir die Reduktionsformel für das Dirac- und, weiter unten, für das e.m. Feld auf. Ausgehend von der LSZ-Asymptoten-Bedingung

$$\Psi(t, \vec{x}) \xrightarrow[t \rightarrow \pm\infty]{} Z_2^{1/2} \Psi_{\text{as}}(t, \vec{x})$$

(der Index 2 ist hier üblich) findet man für $p \in V_m$

$$\begin{aligned} & \text{w-} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{Z_2^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^0=t} d^3x e^{-ipx} \overline{\Psi}(x) \gamma^0 u^{(\alpha)}(p) = b_{\text{as},\alpha}^*(p), \\ & \text{w-} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{Z_2^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int_{x^0=t} d^3x e^{-ipx} \overline{v}^{(\alpha)}(p) \gamma^0 \Psi(x) = d_{\text{as},\alpha}^*(p). \end{aligned}$$

Zustände $|(p_1\alpha_1\sigma_1), \dots, (p_n\alpha_n\sigma_n)\rangle_{\text{as}}$ ($p_i \in V_m, \alpha_i = 1, 2, \sigma_i = \pm$) n asymptotisch freier Elektronen ($\sigma_i = +$) oder Positronen ($\sigma_i = -$) bekommt man, indem man auf $|\Omega\rangle$ (mit dem Index $i = n$ beginnend) wirkt mit $b_{\alpha_i, \text{as}}^*(p_i)$ ($\sigma_i = +$), bzw. mit $d_{\alpha_i, \text{as}}^*(p_i)$ ($\sigma_i = -$). Die längliche Reduktionsformel für

$$\text{out}\langle (p_1\alpha_1\sigma_1), \dots, (p_k\alpha_k\sigma_k) | (q_1\beta_1\tau_1), \dots, (q_n\beta_n\tau_n) \rangle_{\text{in}} \quad (6.28)$$

bekommt man wie folgt:

- Schreibe für jedes in-Teilchen $(q_i\beta_i\tau_i)$, beginnend mit $i = n$ und von rechts, einen Faktor

$$\begin{aligned} \frac{-iZ_2^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x_i \bar{\Psi}(x_i) (-i\overleftarrow{\not{\partial}}_{x_i} - m) u^{(\beta_i)}(q_i) e^{-iq_i x_i}, & \quad (\tau_i = +), \\ \frac{iZ_2^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x_i e^{-iq_i x_i} \bar{v}^{(\beta_i)}(q_i) (i\overrightarrow{\not{\partial}}_{x_i} - m) \Psi(x_i), & \quad (\tau_i = -), \end{aligned} \quad (6.29)$$

- Analog für die out-Teilchen, beginnend mit $j = k$ und von links:

$$\begin{aligned} \frac{-iZ_2^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4y_j e^{ip_j y_j} \bar{u}^{(\alpha_j)}(p_j) (i\overrightarrow{\not{\partial}}_{y_j} - m) \Psi(y_j), & \quad (\sigma_j = +), \\ \frac{iZ_2^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4y_j \bar{\Psi}(y_j) (-i\overleftarrow{\not{\partial}}_{y_j} - m) v^{(\alpha_j)}(p_j) e^{ip_j y_j}, & \quad (\sigma_j = -), \end{aligned} \quad (6.30)$$

- Bilde den Vakuumerwartungswert des T -Produkts der Feldoperatoren und integriere über d^4x_i, d^4y_j .

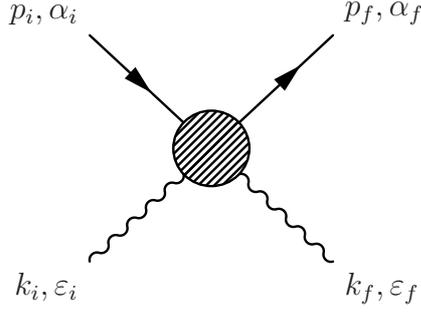
Bemerkungen:

- 1) Der Vergleich von (6.29 \pm , 6.30 \mp) zeigt, dass sie sich entsprechen unter der Vertauschung $u^{(\beta)}(q)e^{-iqx} \leftrightarrow -v^{(\alpha)}(q)e^{+iqx}$. Entsprechend resultiert die crossing-Symmetrie.
- 2) Wegen der Eichtransformation (5.94) des wechselwirkenden Feldes $\Psi(x)$ bleibt der Vakuumerwartungswert unverändert unter Multiplikation mit $e^{-i\lambda(q_{\text{out}} - q_{\text{in}})}$, wobei $q_{\text{out}} = \#(\tau_i = +) - \#(\tau_i = -)$ die Ladung im out- Zustand ist. Also ist die Streuamplitude (6.28) nicht trivial, nur falls $q_{\text{out}} = q_{\text{in}}$.

Für das e.m. Feld ist die Angelegenheit delikater. Man sollte den Photonen eine Masse $\mu > 0$ geben, s. (3.69), um eine isolierte Massenschale zu erhalten, und erst anschliessend $\mu \rightarrow 0$ nehmen. Das Resultat ist aber ähnlich zum skalaren Fall (6.20). Es bezeichnen $a_{\text{as}, i}^*(k)$, ($k \in V_0, i = 1, 2$) die Erzeugungsoperatoren asymptotisch freier Photonen mit transversaler Polarisation, s. (5.103), und $|(k_1, i_1), \dots, (k_n, i_n)\rangle_{\text{as}} = a_{\text{as}, i_1}^*(k_1) \cdots a_{\text{as}, i_n}^*(k_n) |\Omega\rangle$. Die Reduktionsformel verlangt für jedes Photon (k, i) einen Faktor

$$\frac{-iZ_3^{-1/2}}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4x e^{\pm ikx} \square (\varepsilon^{(i)}(k) \cdot A(x)) \quad (6.31)$$

(+ : out ; - : in), sowie den Vakuumerwartungswert des T -Produktes der Feldoperatoren. Im Fall der QED, s. (6.1), wo die Streuzustände sowohl Elektronen / Positronen wie Photonen enthalten, sind die Ausdrücke (6.29, 6.30, 6.31) zu kombinieren. So lautet z.B. die Streuamplitude eines Elektrons und eines Photons (**Compton-Streuung**)



$$\begin{aligned} \text{out} \langle f|i \rangle_{\text{in}} &= \frac{Z_2^{-1} Z_3^{-1}}{(2\pi)^6} \int dx_1 dz_1 dx_2 dz_2 e^{-i(p_i x_1 + k_i z_1 - p_f x_2 - k_f z_2)} \\ &\cdot \bar{u}^{(\alpha_f)}(p_f) (i \overleftrightarrow{\not{\partial}}_{x_2} - m) \square_{z_1} \square_{z_2} \langle \Omega | T \Psi(x_2) \varepsilon^{(f)}(k_f) \cdot A(z_2) \\ &\cdot \bar{\Psi}(x_1) \varepsilon^{(i)}(k_i) \cdot A(z_1) | \Omega \rangle (-i \overleftarrow{\not{\partial}}_{x_1} - m) u^{(\alpha_i)}(p_i). \quad (6.32) \end{aligned}$$

6.4 S -Matrix und Streuquerschnitte

Die S -Matrix ordnet n -Teilchen-Zuständen mit bestimmten Impulsen für $t \rightarrow -\infty$ die Zustände zu, die dieselben Impulse bei $t \rightarrow +\infty$ aufweisen, gemäß

$$\text{out} \langle q_1 \dots q_k | =: {}_{\text{in}} \langle q_1 \dots q_k | S,$$

(d.h. $|q_1 \dots q_k \rangle_{\text{out}} = S^* |q_1 \dots q_k \rangle_{\text{in}}$). S ist eine Isometrie und ist lorentz-invariant: $U(\Lambda, a)^* S U(\Lambda, a) = S$, vgl. Bemerkung 5 auf S. 82. Die Übergangsamplituden sind

$$\begin{aligned} \text{out} \langle q_1 \dots q_k | p_1 \dots p_n \rangle_{\text{in}} &= {}_{\text{in}} \langle q_1 \dots q_k | S | p_1 \dots p_n \rangle_{\text{in}} \\ &= \text{out} \langle q_1 \dots q_k | (S^*)^{-1} | p_1 \dots p_n \rangle_{\text{out}}. \end{aligned}$$

Verwendet man wie üblich nur die in-Zustände (sozusagen ein Wechselwirkungs- statt ein Heisenbergbild), so ist S auch die Abbildung, die diesen den Zustand nach der Streuung zuordnet.

Die Teilcheninterpretation (6.17) des Feldes ist erst vollständig, falls die Zustände $|p_1 \dots p_n \rangle_{\text{as}}$ den ganzen Zustandsraum aufspannen (sowohl für $\text{as} = \text{in}$ wie $\text{as} = \text{out}$); dann ist S unitär: $S = S^{*-1}$. Dies ist z.B. nicht der Fall, bzw. erst nach Anpassungen, falls mehrere isolierte Massenschalen im Spektrum (6.8) vorhanden sind.

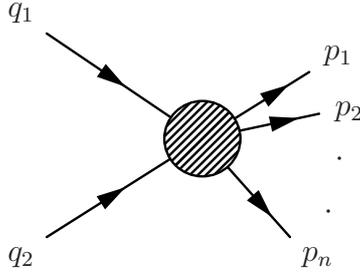
Von der S -Matrix spaltet man einen Beitrag 1 ab, der Abwesenheit von Streuung (triviale Streuung) entspricht,

$$S =: 1 + iT;$$

ferner sind Matrixelemente von T nach (6.23) von der Form

$$\langle p_1 \dots p_k | T | q_1 \dots q_n \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^k p_i - \sum_{j=1}^n q_j \right) \cdot (2\pi)^{-\frac{3}{2}(k+n)} T(p_1, \dots, p_k; q_1, \dots, q_n). \quad (6.33)$$

Für $n = 2$ können keine weiteren δ -Funktionen abgespalten werden, im Unterschied zu $n \geq 3$, wo T Beiträge enthält, die z.B. die nichttriviale Streuung zwischen Teilchen 1 und 2, separat von den restlichen, beschreiben.



Aus $|T(p_1, \dots, p_k; q_1, q_2)|^2$ kann der **differentielle Streuquerschnitt** für den Prozess in der Abbildung gewonnen werden.

Wir gehen dazu von einem Wellenpaket

$$|i\rangle = \int \frac{d^3 q'_1}{2q'_1} \frac{d^3 q'_2}{2q'_2} f_1(q'_1) f_2(q'_2) |q'_1 q'_2\rangle_{\text{in}}$$

aus, und zwar im Limes, wo es nahezu eben ist:

$$\text{supp } f_i(q'_0, \vec{q}') \longrightarrow \{\vec{q}_i\}, \quad (i = 1, 2). \quad (6.34)$$

Der Endzustand ist $\langle f| = {}_{\text{out}}\langle p_1 \dots p_k|$. Dann ist im Limes

$$\begin{aligned} \langle f|i\rangle &= i \int \frac{d^3 q'_1}{2q'_1} \frac{d^3 q'_2}{2q'_2} f_1(q'_1) f_2(q'_2) \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - q'_1 - q'_2) \cdot (2\pi)^{-\frac{3}{2}(k+2)} T(p_1, \dots, p_k; q_1, q_2) \\ &= i(2\pi)^{-\frac{3}{2}k} \int d^4 x f_1(x) f_2(x) e^{iP_f x} T(p_1, \dots, p_k; q_1, q_2) \end{aligned}$$

mit $P_f = \sum_{i=1}^k p_i$ und unter Verwendung von (6.15) und von $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p) = \int d^4 x e^{ipx}$. Bei der Berechnung der **Übergangswahrscheinlichkeit** $|\langle f|i\rangle|^2$ tritt folgendes Integral auf

$$\begin{aligned} &\int d^4 x d^4 y f_1(x) \overline{f_1(y)} f_2(x) \overline{f_2(y)} e^{iP_f(x-y)} \\ &\approx \int d^4 x d^4 y \left| f_1\left(\frac{x+y}{2}\right) \right|^2 \left| f_2\left(\frac{x+y}{2}\right) \right|^2 e^{i(P_f - q_1 - q_2)(x-y)} \\ &\approx \int d^4 x |f_1(x)|^2 |f_2(x)|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - q_1 - q_2), \end{aligned}$$

denn im Limes (6.34) gilt

$$f_i(x) \overline{f_i(y)} \approx \left| f_i\left(\frac{x+y}{2}\right) \right|^2 e^{iq_i(y-x)},$$

solange $|y^\mu - x^\mu| \leq L = \text{Ausdehnung der Welle}$. Das Integral $\int d^4 z e^{i(P_f - q_1 - q_2)z}$, ($z = x - y$), ergibt dann genauer eine um L^{-1} ausgeschmierte $\delta^{(4)}$ -Funktion, was im Limes $L \rightarrow \infty$ unwesentlich ist, denn das Ergebnis wird – wie Fermis Goldene Regel (2.51) – nur nach Summation über Endzustände (und somit über P_f) zu verwenden sein. Also ist

$$|\langle f|i\rangle|^2 = (2\pi)^{-3k} \int d^4 x |f_1(x)|^2 |f_2(x)|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - q_1 - q_2) |T(p_1, \dots, p_k; q_1, q_2)|^2. \quad (6.35)$$

Für eine ebene Welle $f(x) = (2\pi)^{-3/2} e^{-iqx}$ ist die Stromdichte $i\vec{f}(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu f(x) = 2q_\mu \cdot (2\pi)^{-3}$; für ein Wellenpaket wie oben gelten lokal dieselben Verhältnisse:

$$i\vec{f}(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu f(x) = 2q_\mu \cdot |f(x)|^2.$$

Wir stellen uns den Streuprozess im Ruhesystem von Teilchen 2 (Target) vor ($q_2 = (m_2, \vec{0})$). Der Wirkungsquerschnitt $d\sigma$ für Streuung nach $(\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_k) \in d^3p_1 \dots d^3p_k$ ist die Übergangswahrscheinlichkeit (6.35) bezogen auf

- Stromdichte 1 des einfallenden Strahls (statt $2|\vec{q}_1||f_1(x)|^2$)
- 1 Teilchen im Target (statt $\int d^3x \cdot 2m_2|f_2(x)|^2$)
- Zeit 1 (statt $\int dx^0$)

und summiert über $p_i \in d^3p_i$. Dabei ist zu bemerken, dass wegen (6.9)

$$\int_{\vec{p} \in \Delta} \frac{d^3p}{2p^0} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$$

der Projektor auf 1-Teilchenzustände mit $\vec{p} \in \Delta$ ist. Also

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^{-3k}}{4[(q_1 \cdot q_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - q_1 - q_2) |T(p_1, \dots, p_k; q_1, q_2)|^2 \frac{d^3p_1}{2p_1^0} \dots \frac{d^3p_k}{2p_k^0}, \quad (6.36)$$

wobei wir den Nenner $2|\vec{q}_1| \cdot 2m_2$ noch Lorentz-invariant umgeschrieben haben: Der allgemeine Ausdruck

$$(q_1 \cdot q_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = (q_1^0)^2 q_2^2 + \vec{q}_1^2 (q_2^0)^2 - 2q_1^0 q_2^0 \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2 + (\vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2)^2 - \vec{q}_1^2 \vec{q}_2^2 \quad (6.37)$$

(verwende $q_1 \cdot q_2 = q_1^0 q_2^0 - \vec{q}_1 \cdot \vec{q}_2$, $m_i^2 = (q_i^0)^2 - \vec{q}_i^2$) vereinfacht sich für $q_2 = (m_2, \vec{0})$ zu $\vec{q}_1^2 \cdot m_2^2$. Beachte, dass damit $d\sigma$ Lorentz-invariant ist.

Wir behandeln ausführlicher den Fall der **2-Teilchenstreuung** ($k = 2$). Das Teilchen 2 werde nicht beobachtet, das Teilchen 1 soll in Richtung $\vec{e}' \in d\Omega$ austreten bezüglich des Schwerpunktssystems

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0. \quad (6.38)$$

Zu integrieren ist (6.36) über alle \vec{p}_2 , sowie über $|\vec{p}_1|$ in $d^3p_1 = |\vec{p}_1|^2 d|\vec{p}_1| \cdot d\Omega$. Dabei ist, s. (6.37),

$$(q_1 \cdot q_2)^2 - m_1^2 m_2^2 = ((q_1^0)^2 + (q_2^0)^2 + 2q_1^0 q_2^0) \vec{q}_1^2 = (q_1^0 + q_2^0)^2 \vec{q}_1^2,$$

also

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^{-2}}{4(q_1^0 + q_2^0) |\vec{q}_1|} \int_0^\infty d|\vec{p}_1| \cdot |\vec{p}_1|^2 \cdot \frac{1}{2p_1^0} \cdot \frac{1}{2p_2^0} \delta(p_1^0 + p_2^0 - q_1^0 - q_2^0) |T(p_1, p_2; q_1, q_2)|^2, \quad (6.39)$$

wobei $\vec{p}_2 = -|\vec{p}_1| \vec{e}'$ wegen (6.38) und der Impulserhaltung $\delta^{(3)}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{q}_1 - \vec{q}_2)$ in (6.36). Da $\partial p^0 / \partial |\vec{p}| = |\vec{p}| / p^0$ und $|\vec{p}_2| = |\vec{p}_1|$, gilt für die Nullstelle des Arguments der δ -Funktion in (6.39)

$$\frac{\partial(p_1^0 + p_2^0)}{\partial |\vec{p}_1|} = \frac{|\vec{p}_1|}{p_1^0} + \frac{|\vec{p}_2|}{p_2^0} \frac{\partial |\vec{p}_2|}{\partial |\vec{p}_1|} = |\vec{p}_1| \left(\frac{1}{p_1^0} + \frac{1}{p_2^0} \right) = |\vec{p}_1| \frac{q_1^0 + q_2^0}{p_1^0 p_2^0}.$$

Man findet damit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 (q_1^0 + q_2^0)^2} \cdot \frac{|\vec{p}_1|}{|\vec{q}_1|} \cdot |T(p_1, p_2; q_1, q_2)|^2. \quad (6.40)$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man als $\sigma_{\text{tot}} = \int_{S^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$. Falls die auslaufenden Teilchen identisch sind, ist dieses Resultat durch 2 zu dividieren, da die Streuungen in die Richtungen \vec{e}' und $-\vec{e}'$ denselben Prozess beschreiben. Wenn die Streuung elastisch ist, d.h. die Massen unverändert bleiben, dann ist $|\vec{p}_1| = |\vec{q}_1|$.

Die Berechnung des Wirkungsquerschnitts im Ruhesystem des Targets (Laborsystem, $q_2 = (m_2, \vec{0})$) verläuft ähnlich: Die Integration über \vec{p}_2 liefert $\vec{p}_2 = \vec{q}_1 - \vec{p}_1$, der Nenner vor dem Integral (6.39) ist, wie bemerkt, $4|\vec{q}_1|m_2$ und $|\vec{p}_2|\partial|\vec{p}_2|/\partial|\vec{p}_1| = -\vec{p}_2 \cdot \vec{e}'$. Das Resultat ist

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 |\vec{q}_1| m_2} \cdot \frac{|\vec{p}_1|^2}{|\vec{p}_1| p_2^0 - p_1^0 \vec{p}_2 \cdot \vec{e}'} \cdot |T(p_1, p_2; q_1, q_2)|^2. \quad (6.41)$$

Ist $m_1 = 0$, so ist der zweite Nenner $p_1 \cdot p_2$. Ist die Streuung zudem elastisch, so ist er auch gleich $q_1 \cdot q_2 = |\vec{q}_1| m_2$.

7 Störungstheorie und Feynman-Diagramme

7.1 Die Gell-Mann–Low-Reihe

Wie wir anhand der LSZ-Reduktionsformel (6.20) gesehen haben, kann die Berechnung der Streuamplituden auf die der zeitgeordneten Greenschen Funktionen zurückgeführt werden, im Fall eines reellen Skalarfeldes $\varphi(x)$ also auf

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle \Omega | T[\varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)] | \Omega \rangle,$$

wobei

$$T[\varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)] = \varphi(x_{i_1})\varphi(x_{i_2}) \dots \varphi(x_{i_n})$$

für $x_{i_1}^0 > \dots > x_{i_n}^0$. Diese sollen perturbativ berechnet werden; das Vorgehen ist heuristisch. Die Lagrange-Dichte sei

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial\varphi) = \mathcal{L}_0(\varphi, \partial\varphi) + \mathcal{L}_W(\varphi)$$

mit freier Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_0 = (\partial\varphi)^2/2 - m_0^2\varphi^2/2$ und Wechselwirkung $\mathcal{L}_W(\varphi)$, die einfachheitshalber nicht von $\partial\varphi$ abhängen soll. Dann ist $H = H_0 + H_W = \int d^3x : \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_W :$ mit $\mathcal{H}_0 = (\pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m_0^2\varphi^2)/2$ und $\mathcal{H}_W = -\mathcal{L}_W(\varphi(0, \vec{x}))$.

Beispiel: $\mathcal{L}_W(\varphi) = -\lambda\varphi^4/4!$. Dann ist

$$H_W = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x : \varphi(0, \vec{x})^4 : . \quad (7.1)$$

Seien $|0\rangle, |\Omega\rangle$ die Grundzustände von H_0, H :

$$H_0|0\rangle = 0, \quad H|\Omega\rangle = E|\Omega\rangle \quad (7.2)$$

(mit $E = 0$ wegen (6.2)). Es gilt

$$s\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T ds e^{-i(H-E)s} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$$

(starker Grenzwert; folgt aus $\lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^T ds e^{-i(\lambda-E)s} = \delta_{\lambda E}$ punktweise in λ). Wir wollen aber das Zeitmittel unterdrücken und gehen im Folgenden von

$$s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{-i(H-E)t} = |\Omega\rangle\langle\Omega| \quad (7.3)$$

aus, obschon nur der schwache Grenzwert gilt, vgl. Satz von Riemann-Lebesgue. Falls

$$\langle\Omega|0\rangle \neq 0, \quad (7.4)$$

so gilt

$$\begin{aligned} |\Omega\rangle &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{i(H-E)t}|0\rangle}{\langle\Omega|0\rangle}, \\ \langle\Omega|A|\Omega\rangle &= \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s \rightarrow -\infty}} \frac{\langle 0|e^{-i(H-E)t} A e^{i(H-E)s}|0\rangle}{|\langle\Omega|0\rangle|^2} \end{aligned} \quad (7.5)$$

für jeden Operator A . Durch Betrachtung von $A = \mathbf{1}$ folgt

$$\langle \Omega | A | \Omega \rangle = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s \rightarrow -\infty}} \frac{\langle 0 | e^{iH_0 t} e^{-iHt} A e^{iHs} e^{-iH_0 s} | 0 \rangle}{\langle 0 | e^{iH_0 t} e^{-iH(t-s)} e^{-iH_0 s} | 0 \rangle}. \quad (7.6)$$

Wir benützen nun das **Wechselwirkungsbild**

$$U(t, s) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t-s)} e^{-iH_0 s}.$$

Der Propagator erfüllt die Differentialgleichung

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t, s) = H_W(t) U(t, s)$$

mit

$$H_W(t) = e^{iH_0 t} H_W e^{-iH_0 t}.$$

Die Entwicklung von $U(t, s)$ nach Potenzen von H_W ist die **Dyson-Reihe**

$$U(t, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_s^t \dots \int_s^t dt_1 \dots dt_n T(H_W(t_n) \dots H_W(t_1)) = T \exp\left(-i \int_s^t d\tau H_W(\tau)\right).$$

Wir gehen davon aus, dass zur Zeit $t = 0$ die wechselwirkenden Felder $\varphi(x)$, $\pi(x)$ mit den freien übereinstimmen

$$\varphi(0, \vec{x}) = \varphi_0(0, \vec{x}), \quad \pi(0, \vec{x}) = \pi_0(0, \vec{x}). \quad (7.7)$$

Zu beliebigen Zeiten t stehen das freie

$$\varphi_0(t, \vec{x}) = e^{iH_0 t} \varphi_0(0, \vec{x}) e^{-iH_0 t}$$

und das wechselwirkende Feld

$$\varphi(t, \vec{x}) = e^{iHt} \varphi(0, \vec{x}) e^{-iHt}$$

zueinander gemäss

$$\varphi(t, \vec{x}) = U(0, t) \varphi_0(t, \vec{x}) U(t, 0),$$

wobei

$$H_W(t) = \int d^3x : \mathcal{H}_W(\varphi_0(t, \vec{x})) : .$$

Wir erhalten so aus (7.6) die **Gell-Mann–Low Formel**

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &= \langle \Omega | T(\varphi(t_1, \vec{x}_1) \dots \varphi(t_n, \vec{x}_n)) | \Omega \rangle \\ &= \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s \rightarrow -\infty}} \frac{\langle 0 | U(t, t_{i_1}) \varphi_0(t_{i_1}, \vec{x}_{i_1}) U(t_{i_1}, t_{i_2}) \dots U(t_{i_{n-1}}, t_{i_n}) \varphi_0(t_{i_n}, \vec{x}_{i_n}) U(t_{i_n}, s) | 0 \rangle}{\langle 0 | U(t, s) | 0 \rangle} \\ &= \frac{\langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_W(t))] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt H_W(t)) | 0 \rangle} \\ &= \frac{\langle 0 | T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) \exp(-i \int d^4y : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y)) :)] | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp(-i \int d^4y : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y)) :) | 0 \rangle}. \quad (7.8) \end{aligned}$$

Bemerkung: Durch Einführung der **erzeugenden Funktion** der Greensfunktionen

$$\begin{aligned} Z[j] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n j(x_1) \dots j(x_n) G(x_1, \dots, x_n) \\ &= \langle \Omega | T \exp \left(i \int d^4x j(x) \varphi(x) \right) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (7.9)$$

d.h.

$$G(x_1, \dots, x_n) = i^{-n} \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta j(x_n)} Z[j] \Big|_{j=0},$$

kann man (7.8) für alle n zusammenfassen zu

$$Z[j] = \frac{\langle 0 | T \exp \left(i \int d^4x (j(x) \varphi_0(x) - : \mathcal{H}_W(\varphi_0(x)) :) \right) | 0 \rangle}{\langle 0 | T \exp \left(-i \int d^4x : \mathcal{H}_W(\varphi_0(x)) : \right) | 0 \rangle}.$$

Gleichung (7.8) bildet die Grundlage der kovarianten Störungsrechnung: Sie drückt G durch Erwartungswerte freier Felder aus und dies auf manifest Lorentz kovariante Weise, da $\mathcal{H}_W = -\mathcal{L}_W$ ein Lorentz-Skalar ist. Die Entwicklung des Zählers in (7.8) nach Potenzen von \mathcal{H}_W ist

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4y_1 \dots d^4y_p \langle 0 | T [\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_1)) : \dots : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_p)) :] | 0 \rangle \quad (7.10)$$

mit Termen, die nach dem Wickschen Lemma (5.25) berechnet werden können (s. nächster Abschnitt).

In einer weniger heuristischen Behandlung erweist sich die Annahme (7.4) als unzutreffend:

$$\langle \Omega | 0 \rangle = 0.$$

Dafür gibt es zweierlei Gründe:

- 1) Divergenzen aus **unendlichem Volumen**: In der Entwicklung des Nenners (7.8), d.h. (7.10) mit $n = 0$, verschwindet der Term $p = 1$, da $\langle 0 | : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y)) : | 0 \rangle = 0$; der Term $p = 2$ ist divergent

$$\int d^4y_1 d^4y_2 \langle 0 | T : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_1)) : : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_2)) : | 0 \rangle \equiv \int d^4y_1 d^4y_2 f(y_1 - y_2) = \infty. \quad (7.11)$$

Dies liegt daran, dass (7.7) nicht haltbar ist, wie wir nun zeigen. Die freien Felder $\varphi_0(0, \vec{x})$ bilden eine irreduzible Darstellung (auf dem Fockraum (5.44)) der kanonischen Vertauschungsrelationen (5.33, 5.34). Die Translationen $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ wirken gemäss

$$U(\vec{a}) \varphi_0(0, \vec{x}) U(\vec{a})^* = \varphi_0(0, \vec{x} + \vec{a}), \quad U(\vec{a}) \pi_0(0, \vec{x}) U(\vec{a})^* = \pi_0(0, \vec{x} + \vec{a}), \quad (7.12)$$

sodass $\varphi_0(0, \vec{x} + \vec{a})$, $\pi_0(0, \vec{x} + \vec{a})$ auch eine solche Darstellung liefern. Wegen der Irreduzibilität und des Schurschen Lemmas ist $U(\vec{a})$ durch (7.12) eindeutig bestimmt. Insbesondere ist $U(\vec{a})$ wegen (7.7) auch die Translation für $\varphi(0, \vec{x})$ gemäss (6.5). Da der invariante Zustand für $U(\vec{a})$ eindeutig ist, folgt (bis auf die Phase)

$$|\Omega\rangle = |0\rangle,$$

was z.B. für (7.1) offensichtlich nicht zutrifft. Falls $\varphi(0, \vec{x})$, $\pi(0, \vec{x})$ eine Darstellung von (5.33, 5.34) ist und $|\Omega\rangle$ translationsinvariant, so ist sie zu $\varphi_0(0, \vec{x})$, $\pi_0(0, \vec{x})$ inäquivalent („Haagsches Theorem“): $\langle \Omega|0\rangle = 0$. Dies kann behoben werden durch die Ersetzung

$$H_W = \int d^3x f(\vec{x}) : \mathcal{H}_W(\varphi_0(0, \vec{x})) : \quad (7.13)$$

mit z.B. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Da $|\Omega\rangle$ nun nicht translationsinvariant ist, ist (7.4) möglich. Gleichung (7.2) gilt nun mit $E \neq 0$.

2) Ultraviolett–Divergenzen. Sei $s + 1$ (statt 4) die Dimension der Raum–Zeit. Nur in $1 + 1$ Dimensionen ist (7.13) ein wohldefinierter Operator: So ist

$$\int d^3x f(\vec{x}) : \varphi(0, \vec{x})^n : |0\rangle = (2\pi)^{-\frac{sn}{2}} \hat{f}\left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i\right) \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^s p_i}{2p_i^0} a^*(p_i)\right) |0\rangle$$

mit Normquadrat

$$\sim \int \prod_{i=1}^n \frac{d^s p_i}{2p_i^0} \left| \hat{f}\left(\sum_{i=1}^n \vec{p}_i\right) \right|^2 \sim \int \frac{d^{(n-1)s} p}{|p|^n},$$

was nur für $(n - 1)s < n$, d.h. für $s = 1$ endlich ist. Für $s \geq 2$ wird dies endlich erst nach Glättung des Feldes (Ultraviolett–Cutoff)

$$\tilde{\varphi}(0, \vec{x}) = \int d^3y g(\vec{x} - \vec{y}) \varphi(0, \vec{x}).$$

Erst im Anschluss an (7.8), so modifiziert, sind die Grenzwerte

- i) $f(\vec{x}) \longrightarrow 1$ (unendliches Wechselwirkungsvolumen)
- ii) $g(\vec{x}) \longrightarrow \delta^{(3)}(\vec{x})$ (ultraviolett Limes)

zu nehmen; i) wird einfach sein, s. S. 95, ii) wird erst nach **Renormierung** der Wechselwirkung und des Feldes möglich sein.

7.2 Feynman–Diagramme für die φ^4 –Theorie

Die Störung sei die des Beispiels (7.1). Der Term p -ter Ordnung in (7.10) ist

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{-i\lambda}{4!}\right)^p \int d^4y_1 \dots d^4y_p \langle 0|T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) : \varphi_0^4(y_1) : \dots : \varphi_0^4(y_p) :] |0\rangle. \quad (7.14)$$

Die Paarungen, die das Wicksche Lemma (5.25) dafür liefert, können graphisch dargestellt werden: Ausgehend von

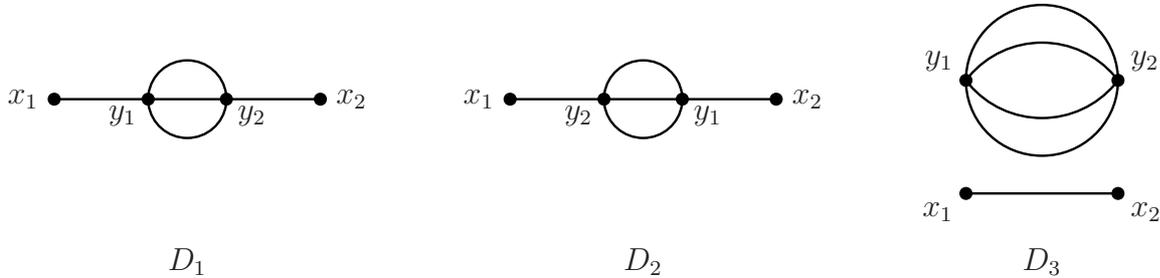
$$\begin{array}{ll} \varphi_0(x_i) & \longrightarrow \text{---}\bullet\text{---} \quad \text{“äusserer Vertex”} \\ \varphi_0^4(y_i) & \longrightarrow \begin{array}{c} \diagup \bullet \diagdown \\ \diagdown \bullet \diagup \end{array} \quad \text{“innerer Vertex” (Ordnung 4)} \end{array} \quad (7.15)$$

entspricht einer Kontraktion eine nicht orientierte Linie

$$\langle 0|T\varphi_0(z_i)\varphi_0(z_j)|0\rangle \longrightarrow z_i \bullet \text{---} \bullet z_j \quad \text{“Propagatorlinie”}$$

Eine Paarung, d.h. ein Kontraktionsschema, liefert somit einen Graphen (**Feynman-Diagramm**), bei welchem alle Valenzen der Vertizes durch Linien verbunden werden; keine Linie darf dabei einen Vertex mit sich selbst verbinden.

Beispiel: $n = 2, p = 2$. Die möglichen Diagramme sind



Den Ausdruck (7.14) berechnet man durch folgende **Feynman-Regeln** 1-6 (Ortsraumregeln).

1. Man zeichne alle (topologisch) verschiedenen Diagramme mit nummerierten äusseren Vertizes x_1, \dots, x_n und inneren Vertizes y_1, \dots, y_p .
2. Jeder innere Vertex liefert einen Faktor $-i\lambda$.
3. Jede Linie zwischen z_i und z_j gibt einen Faktor

$$\langle 0|T\varphi_0(z_i)\varphi_0(z_j)|0\rangle = i\Delta_F(z_i - z_j).$$

4. Integriere über die inneren Vertizes, $\int d^4y_1 \dots d^4y_p$.

Die Valenzen eines Vertex y_j , d.h. die Faktoren in $\varphi_0(y_j)^4 = \varphi_0(y_j)\varphi_0(y_j)\varphi_0(y_j)\varphi_0(y_j)$, wurden nicht nummeriert, wie eigentlich erforderlich, sodass ein Diagramm für mehrere, m , Paarungen stehen kann. Die Linien von y_j können auf $4!$ Weisen permutiert werden, ohne das Diagramm zu ändern. (Deshalb steht λ statt $\lambda/4!$ in Regel 2). Nicht alle Permutationen liefern aber verschiedene Paarungen: Wenn zwei Linien von y_j zum selben Vertex y_i führen, so werden die Faktoren $1/4!$ der beiden Vertizes nur teilweise kompensiert. Das Gewicht eines Diagramms ist also

$$\left(\frac{1}{4!}\right)^p \cdot m = \frac{1}{S}, \tag{7.16}$$

wobei der **Symmetriefaktor** S die Ordnung der Gruppe der Permutationen der (inneren) Linien ist, die das Diagramm nicht ändern. **Beispiel:** Für D_1 ist

$$\left(\frac{1}{4!}\right)^2 m = \left(\frac{1}{4!}\right)^2 \cdot \underbrace{4}_{x_1 \leftrightarrow y_1} \cdot \underbrace{4}_{x_2 \leftrightarrow y_2} \cdot \underbrace{3!}_{y_1 \leftrightarrow y_2} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{S}.$$

Für D_3 ist $m = 4!$ und $S = 4!$.

5. Dividiere durch S und durch $p!$.

6. Summiere über alle Diagramme.

Bemerkungen:

1. Es gibt keine Diagramme mit n ungerade, also $G(x_1, \dots, x_{2l+1}) = 0$.
2. Nach Integration gemäss Regel 4 liefern Diagramme mit vertauschten inneren Vertizes y_1, \dots, y_p denselben Beitrag (Beispiel D_1, D_2). Nicht alle $p!$ Permutationen liefern aber verschiedene Diagramme (Beispiel D_3). Man könnte also den Begriff verschiedener Diagramme in Regel 1 abändern:
 - 1'. Nur die äusseren Vertizes sind durch Nummern unterscheidbar; die der inneren dienen bloss für die Regeln 3 und 4.

Das Gewicht eines solchen Diagramms (inklusive $1/p!$ aus Regel 5) ist

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{1}{4!} \right)^p m_1 m_2 = \frac{1}{S \cdot S'} \quad (7.17)$$

Hier ist m_1 die Anzahl Möglichkeiten, die äusseren Vertizes mit beliebigen zu verbinden, und m_2 die (anschliessende) Anzahl Möglichkeiten, die inneren unter sich; der Symmetriefaktor S' ist die Ordnung der Gruppe der Permutationen der (inneren) Vertizes, die im Sinne von Regel 1 das Diagramm nicht ändern. **Beispiel:** $D_1 \equiv D_2$: $m_1 = 8 \cdot 4$, $m_2 = 3!$, $S' = 1$; D_3 : $m_1 = 1$, $m_2 = 4!$, $S' = 2$. So ist Regel 5 zu ersetzen:

5'. Dividiere durch $S \cdot S'$.

Der Nenner in (7.8) hat eine Entwicklung nach Diagrammen mit $n = 0$, d.h. solche ohne äussere Linien (\equiv Linien zu einem äusseren Vertex). Man nennt sie **Vakuumbigramme**, denn der Nenner ist gleich $|\langle \Omega | 0 \rangle|^2$, vgl. (7.5). (Dabei entspricht $p = 0$ dem leeren Diagramm, mit Beitrag 1). Wir untersuchen ihre Rolle im Fall einer allgemeinen Störung : $\mathcal{H}_W(\varphi(x))$:

Die Diagramme des Zählers (7.14) sind von zwei Sorten: Diejenigen, die Vakuumbigramme als Zusammenhangskomponenten enthalten (z.B. D_3), und die (**verkettete Diagramme**), die keine enthalten (z.B. D_1, D_2). Alle Diagramme mit p inneren Vertizes y_1, \dots, y_p bekommt man durch Wahl von

- (i) k Vertizes unter ihnen ($k = 0, \dots, p$): $\binom{p}{k}$ Möglichkeiten;
- (ii) eines beliebigen verketteten Diagramms mit diesen Vertizes und eines Vakuumbigramms mit den restlichen $p - k$. Dabei sind Beiträge der beiden Diagramme multiplikativ.

Der Zähler in (7.8) ist somit

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_p \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \langle 0 | T [\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_1)) : \dots : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_k)) :] | 0 \rangle_0 \cdot \langle 0 | T [: \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_{k+1})) : \dots : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_p)) :] | 0 \rangle, \quad (7.18)$$

wo $\langle 0|T[\dots]|0\rangle_0$ dadurch definiert ist, dass bei der Berechnung von $\langle 0|T[\dots]|0\rangle$ nur die Beiträge der verketteten Diagramme behalten werden. Nun benützen wir

$$\frac{1}{p!} \binom{p}{k} = \frac{1}{k!(p-k)!} \quad \text{und} \quad \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{k=0}^p = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \quad \text{mit } j = p - k.$$

In (7.18) faktorisieren dann die beiden Summen und die über j entspricht dem Nenner. Also

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i)^k}{k!} \int d^4 y_1 \dots d^4 y_k \langle 0|T[\varphi_0(x_1) \dots \varphi_0(x_n) : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_1)) : \dots : \mathcal{H}_W(\varphi_0(y_k))] |0\rangle_0. \quad (7.19)$$

Bemerkungen:

1. Wir hätten eigentlich $f(\vec{y}_i)$ aus (7.13) mitschleppen müssen. Der Limes $f \rightarrow 1$, der für Vakuumbdiagramme gefährlich ist, s. (7.11), kann nun nach ihrer Elimination vollzogen werden, mit (7.19) als Resultat. Das Integral ist bei $y_i \rightarrow \infty$ konvergent wegen des Abfalls von $i\Delta_F(y_i - x_j)$ und der Verkettung.
2. Wir definieren **zusammenhängende** (oder trunkierte) **Greensfunktionen** $G_c(x_1, \dots, x_n)$: Sei \mathcal{P} eine Partition von $I = \{1, \dots, m\}$, d.h. $\mathcal{P} = \{I_1, \dots, I_m\}$ eine Zerlegung $I = \bigcup_{\alpha=1}^m I_\alpha$ in nicht leere disjunkte Teilmengen ($\mathcal{P} = \{I\}$ ist die triviale Partition). Durch

$$G(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mathcal{P}=\{I_\alpha\}} \prod_{\alpha} G_c(\{x_i\}_{i \in I_\alpha}) \quad (7.20)$$

ist $G_c(x_1, \dots, x_n)$ rekursiv definiert:

$$G_c(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_n) - \sum_{\substack{\mathcal{P}=\{I_\alpha\} \\ \#\mathcal{P} \geq 2}} \prod_{\alpha} G_c(\{x_i\}_{i \in I_\alpha}). \quad (7.21)$$

Durch eine zu (i, ii) auf S. 94 ähnliche Überlegung (Zerlegen eines Diagramms nach Zusammenhangskomponenten) folgt aus (7.21), dass $G_c(x_1, \dots, x_n)$ durch Summe (vgl. Regel 6) über alle **zusammenhängende Diagramme** gegeben ist.

Für die erzeugende Funktion (7.9) bedeutet (7.20), dass

$$Z[j] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_k j(x_1) \dots j(x_k) G_c(x_1, \dots, x_k) \right)^m =: e^{Z_c[j]}, \quad (7.22)$$

wobei der Faktor $1/m!$ berücksichtigt, dass Permutationen der m Teilmengen einer Partition keine neue liefert. Anders gesagt: $Z_c[j] = \log Z[j]$ ist die erzeugende Funktion der zusammenhängenden Greensfunktionen (Kettengraphentheorem, linked cluster theorem).

Für die Bedürfnisse der Streutheorie, s. (6.22), ist es besser, die Fouriertransformierte (6.21)

$$G(p_1, \dots, p_n) = \int d^4x_1 \dots d^4x_n e^{-i\sum_{i=1}^n p_i \cdot x_i} G(x_1, \dots, x_n) \quad (7.23)$$

der Greensfunktion diagrammatisch darzustellen. Dazu setzen wir rechts die Entwicklung (7.19) ein und schreiben (5.54), d.h.

$$i\Delta_F(z_i - z_j) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} e^{-ik(z_i - z_j)} \quad (7.24)$$

für jede Propagatorlinie der auftretenden Diagramme. Danach können die Integrationen über i) x_1, \dots, x_n in (7.23) und ii) y_1, \dots, y_k in (7.19) ausgeführt werden:

- i) Die äussere Linie des Vertex x_i verbindet diesen entweder mit einem inneren Vertex y_j oder mit einem anderen äusseren Vertex x_j (kurzgeschlossene Linie). Im ersten Fall liefert der x_i -abhängige Teil der Integration

$$\int d^4x_i e^{-ip_i x_i} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} e^{-ik(x_i - y_j)} = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i0} e^{-ip_i y_j}, \quad (7.25)$$

im zweiten liefert die Integration über x_i und x_j

$$\begin{aligned} \int d^4x_i d^4x_j e^{-ip_i x_i} e^{-ip_j x_j} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i0} e^{-ik(x_i - x_j)} \\ = \frac{i}{p_i^2 - m^2 + i0} \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_j). \end{aligned}$$

- ii) Jede der 4 Linien von y_i bringt über (7.24) eine y_i -Abhängigkeit der Form $e^{-i\sigma_l k_l y_i}$ ($\sigma_l = \pm 1$, $l = 1, \dots, 4$). Dabei ist $\sigma_l = +1$ für äussere Linien, s. (7.25), und sonst von der (unwesentlichen) Wahl einer Orientierung der Linie abhängig. Die y_i -Integration ergibt

$$\int d^4y_i e^{-i\sum_{l=1}^4 \sigma_l k_l \cdot y_i} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{l=1}^4 \sigma_l k_l\right).$$

Man erhält so für (7.23) die Feynman-Regeln (Impulsraumregeln):

1. Man zeichne alle (topologisch) verschiedenen verketteten Diagramme mit n nummerierten äusseren Vertizes mit Impulsen p_1, \dots, p_n . Die inneren Linien werden bloss nummeriert und orientiert (Impulse k_1, \dots, k_m) für die folgenden Regeln.
2. Die i -te äussere Linie liefert einen Faktor $i(p_i^2 - m^2 + i0)^{-1}$, (ausser sie ist kurzgeschlossen; dann $i(p_i^2 - m^2 + i0)^{-1} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i + p_j)$).
3. Die l -te innere Linie $i(k_l^2 - m^2 + i0)^{-1}$.
4. Jeder Vertex $-i\lambda \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_l \sigma_l k_l)$, wobei die Summe über seine Linien läuft.
5. Integriere über die inneren Impulse: $\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4} \dots \frac{d^4k_m}{(2\pi)^4}$.

6. Dividiere durch $S \cdot S'$.

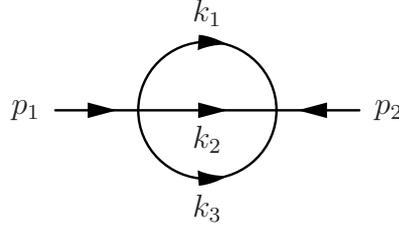
7. Summiere über alle Diagramme.

Allgemein kann dem Argument einer δ -Funktion aus Regel 4 eine beliebige Linearkombination der restlichen hinzugefügt werden, ohne das Resultat zu ändern. Summiert man alle Argumente, so kann insbesondere ein Faktor

$$(2\pi)^4 \delta\left(\sum_{i=1}^n p_i\right) \quad (7.26)$$

abgespaltert werden, vgl. (6.23).

Beispiel: $D_1 = D_2$. Der Beitrag ist



$$\begin{aligned} & \frac{1}{S \cdot S'} (-i\lambda)^2 \left(\prod_{i=1}^2 \frac{i}{p_i^2 - m^2 - i0} \right) \cdot \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_3}{(2\pi)^4} \left(\prod_{l=1}^3 \frac{i}{k_l^2 - m^2 + i0} \right) \cdot \\ & \quad \cdot (2\pi)^8 \delta^{(4)}(p_1 - k_1 - k_2 - k_3) \delta^{(4)}(p_2 + k_1 + k_2 + k_3) = \\ & \quad = \frac{1}{3!} (-i\lambda)^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2) \cdot \left(\frac{i}{p_1^2 - m^2 + i0} \right)^2 \cdot \\ & \quad \cdot \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k_2}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_1^2 - m^2 + i0} \frac{i}{k_2^2 - m^2 + i0} \frac{i}{(p_1 - k_1 - k_2)^2 - m^2 + i0} \end{aligned}$$

(Das Integral ist bei $k_1, k_2 \rightarrow \infty$ divergent).

Die Entwicklung der Streuamplitude

$$\text{out} \langle p_1, \dots, p_k | q_1, \dots, q_n \rangle_{\text{in}} \quad (7.27)$$

bekommt man nach (6.22) aus der für $G(-p_1, \dots, -p_k, q_1, \dots, q_n)$, wobei die Faktoren $p_i^2 - m^2, q_j^2 - m^2$ die äusseren Linien im wesentlichen kompensieren (amputierte Diagramme). Regel 2 ist abzuändern in

2'. Jede äussere Linie liefert einen Faktor $(2\pi)^{-3/2} Z^{-1/2}$.

Die äusseren Impulse liegen auf der Massenschale. Deshalb tragen Diagramme mit kurzgeschlossenen Linien nicht bei.

7.3 Feynman-Diagramme für die QED

Die Lagrange-Dichte (6.1) der QED kann zerlegt werden in einen freien Teil

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial^\mu A^\nu) + \bar{\Psi} \gamma^\mu \cdot i \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi$$

(mit $\partial_\mu A^\mu = 0$) und eine Wechselwirkung

$$\mathcal{L}_W = -e \bar{\Psi} \gamma^\mu A_\mu \Psi.$$

Die Störung des freien Hamiltonoperators (d.h. der Summe von (5.82) ($\nu = 0$) und (5.99)) von der Form

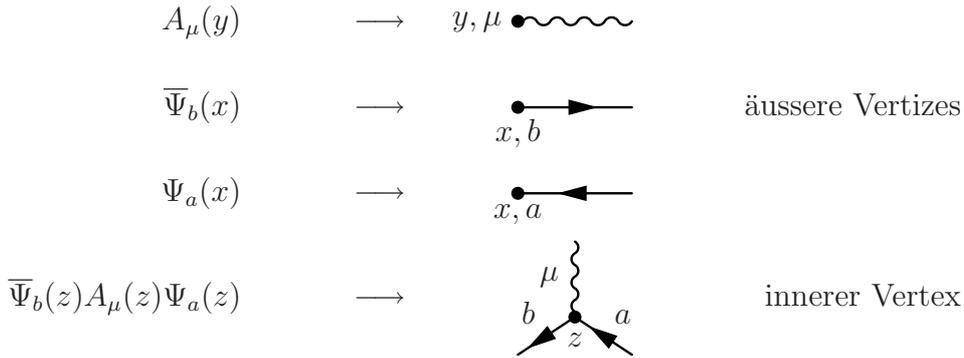
$$H_W = e \int_{x^0=0} d^3x : \bar{\Psi}(x) A_\mu(x) \gamma^\mu \Psi(x) :,$$

wobei wir die Störung, wie bereits den freien Teil, normalgeordnet haben. Die Greensfunktionen sind

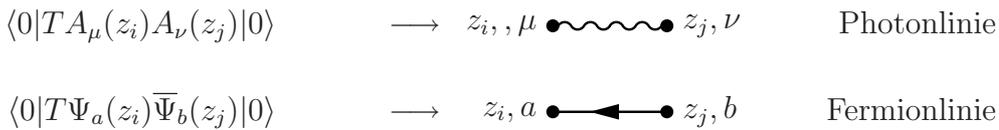
$$G(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}; y_1, \dots, y_p) = \langle \Omega | T [\Psi_{a_1}(x_1) \dots \Psi_{a_n}(x_n) \bar{\Psi}_{b_1}(x_{n+1}) \dots \bar{\Psi}_{b_n}(x_{2n}) A_{\mu_1}(y_1) \dots A_{\mu_p}(y_p)] | \Omega \rangle, \quad (7.28)$$

wobei wir links die Komponenten $a, b = 1, \dots, 4$ von $\Psi(x_i), \bar{\Psi}(x_{n+j})$ und $\mu = 0, \dots, 3$ von $A(y_r)$ unterdrückt haben, man fasse sie auf als in x_1, \dots, y_p inbegriffen. (Nur Greensfunktionen mit Ψ 's und $\bar{\Psi}$'s in gleicher Anzahl verschwinden nicht, vgl. S. 84.)

Für (7.28) gilt eine zu (7.19) ähnliche Entwicklung, wobei wir den Index 0 für freie Felder nun weglassen. Die Diagramme setzen sich zusammen aus



kontrahiert durch



Kontraktionen $\Psi\Psi$ und $\bar{\Psi}\bar{\Psi}$ verschwinden, s. S. 69, (ebenso $\Psi A, \bar{\Psi} A$), was bedeutet, dass nur Fermionlinien vorkommen, die mit der Orientierung der Valenzen kompatibel sind. Das Wick'sche Lemma für Fermionen liefert für jede Paarung ein Vorzeichen, das sich wie folgt aus dem entsprechenden Diagramm bestimmt. Fermionlinien folgen aufeinander mit gleicher Orientierung. Dabei bilden sie entweder (i) eine Schleife (der Länge l), oder (ii) eine offene Linie, die einen einlaufenden Vertex $\bar{\Psi}(x_{n+j})$ über Vertizes z_1, \dots, z_l schliesslich mit einem auslaufenden Vertex $\Psi(x_i)$ verbindet.

(i) Man kann Paare $\bar{\Psi}(z_j)\Psi(z_j)$ untereinander vertauschen (gerade Permutation), sodass die Kontraktionen $\Psi\bar{\Psi}$ längs der Schleife nach dem Schema

$$\underbrace{\bar{\Psi}(z_l)\Psi(z_l)\bar{\Psi}(z_{l-1})\Psi(z_{l-1}) \dots \bar{\Psi}(z_2)\Psi(z_2)\bar{\Psi}(z_1)\Psi(z_1)}_{\text{Schleife}}$$

erfolgt: die Permutation dafür hat $\text{sgn } \sigma = -1$, da $\Psi(z_1)$ an $2l + 1$ weiteren Ψ 's oder $\bar{\Psi}$'s vorbei nach vorne geschoben wird.

(ii) Sei $j = \sigma(i)$ die durch alle offenen Linien definierte Permutation $\sigma \in S_n$. Das gesuchte Vorzeichen ist die Parität $(-1)^{n(n-1)/2} \text{sgn } \sigma$ der Permutation aus S_{2n}

$$(1, \dots, 2n) \mapsto (1, n + \sigma(1), 2, n + \sigma(2), \dots, n, n + \sigma(n)) \quad (7.29)$$

Sind nämlich die äusseren Fermionvertizes in (7.28) so umgeordnet, dann erfolgt die Paarung in der offenen Linie

$$\underbrace{\Psi(x_i) \bar{\Psi}(x_{n+\sigma(i)}) \bar{\Psi}(z_l) \Psi(z_l) \dots \bar{\Psi}(z_2) \Psi(z_2) \bar{\Psi}(z_1) \Psi(z_1)}_{\text{gerade Permutation}}$$

über eine gerade Permutation.

Die Symmetriefaktoren sind $S = 1$, da alle Valenzen eines Vertex verschieden sind. Für verkettete Diagramme ist auch $S' = 1$, denn jeder innerer Vertex hat über seine Verbindungen zu den äusseren eine nicht vertauschbare Rolle.

Die **Feynman-Regeln** für die analog zu (7.23) definierte Fouriertransformierte

$$G(p_1, \dots, p_n; p_{n+1}, \dots, p_{2n}; q_1, \dots, q_p) \quad (7.30)$$

von (7.28) (mit a_i, b_i, μ_i inbegriffen) lauten

1. Man zeichne alle (topologisch) verschiedenen verketteten Diagramme mit nummerierten n auslaufenden und n einlaufenden Fermionlinien (Impulse p_1, \dots, p_n , bzw. p_{n+1}, \dots, p_{2n}), sowie p Photonlinien (q_1, \dots, q_p). Impulse sind stets einlaufend gezählt.

2. Faktoren sind gegeben durch

$$\mu \text{ --- } \overset{k}{\text{wavy}} \text{ --- } \nu \quad \longrightarrow \quad \frac{-i}{k^2 + i0} g_{\mu\nu} \quad \text{s. (5.121, 5.54)} \quad (7.31)$$

$$a \text{ --- } \overset{k}{\text{arrow}} \text{ --- } b \quad \longrightarrow \quad \frac{i(\not{k} + m)_{ab}}{k^2 - m^2 + i0} \quad \text{s. (5.91, 5.92)}$$

$$\begin{array}{c} b^\mu \\ \swarrow \\ \text{---} \\ \searrow \\ a \end{array} \quad \longrightarrow \quad -ie(\gamma^\mu)_{ba} \cdot (2\pi)^4 \delta(q) \quad \left(\text{inklusive } \sum_{a,b,\mu} \right) \quad (7.32)$$

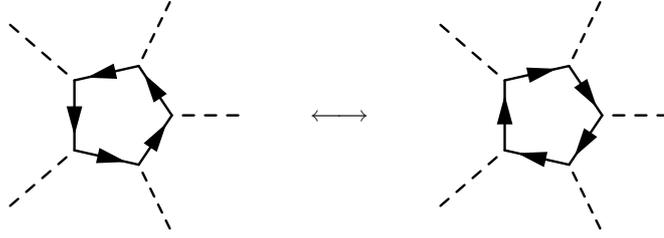
wo q die Summe der im Vertex einlaufenden Impulse ist.

3. Integriere über alle inneren Impulse: $\int \prod_l \frac{d^4 k_l}{(2\pi)^4}$.

4. Multipliziere mit -1 für jede Fermionschleife und mit der Parität von (7.29).

5. Summiere über alle Diagramme.

Bemerkung: (Furry Lemma, ohne Beweis). Zwei Diagramme, die sich bloss in der Ordnung einer Fermion-Schleife **ungerader Länge** unterscheiden (sie sind topologisch verschieden), haben entgegengesetzt gleiche Beiträge. Also kann Regel 5 modifiziert werden: „... unter Auslassung solcher Diagramme.“



Streuamplituden bekommt man durch Amputation der äusseren Linien, s. (7.27). Deren Beiträge, s. Regel 2, sind dann zu ersetzen durch (s. (6.31, 6.29, 6.30))

2'.

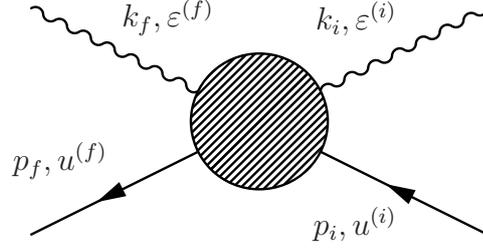
$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &\longrightarrow \frac{-i}{k^2 + i0} g_{\mu\nu} \cdot \frac{(-iZ_3^{-1/2})}{(2\pi)^{3/2}} (-k^2) \varepsilon^\nu = (2\pi)^{-3/2} Z_3^{-1/2} \varepsilon_\mu \\
 \text{Diagram 2} &\longrightarrow \frac{i(\not{q} + m)_{ab}}{q^2 - m^2 + i0} \cdot \frac{(-iZ_2^{-1/2})}{(2\pi)^{3/2}} ((\not{q} - m)u)_b = (2\pi)^{-3/2} Z_2^{-1/2} u_a \\
 \text{Diagram 3} &\longrightarrow - (2\pi)^{-3/2} Z_2^{-1/2} \bar{v}_a \\
 \text{Diagram 4} &\longrightarrow (2\pi)^{-3/2} Z_2^{-1/2} \bar{u}_a \\
 \text{Diagram 5} &\longrightarrow - (2\pi)^{-3/2} Z_2^{-1/2} v_a
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

für in-Fermionen (Impuls q), bzw. out (p).

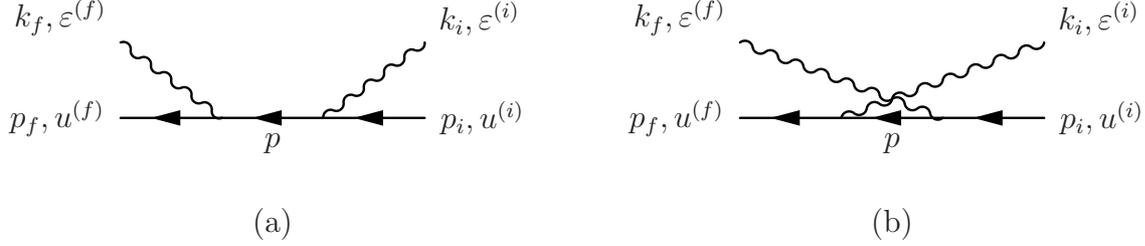
Beim **reduzierten Matrixelement** $iT(p_1, \dots, p_k; q_1, \dots, q_n)$ in (6.33) entfallen alle Faktoren $(2\pi)^{-3/2}$, sowie ein Faktor $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_{i=1}^k p_i - \sum_{j=1}^n q_j)$, s. (7.26).

7.4 Compton-Streuung

Das reduzierte Matrixelement für die Compton-Streuung, s. S. 84, ist durch die Summe aller verketteten Diagramme der folgenden Form gegeben:



Wir berechnen nur die niedrigste Ordnung in e . Dies sind die **Baumdiagramme** (Diagramme ohne Schleifen jeglicher Art), die proportional zu $Z_2^{-1}Z_3^{-1}e^2$ sind.



Diese Näherung soll auch für Z_2, Z_3 gelten, d.h. wir ersetzen sie durch ihren Wert $Z_2 = Z_3 = 1$ für $e = 0$. Die Integration über p liefert bloss (a) $p = p_i + k_i$, (b) $p = p_i - k_f$; z.B. liefert der linke Vertex in (a) $(-ie)\bar{u}_b^{(f)}(\gamma^\mu)_{ba}\varepsilon_\mu^{(f)} = (-ie)(\bar{u}^{(f)}\not{\varepsilon}^{(f)})_a$. Also ist

$$iT(p_f, k_f; p_i, k_i) = i(-ie)^2\bar{u}^{(f)}\left(\not{\varepsilon}^{(f)}\frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{2p_i \cdot k_i}\not{\varepsilon}^{(i)} + \not{\varepsilon}^{(i)}\frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{-2p_i \cdot k_f}\not{\varepsilon}^{(f)}\right)u^{(i)}, \quad (7.34)$$

wobei wir Nenner der Fermionlinie ausgewertet haben, z.B. für (a): $(p_i + k_i)^2 - m^2 = 2p_i \cdot k_i$ wegen $p_i^2 = m^2, k_i^2 = 0$. Da dies > 0 ist, kann $+i0$ weggelassen werden. Die Beiträge von (a) und (b) gehen auseinander hervor durch

$$(k_i, \varepsilon^{(i)}) \longleftrightarrow (-k_f, \varepsilon^{(f)}); \quad (7.35)$$

was die crossing-Symmetrie, s. Bemerkung 3 auf S. 82 und (6.31), von T zum Ausdruck bringt: $(k_f, \varepsilon^{(f)}; k_i, \varepsilon^{(i)}) \sim (\emptyset; k_i, \varepsilon^{(i)}, -k_f, \varepsilon^{(f)}) \sim (-k_i, \varepsilon^{(i)}; -k_f, \varepsilon^{(f)})$.

In Abschnitt 2.5 wurde der Limes $|\vec{k}_i|/m \rightarrow 0$ (Thomson-Streuung) bereits diskutiert. Wie dort, berechnen wir den Streuquerschnitt ohne Beobachtung von p_f , vgl. (6.41); ebenso für den Spin $u^{(f)}$; das in-Elektron sei unpolarisiert. Also ist dort statt $|T|^2$ einzusetzen, s. (2.56),

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 \equiv \frac{1}{2} e^4 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |\bar{u}^{(\beta)}(p_f) M u^{(\alpha)}(p_i)|^2 = \frac{1}{2} e^4 \sum_{\alpha, \beta=1}^2 (\bar{u}^{(\beta)}(p_f) M u^{(\alpha)}(p_i)) (\bar{u}^{(\alpha)}(p_i) \bar{M} u^{(\beta)}(p_f))$$

mit

$$M = \not{\varepsilon}^{(f)} \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{2p_i \cdot k_i} \not{\varepsilon}^{(i)} + \not{\varepsilon}^{(i)} \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{-2p_i \cdot k_f} \not{\varepsilon}^{(f)},$$

$$\bar{M} = \gamma^0 M^* \gamma^0 = \not{\varepsilon}^{(i)} \frac{\not{p}_i + \not{k}_i + m}{2p_i \cdot k_i} \not{\varepsilon}^{(f)} + \not{\varepsilon}^{(f)} \frac{\not{p}_i - \not{k}_f + m}{-2p_i \cdot k_f} \not{\varepsilon}^{(i)}$$

(wegen $\gamma^0 \gamma^{\mu*} \gamma^0 = \gamma^\mu$). Mit (5.75) ist dies

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 = \frac{1}{2} e^4 \operatorname{tr}((\not{p}_f + m) M (\not{p}_i + m) \overline{M}).$$

Diese (bis zu 8 γ -Matrizen umfassende) Spur ist zwar Lorentz-invariant, aber die Berechnung vereinfacht sich (ein bisschen) im Laborsystem $p_i = (m, \vec{0})$. Deswegen gilt nebst den allgemeinen Beziehungen

$$\varepsilon^{(i)2} = \varepsilon^{(f)2} = -1, \quad \varepsilon^{(i)} \cdot k_i = 0 = \varepsilon^{(f)} \cdot k_f$$

(Transversalität) auch

$$\varepsilon^{(i)} \cdot p_i = 0 = \varepsilon^{(f)} \cdot p_i.$$

Wegen $\{\not{a}, \not{b}\} = 2a \cdot b$ gibt dies die Umformung

$$\begin{aligned} M &= \not{\varepsilon}^{(f)} \not{\varepsilon}^{(i)} \frac{(\not{p}_i + \not{k}_i - m)}{-2p_i \cdot k_i} + \not{\varepsilon}^{(i)} \not{\varepsilon}^{(f)} \frac{(\not{p}_i - \not{k}_f - m)}{2p_i \cdot k_f}, \\ \overline{M} &= \frac{(\not{p}_i + \not{k}_i - m)}{-2p_i \cdot k_i} \not{\varepsilon}^{(i)} \not{\varepsilon}^{(f)} + \frac{(\not{p}_i - \not{k}_f - m)}{2p_i \cdot k_f} \not{\varepsilon}^{(f)} \not{\varepsilon}^{(i)} \end{aligned}$$

und, zusammen mit $(\not{p}_i \mp m)(\not{p}_i \pm m) = p_i^2 - m^2 = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 &= \frac{e^4}{8} \operatorname{tr} \left[(\not{p}_f + m) \left(\frac{\not{\varepsilon}^{(f)} \not{\varepsilon}^{(i)} \not{k}_i}{p_i \cdot k_i} + \frac{\not{\varepsilon}^{(i)} \not{\varepsilon}^{(f)} \not{k}_f}{p_i \cdot k_f} \right) (\not{p}_i + m) \left(\frac{\not{k}_i \not{\varepsilon}^{(f)} \not{\varepsilon}^{(i)}}{p_i \cdot k_i} + \frac{\not{k}_f \not{\varepsilon}^{(i)} \not{\varepsilon}^{(f)}}{p_i \cdot k_f} \right) \right] \\ &\equiv \frac{e^4}{8} \left(\frac{S_{aa}}{(p_i \cdot k_i)^2} + \frac{S_{bb}}{(p_i \cdot k_f)^2} + \frac{S_{ab} + S_{ba}}{(p_i \cdot k_i)(p_i \cdot k_f)} \right). \end{aligned}$$

Die weitere Rechnung ist eine Anwendung (an den unterklammerten Stellen) der bereits verwendeten Identität $\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2a \cdot b$. Nur die für S_{aa} sei vorgestellt:

$$S_{aa} = \operatorname{tr}((\not{p}_f + m) \not{\varepsilon}^{(f)} \not{\varepsilon}^{(i)} \not{k}_i (\not{p}_i + m) \not{k}_i \not{\varepsilon}^{(i)} \not{\varepsilon}^{(f)}) = \operatorname{tr}(\not{p}_f \not{\varepsilon}^{(f)} \not{\varepsilon}^{(i)} \not{k}_i \underbrace{\not{p}_i \not{k}_i \not{\varepsilon}^{(i)} \not{\varepsilon}^{(f)}}),$$

denn $\not{k}_i m \not{k}_i = m \not{k}_i^2 = m k_i^2 = 0$ und $\not{k}_i \not{\varepsilon}^{(i)} \not{\varepsilon}^{(f)} m \not{\varepsilon}^{(f)} \not{\varepsilon}^{(i)} \not{k}_i = \varepsilon^{(f)2} \varepsilon^{(i)2} \not{k}_i m \not{k}_i = 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned} S_{aa} &= 2k_i \cdot p_i \operatorname{tr}(\not{p}_f \not{\varepsilon}^{(f)} \not{k}_i \not{\varepsilon}^{(f)}) \\ &= 2k_i \cdot p_i (2\varepsilon^{(f)} \cdot k_i \operatorname{tr}(\not{p}_f \not{\varepsilon}^{(f)}) + \operatorname{tr}(\not{p}_f \not{k}_i)) \\ &= 8k_i \cdot p_i (2(\varepsilon^{(f)} \cdot k_i)(p_f \cdot \varepsilon^{(f)}) + (p_f \cdot k_i)) \\ &= 8k_i \cdot p_i (2(\varepsilon^{(f)} \cdot k_i)^2 + p_i \cdot k_f), \end{aligned}$$

wobei zuletzt die Impulserhaltung $p_f - k_i = p_i - k_f$, die $p_f \cdot k_i = p_i \cdot k_f$ und $\varepsilon^{(f)} \cdot (p_f - k_i) = 0$ impliziert, benutzt wurde. Den Term S_{bb} erhält man daraus durch (7.35). Das Resultat für $S_{ab} = S_{ba}$ ist

$$S_{ab} = 8 \left[(k_i \cdot p_i)(k_f \cdot p_i) (2(\varepsilon^{(f)} \cdot \varepsilon^{(i)})^2 - 1) + (k_f \cdot \varepsilon^{(i)})^2 k_i \cdot p_i - (k_i \cdot \varepsilon^{(f)})^2 k_f \cdot p_i \right], \quad (7.36)$$

zusammen also

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 |T|^2 = e^4 \left(\frac{p_i \cdot k_f}{p_i \cdot k_i} + \frac{p_i \cdot k_i}{p_i \cdot k_f} + 4(\varepsilon^{(f)} \cdot \varepsilon^{(i)})^2 - 2 \right).$$

Verwendet man noch $p_i \cdot k = mk^0 = m|\vec{k}|$ bei der Einsetzung in (6.41), so findet man den differentiellen Streuquerschnitt (**Klein, Nishina** 1929)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{4} \frac{|\vec{k}_f|^2}{|\vec{k}_i|^2} \left(\frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} + \frac{|\vec{k}_i|}{|\vec{k}_f|} + 4(\vec{\varepsilon}^{(f)} \cdot \vec{\varepsilon}^{(i)})^2 - 2 \right), \quad (7.37)$$

wobei $r_0 = e^2/(4\pi m)$ der klassische Elektronradius ist. Hier ist $|\vec{k}_f|$ durch $|\vec{k}_i|$ und den Streuwinkel $\cos \theta = \vec{e}_f \cdot \vec{e}_i$ bestimmt über die 4er Impulserhaltung $k_f - k_i = p_i - p_f$: Das Quadrat ist $-k_i \cdot k_f = m^2 - p_i \cdot p_f$, wobei $k_i \cdot k_f = |\vec{k}_i||\vec{k}_f|(1 - \cos \theta)$ und $p_i \cdot p_f = mp_f^0 = m(m - |\vec{k}_f| + |\vec{k}_i|)$, also

$$|\vec{k}_f| = \frac{|\vec{k}_i|}{1 + (|\vec{k}_i|/m)(1 - \cos \theta)}. \quad (7.38)$$

Im Grenzfall Photonen niedriger Energie, $\beta \equiv |\vec{k}_i|/m \rightarrow 0$, wird (7.37) zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{|\vec{k}_f|^2}{|\vec{k}_i|^2} (\vec{\varepsilon}^{(f)} \cdot \vec{\varepsilon}^{(i)})^2 + \mathcal{O}(\beta^2),$$

was mit (2.53) (bis auf $\mathcal{O}(\beta^2)$) übereinstimmt.

Bei unpolarisiert einfallenden Photonen und nicht beobachteter Polarisation der gestreuten wird (7.37) zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} \frac{|\vec{k}_f|^2}{|\vec{k}_i|^2} \left(\frac{|\vec{k}_f|}{|\vec{k}_i|} + \frac{|\vec{k}_i|}{|\vec{k}_f|} - \sin^2 \theta \right). \quad (7.39)$$

Integration über $\Omega = (\theta, \varphi)$ anhand von (7.38) liefert einen komplizierten Ausdruck für den totalen Streuquerschnitt σ_{tot} . Es gilt aber, vgl. (2.58),

$$\frac{\sigma_{\text{tot}}}{\sigma_T} = \begin{cases} 1 - 2\beta + \mathcal{O}(\beta^2), & (\beta \rightarrow 0), \\ \frac{3}{8\beta} \left(\log 2\beta + \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{\log \beta}{\beta}\right) \right), & (\beta \rightarrow \infty). \end{cases}$$

7.5 Kopplung an äussere Felder

Es ist angebracht, äussere Quelle des e.m. Feldes klassisch zu beschreiben, wie z.B. einen Magneten oder auch einen Atomkern. Man zerlegt das Feld

$$A_{\text{tot}}^\mu(x) = A_c^\mu(x) + A^\mu(x) \quad (7.40)$$

in ein von j^μ erzeugendes klassisches Feld, A_c^μ , und ein quantisiertes, A^μ . In der Hamiltondichte entsteht die zusätzliche Wechselwirkung/Vertex/Faktor (Ortsraum)

$$e\bar{\Psi}(x)A_c(x)\Psi(x) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} A_c(x) \\ \times \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ b \quad a \end{array} \quad \longrightarrow \quad -ieA_c(x)_{ba}. \quad (7.41)$$

Man kann aber auch direkt die Quellen $j^\mu(x)$ über die Hamiltondichte $j_\alpha A^\alpha$, s. (3.24) ans Feld koppeln

$$j_\alpha(x)A^\alpha(x) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} j(x) \\ \times \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \alpha \end{array} \quad \longrightarrow \quad -ij_\alpha(x).$$

Der Vertex (7.41) entsteht daraus in Verbindung mit dem Photonpropagator und dem Vertex (7.32)

$$\int d^4y (-i)j_\alpha(y) \cdot (-g^{\alpha\beta}) i\Delta_F(y-x) \cdot (-ie) (\gamma_\beta)_{ba} = -ieA_c(x)_{ba},$$

wobei $A_c^\beta(x) = -\int d^4y j^\beta(y)\Delta_F(y-x)$ die Lösung (in der Lorentz-Eichung) der Maxwell-Gleichung zu vorgegebenen Quellen j^β und „Feynman-Randbedingungen“ ist (s. Übungen).

Sei nun $H = H_0 + H_W$, wobei H_W die Wechselwirkung zu einem räumlich lokalisierten und zeitlich konstanten äusseren Feld ist und H_0 auch schon „innere“ Wechselwirkungen enthalten darf. Seien $|\Omega_0\rangle, |\Omega\rangle$ die Grundzustände, $H_0|\Omega_0\rangle = 0$, $H|\Omega\rangle = E|\Omega\rangle$, wobei im Allgemeinen die Grundzustandsenergie $E \neq 0$ ist, da im Unterschied zu (7.2) die Lorentzinvarianz durch H_W gebrochen ist. Umgekehrt ist hier $\langle\Omega_0|\Omega\rangle \neq 0$ vernünftig. Es ist

$$E = i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots dt_p \delta(t_1) \cdot \langle\Omega_0|TH_W(t_1) \dots H_W(t_p)|\Omega_0\rangle_c \quad (7.42)$$

mit $H_W(t) = e^{iH_0t}H_We^{-iH_0t}$. Herleitung: Nach (7.3) ist $|\langle\Omega_0|\Omega\rangle|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle\Omega_0|e^{-i(H-E)t}|\Omega_0\rangle$, d.h.

$$iE + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \langle\Omega_0|e^{-iHt}|\Omega_0\rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |\langle\Omega_0|\Omega\rangle|^2 = 0.$$

Der Logarithmus von

$$\begin{aligned} \langle\Omega_0|e^{-iHt}|\Omega_0\rangle &= \langle\Omega_0|T \exp\left(-i \int_{-t/2}^{t/2} H_W(\tau) d\tau\right)|\Omega_0\rangle \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \int_{-t/2}^{t/2} dt_1 \dots dt_p \langle\Omega_0|TH_W(t_1) \dots H_W(t_p)|\Omega_0\rangle \end{aligned} \quad (7.43)$$

ist, s. (7.22), durch die zusammenhängenden Diagramme in der Entwicklung von (7.43) gegeben: $\langle\dots\rangle \rightarrow \langle\dots\rangle_c$. Da $\langle\Omega_0|TH_W(t_1) \dots H_W(t_p)|\Omega_0\rangle_c$ zeittranslationsinvariant ist und abfällt für $t_1 - t_i \rightarrow \infty$, ($i = 2, \dots, p$), beträgt sein Integral asymptotisch für $t \rightarrow \infty$

$$t \cdot \int_{-t/2}^{t/2} dt_2 \dots dt_p \langle\Omega_0|TH_W(t_1=0)H_W(t_2) \dots H_W(t_p)|\Omega_0\rangle_c.$$

Anwendung: Die Coulomb-Energie

$$E = \frac{e^2}{4\pi r} \quad (7.44)$$

zweier gleicher klassischer Ladungen definiert ihre Stärke e . In der QED entspricht sie der Grundzustandsenergie des Feldes in Anwesenheit einer statischen Ladungsverteilung $j^\mu(x^0, \vec{x}) = (\rho(\vec{x}), \vec{0})$. Mit

$$\begin{aligned} H_W(t) &= \int d^3x j_\alpha(x) A^\alpha(x) = \int d^3x \rho(\vec{x}) A^0(x), \\ \rho(\vec{x}) &= \int d^3k \rho(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \int d^4k \delta(k^0) \rho(\vec{k}) e^{-ikx}, \\ \delta(x^0) \rho(\vec{x}) &= \frac{1}{2\pi} \int d^4k \rho(\vec{k}) e^{-ikx}, \end{aligned}$$

wird

$$E = i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-i)^p}{p!} \frac{1}{2\pi} \int dk_1^0 \prod_{i=1}^p (d^3k_i \rho(\vec{k}_i)) G_c(k_1, \dots, k_p) \Big|_{k_2^0 = \dots = k_p^0 = 0} \quad (7.45)$$

mit

$$G_c(k_1, \dots, k_p) = \int d^4x_1 \dots d^4x_p e^{-i \sum_{i=1}^p k_i x_i} \langle \Omega_0 | T A^0(x_1) \dots A^0(x_p) | \Omega_0 \rangle.$$

Nach Furrys Lemma läuft die Summe (7.45) nur über p gerade. Mit $G_c(k_1, k_2) =: (2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2) G_c(k^2)$ lautet die Näherung $p = 2$

$$E = \frac{-i}{2!} (2\pi)^3 \int d^3k |\rho(\vec{k})|^2 G_c(k^2) \Big|_{k^0=0}, \quad (7.46)$$

wobei $\rho(-\vec{k}) = \overline{\rho(\vec{k})}$ benutzt wurde. Die Diagramme für $G_c(k_1, k_2)$ sind

$$0 \overset{k'}{\sim} 0 + 0 \overset{k'}{\sim} \text{[Loop]} \overset{k}{\sim} 0 + \dots,$$

sodass in führender Ordnung $G_c(k^2) = -ig^{00}/(k^2 + i0)$ und

$$E = \frac{(-i)^2}{2} (2\pi)^3 \int d^3k \frac{|\rho(\vec{k})|^2}{-k^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y \frac{\rho(\vec{x}) \rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}.$$

Insbesondere ist für $\rho = \rho_1 + \rho_2$ die gegenseitige Wechselwirkung

$$\frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3y \frac{\rho_1(\vec{x}) \rho_2(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|},$$

im Einklang mit (7.44). (Dieses Resultat ist einfach und exakt, falls kein Fermionfeld Ψ vorhanden ist; mit (7.45) werden wir Korrekturen berechnen).

gegeben. Für $g(p^2)$ bedeutet dies in Ordnung λ^2

$$g(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i0} + \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i0} (-i\lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2)) \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i0} \quad (8.6)$$

mit

$$-i\lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2) = \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i0} \cdot \frac{i}{(p-k)^2 - m_0^2 + i0} \quad (8.7)$$

wobei der Faktor $1/2$ von $S = 2$, $S' = 1$ kommt. In dieser Ordnung ist (8.6) gleich

$$\begin{aligned} g(p^2) &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i0} \left(1 - \lambda^2 \frac{\Sigma_2(p^2, m_0^2)}{p^2 - m_0^2 + i0} \right)^{-1} \\ &= \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2)}. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Die Entwicklung der geometrischen Reihe $(1 - q)^{-1}$ zeigt, dass sich (8.8) von (8.7) unterscheidet um die Diagramme

$$\sum_{n=2}^{\infty} \underbrace{p \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } \dots \text{ --- } \bigcirc \text{ --- } p'}_n,$$

die einen Teil aller Diagramme $\mathcal{O}(\lambda^4)$ in (8.5) ausmachen. Bloss: Das Integral (8.7) der **Selbstenergie** $\lambda^2 \Sigma_2$ ist logarithmisch **divergent**, da der Grad in k des Nenners gleich der Dimension 4 der Integration ist. Die Differenz der Integrale für verschiedene Werte des äusseren Impulses p ist aber **konvergent**:

$$\begin{aligned} \Sigma_2(p^2, m_0^2) &= \frac{i}{32\pi^4} \left[\int d^4 k \left(\frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i0)((p-k)^2 - m_0^2 + i0)} - \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i0)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i0)^2} \right] \equiv \Sigma'(p^2, m_0^2) + \Sigma''(m_0^2) \end{aligned} \quad (8.9)$$

das erste Integral ist konvergent (s. auch unten), das zweite ist divergent, aber unabhängig von p^2 .

Feynman-Diagramme können vorerst endlich gemacht werden durch eine **Regularisierung**, z.B. nach **Pauli–Villars**: In der einfachsten Version, die hier ausreicht, ersetzt man die Propagatoren im Diagramm gemäss

$$\begin{aligned} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i0} &\rightsquigarrow \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i0} - \frac{i}{k^2 - M^2 + i0} = \frac{-i(M^2 - m_0^2)}{(k^2 - m_0^2 + i0)(k^2 - M^2 + i0)} \\ &\begin{cases} \rightarrow \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i0} & M^2 \rightarrow \infty \text{ bei } k^2 \text{ fest} \\ = \mathcal{O}((k^2)^{-2}) & k^2 \rightarrow \infty \text{ bei } M^2 \text{ fest.} \end{cases} \end{aligned}$$

Der **Cutoff** M^2 ist der Parameter, der das Abschneiden (bei $k^2 \approx M^2$) des Propagators beschreibt. Bei Σ' ist diese Ersetzung für $M^2 \rightarrow \infty$ unwesentlich, da es bereits konvergent ist; hingegen ist nun

$$\Sigma'' = \frac{i}{32\pi^4} (M^2 - m_0^2)^2 \int d^4 k \frac{1}{(k^2 - m_0^2 + i0)^2 (k^2 - M^2 + i0)^2}$$

erst im Limes $M^2 \rightarrow \infty$ divergent.

$\Sigma'(p^2, m_0^2)$ kann aus $\partial\Sigma'/\partial p^2 = \partial\Sigma_2/\partial p^2$ und

$$\Sigma'(p^2 = 0, m_0^2) = 0 \quad (8.10)$$

bestimmt werden. Wegen $(\partial/\partial p^\mu)\Sigma_2 = 2p_\mu(\partial/\partial p^2)\Sigma_2$ ist

$$\frac{\partial\Sigma'}{\partial p^2} = \frac{p^\mu}{2p^2} \cdot \frac{\partial\Sigma'}{\partial p^\mu} = \frac{-i}{32\pi^4 p^2} \int d^4k \frac{p(p-k)}{((p-k)^2 - m_0^2 + i0)^2 (k^2 - m_0^2 + i0)}.$$

Unter Verwendung der Feynman-Parametrisierung (s. Übungen)

$$\frac{1}{A^2 B} = 2 \int_0^1 dx \cdot x (Ax + B(1-x))^{-3},$$

der Umformung

$$\begin{aligned} & ((p-k)^2 - m_0^2 + i0)x + (k^2 - m_0^2 + i0)(1-x) \\ &= (p^2 - 2pk)x + k^2 - m_0^2 + i0 = (k - px)^2 + p^2(x-x^2) - m_0^2 + i0 \end{aligned} \quad (8.11)$$

und der Substitution $k - px \rightarrow k$ ist

$$\begin{aligned} 32\pi^4 p^2 \frac{\partial\Sigma'}{\partial p^2} &= 2i \int_0^1 dx \cdot x \int d^4k \frac{p \cdot (p - (k + px))}{(m_0^2 - p^2 x(1-x) - k^2 - i0)^3} \\ &= -2p^2 \int_0^1 dx \cdot x(1-x) \int d^4k \frac{-i}{(m_0^2 - p^2 x(1-x) - k^2 - i0)^3}, \end{aligned} \quad (8.12)$$

da k im Zähler einen ungeraden Integranden liefert. Die Integration über $k^0 \in \mathbb{R}$ in $d^4k = dk^0 d^3k$ kann durch eine über $k^0 =: ik^4 \in i\mathbb{R}$ (**Wick-Rotation**) ersetzt werden, sofern

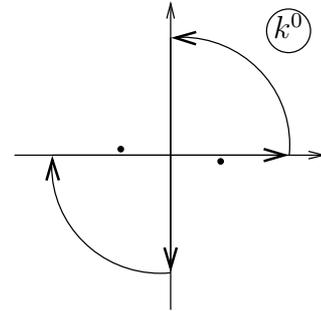
$$K := m_0^2 - p^2 x(1-x) > 0,$$

da die Contour (kein Beitrag von den Bögen bei ∞) die beiden Pole $\pm[K + \vec{k}^2 - i0]^{1/2}$ nicht umläuft. Das innere Integral (8.12) wird so zu einem Euklidischen Integral (mit $d = 4$, $\alpha = 3$) der Form

$$\int d^d \underline{k} \frac{1}{(K + \underline{k}^2)^\alpha} = \pi^{d/2} \frac{\Gamma(\alpha - \frac{d}{2})}{\Gamma(\alpha)} K^{\frac{d}{2} - \alpha} \quad (8.13)$$

($\underline{k} = (\vec{k}, k^d)$, $\underline{k}^2 = \sum_{i=1}^d (k^i)^2$), wobei

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}. \quad (8.14)$$



Es gilt $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und $\Gamma(1) = 1$. Damit ist (8.12) gleich

$$-\pi^2 p^2 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{m_0^2 - p^2 x(1-x)} = \pi^2 p^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \int_0^1 dx \log(m_0^2 - p^2 x(1-x))$$

und zusammen mit (8.10) folgt

$$\Sigma'(p^2, m_0^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log\left(\frac{m_0^2 - p^2 x(1-x)}{m_0^2}\right). \quad (8.15)$$

$\Sigma''(m_0^2)$ kann ähnlich ausgerechnet werden:

$$\Sigma''(m_0^2; M^2) = -\frac{1}{16\pi^2} \log \frac{M}{m_0} + \text{konvergent}. \quad (8.16)$$

Wichtig ist vor allem, dass es für $M \rightarrow \infty$ divergiert. Diese Tatsache kann auf verschiedene, aber äquivalente Weisen ausgelegt werden:

1. „**Unrenormierte**“ **Störungsrechnung**. Das Teilchen ohne Selbstwechselwirkung ist eine Fiktion (wie etwa das Elektron ohne Wechselwirkung zum e.m. Feld). Über seine nicht beobachtbare „**nackte**“ **Masse** m_0^2 kann die Theorie **verfügen**. Beobachtbar und (in dieser Auslegung) **vorgegeben** ist die **physikalische Masse** m^2 des freien, selbstwirkenden Teilchens, s. (6.9), die sich als Pol in (8.2), bzw. (8.8) manifestiert:

$$p^2 - m_0^2 - \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2) \Big|_{p^2=m^2} = 0. \quad (8.17)$$

Die nackte Masse $m_0 = m_0(\lambda, M^2) = m_0^{(0)}(M^2) + m_0^{(2)}(M^2)\lambda^2 + \dots$ ist so zu wählen, dass

$$m_0^2(\lambda, M) + \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_0^2(\lambda, M); M^2) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} m^2 + \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2)$$

einen endlichen Grenzwert hat (für ein p^2 , und damit für alle); dies legt die **renormierte Selbstenergie** $\Sigma_2^R(p^2)$ nur bis auf eine additive Konstante fest. Letztere ist nach (8.17) so festzulegen, dass

$$\Sigma_2^R(m^2) = 0. \quad (8.18)$$

Für $m_0^2(\lambda, M^2) = m^2 + \lambda^2 \text{konst} + \frac{\lambda^2}{16\pi^2} \log \frac{M}{m} + \mathcal{O}(\lambda^4)$ ist, vgl. (8.15, 8.16),

$$\begin{aligned} \Sigma_2^R(p^2) &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log(m^2 - p^2 x(1-x)) + \text{konst} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log\left(\frac{m^2 - p^2 x(1-x)}{m^2(1-x+x^2)}\right), \end{aligned} \quad (8.19)$$

wobei zuletzt (8.18) erfüllt wurde. Die Greensfunktion

$$g(p^2) = \frac{i}{p^2 - m^2 - \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2)}$$

hat in der Tat die analytische Struktur der Figur (8.3): einen Pol bei $p^2 = m^2$ mit Residuum iZ ,

$$Z^{-1} = \frac{d}{dp^2}(p^2 - m^2 - \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2)) \Big|_{p^2=m^2} = 1 + \frac{1}{32\pi^2} \frac{\lambda^2}{m^2} \underbrace{\int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{1-x+x^2}}_{2\pi/(3\sqrt{3})},$$

sowie einen Schnitt für $p^2 \in [4m^2, \infty)$: p^2 liegt auf dem Schnitt des log in (8.19), falls $m^2 - p^2 x(1-x) < 0$ für ein $x \in [0, 1]$, wobei $x = 1/2$ dem Maximum, $1/4$, von $x(1-x)$ entspricht.

2. „Renormierte“ Störungsrechnung. Die Zerlegung (8.4) von \mathcal{L} in \mathcal{L}_0 und \mathcal{L}_W ist nicht zwingend. Sei $m_0^2 = m_R^2 + \delta m^2$ mit festem **Massenparameter** m_R^2 und **Gegen-term** $\delta m^2 = \lambda^2(\delta m^2)_2$, sodass $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W$ mit

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{m_R^2}{2}\varphi^2, \quad \mathcal{L}_W = -\frac{\lambda}{3!}\varphi^3 - \frac{\lambda^2}{2}(\delta m^2)_2\varphi^2.$$

In der Störungsrechnung, die auf (8.15, 8.16) führt, ist m_0 durch m_R zu ersetzen. Ferner kommt ein weiterer innerer Vertex, vgl. (7.15), der Ordnung 2

$$\varphi^2(y_i) \longrightarrow \text{---}\times\text{---} \longrightarrow -i\lambda^2(\delta m^2)_2 \quad (8.20)$$

hinzu, und damit ein Diagramm $\text{---}\times\text{---}$ der Ordnung λ^2 zu (8.7). So wird

$$g(p^2) = i(p^2 - m_R^2 - \lambda^2 \Sigma_2(p^2, m_R^2; M^2))^{-1}$$

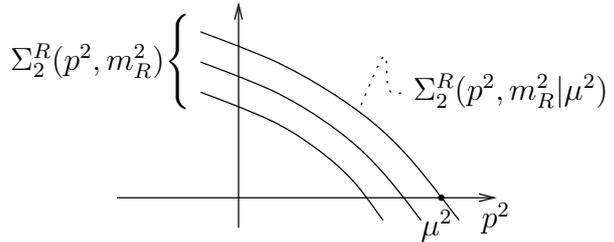
mit

$$\Sigma_2(p^2, m_R^2; M^2) = \tilde{\Sigma}_2(p^2, m_R^2; M^2) + (\delta m^2)_2(M^2),$$

wo $\tilde{\Sigma}_2$ vorher Σ_2 hiess. Nun soll $(\delta m^2)_2(M^2)$ so gewählt werden, dass

$$\Sigma_2(p^2, m_R^2; M^2) \xrightarrow{M \rightarrow \infty} \Sigma_2^R(p^2, m_R^2)$$

endlich ist (für ein p^2 , und damit für alle), was Σ_2^R nur bis auf eine additive Konstante spezifiziert. Diese Freiheit kann durch einen weiteren Parameter μ^2 parametrisiert werden, z.B. den **Renormierungspunkt**:



$$\Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2) = 0 \quad \text{für } p^2 = \mu^2. \quad (8.21)$$

Also ist, s. (8.15),

$$\Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m_R^2 - p^2 x(1-x)}{m_R^2 - \mu^2 x(1-x)} \right). \quad (8.22)$$

Die physikalische Masse m^2 ist dann (bei festem λ) bestimmt durch m_R^2, μ^2 als Lösung von

$$m_R^2 + \lambda^2 \Sigma_2^R(m^2, m_R^2 | \mu^2) = m^2. \quad (8.23)$$

Umgekehrt liefern verschiedene Werte von (m_R^2, μ^2) dieselbe vorgegebene Masse m^2 , falls sie (8.23) erfüllen. Dann ist auch

$$g(p^2) = \frac{i}{p^2 - m_R^2 - \lambda^2 \Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2)} = \frac{i}{p^2 - m^2 + \lambda^2 (\Sigma_2^R(m^2, m_R^2 | \mu^2) - \Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2))}$$

unabhängig von μ^2 , da die Differenz der Σ_2 es ist. Durch die 2 Parameter (m_R^2, μ^2) wird also nur eine 1-dimensionale Schar von QFTs parametrisiert. Äquivalente Punkte (m_R^2, μ^2) bilden eine Kurve $m_R^2 = m_R^2(\mu^2)$. Transformationen, die Punkte in äquivalente abbilden, bilden die **Renormierungsgruppe**, aber keine Gruppe im mathematischen Sinne. Aus der Differenz von (8.23) für $\mu^2 = \mu_2^2$ und $\mu^2 = \mu_1^2$ folgt

$$m_R^2(\mu_2^2) = m_R^2(\mu_1^2) + \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \frac{m_R^2(\mu_1^2) - \mu_2^2 x(1-x)}{m_R^2(\mu_1^2) - \mu_1^2 x(1-x)} + \mathcal{O}(\lambda^4), \quad (8.24)$$

wobei unter dem Logarithmus $m_R^2(\mu_2^2) = m_R^2(\mu_1^2) + \mathcal{O}(\lambda^2)$ benutzt wurde. Man sagt für (8.24): $m_R^2(\mu_2^2)$ entsteht aus $m_R^2(\mu_1^2)$ durch eine **endliche Renormierung**. Die infinitesimale Version davon, und damit die Differentialgleichung für $m_R^2(\mu^2)$ (**Renormierungsgruppengleichung**), ist

$$\frac{d \log m_R^2}{d \log \mu^2} = \frac{\mu^2}{m_R^2} \frac{d m_R^2}{d \mu^2} = \frac{-1}{32\pi^2} \left(\frac{\lambda}{m_R} \right)^2 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(m_R/\mu)^2 - x(1-x)}. \quad (8.25)$$

Gleichung (8.21) bedeutet, dass

$$g(p^2) \approx \frac{i}{p^2 - m_R^2} \quad \text{für } p^2 \approx \mu^2,$$

weshalb $m_R^2(\mu^2)$ **laufende Masse** bei der Energieskala μ heisst.

Natürlich kann man $m_R^2 = m^2$ wählen. Das entsprechende μ^2 folgt aus (8.23), d.h.

$$\Sigma_2^R(m^2, m^2 | \mu^2) = 0, \quad (8.26)$$

also $\mu^2 = m^2$, und aus (8.22) wird (8.19). Alternativ zu (8.21) kann man die additive Konstante in Σ_2^R auch wie folgt einbeziehen:

$$\Sigma_2^R(p^2, m_R^2 | \mu^2) = \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \log \left(\frac{m_R^2 - p^2 x(1-x)}{\mu^2} \right) \quad (8.27)$$

(**minimale Subtraktion**; hier hat μ^2 eine andere Bedeutung als in (8.21)). Durch Ableitung von (8.23) bei festem m^2 folgt nun statt (8.25)

$$\frac{d \log m_R^2}{d \log \mu^2} = \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{\lambda}{m_R} \right)^2. \quad (8.28)$$

8.2 Dimensionelle Regularisierung

Statt das divergente Integral $\tilde{\Sigma}_2(p^2, m_R^2)$, s. (8.7), durch einen Cutoff M zu regularisieren, kann man verwenden, dass

$$\tilde{\Sigma}_2(p^2, m_R^2; d) = \frac{i}{32\pi^4} \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m_R^2 + i0)((p-k)^2 - m_R^2 + i0)}$$

in $d = 1, 2, 3$ Dimensionen konvergent ist. Durch die Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx (Ax + B(1-x))^{-2}$$

folgt, s. (8.11),

$$\begin{aligned} 32\pi^4 \tilde{\Sigma}_2 &= i \int_0^1 dx \int d^d k \frac{1}{(m_R^2 - p^2 x(1-x) - k^2 - i0)^2} \\ &= - \int_0^1 dx d^d \underline{k} \frac{1}{(m_R^2 - p^2 x(1-x) + \underline{k}^2)^2} \\ &= -\pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \int_0^1 dx (m_R^2 - p^2 x(1-x))^{\frac{d}{2}-2} \end{aligned}$$

nach Wick-Rotation und (8.13) mit $\alpha = 2$. Die Divergenz bei $d = 4$ widerspiegelt sich darin, dass $\Gamma(z)$ bei $z = 0$ einen Pol hat. Das Integral (8.14) ist nur für $\text{Re } z > 0$ absolut konvergent, hat aber eine analytische Fortsetzung auf ganz $z \in \mathbb{C}$ bis auf einfache Pole bei $z = 0, -1, -2, \dots$. Die Gleichung

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)}$$

gestattet nämlich, den Definitionsbereich sukzessive auf $\text{Re } z > -n$ ($n = 1, 2, \dots$) zu erweitern. Für $z \rightarrow 0$ ist nach Taylor

$$\begin{aligned} z\Gamma(z)a^z &= \Gamma(z+1)e^{z \log a} \\ &= 1 + (\Gamma(1) \log a + \Gamma'(1))z + \mathcal{O}(z^2). \end{aligned}$$

Damit ist für $d \rightarrow 4$ und $a^{-1} = \pi(m_R^2 - p^2 x(1-x))$, $z = 2 - \frac{d}{2}$

$$\tilde{\Sigma}_2 = \frac{1}{32\pi^2} \left(\frac{2}{4-d} + \Gamma'(1) + \int_0^1 dx \log(m_R^2 - p^2 x(1-x)) \right).$$

Der Gegenterm (8.20) hebt die Divergenz weg, lässt aber eine unbestimmte additive Konstante zurück. Diese kann wie in (8.22) oder (8.27) dargestellt werden. Ohne tiefer auf die Äquivalenz zur Pauli-Villars Regularisierung einzugehen, soll fortan diese praktische Berechnungsmethode verwendet werden.

8.3 Ein-Schleifen-Renormierung der QED

Wir untersuchen hier die (renormierte) Störungsrechnung ausgewählter Greensfunktionen der QED eine Ordnung über die führende hinaus. Wir nennen e und m (statt m_R) die Parameter, die in den Feynman-Regeln, s. S. 99 vorkommen. Eine physikalische Bedeutung erlangen sie durch Festlegung endlicher Konstanten, die durch die Renormierung nicht bestimmt sind, vgl. z.B. (8.21). Die dazu erforderlichen Gegenterme werden wir erst im Nachhinein in Verbindung mit den nackten Größen bringen.

1. Fermionpropagator in Ordnung e^2

$$\begin{aligned} G_{ba}(p'; p) &= \int d^4x' d^4x e^{-i(p'x' + px)} \langle \Omega | T \Psi_b(x') \bar{\Psi}_a(x) | \Omega \rangle \\ &=: (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p + p') G_{ba}(\not{p}). \end{aligned} \quad (8.29)$$

2. Photonpropagator in Ordnung e^2

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(k', k) &= \int d^4y d^4y' e^{-i(k'y' + ky)} \langle \Omega | T A_\mu(y') A_\nu(y) | \Omega \rangle \\ &=: (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + k') G_{\mu\nu}(k^2). \end{aligned} \quad (8.30)$$

3. Vertex in Ordnung e^3

$$\begin{aligned} G_{ba}^\mu(p'; p; k) &= \int d^4x' d^4x d^4y e^{-i(p'x' + px + ky)} \langle \Omega | T \Psi_b(x') \bar{\Psi}_a(x) A^\mu(y) | \Omega \rangle \\ &=: (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + p + k) G_{ba}^\mu(-p', p). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Gewisse Diagramme werden nicht nur für innere Impulse $k^2 \rightarrow \infty$ divergieren, sondern auch für $k^2 \rightarrow 0$ problematisch sein. Dies kann behoben werden, indem man dem Photon eine Masse λ^2 erteilt, s. (3.69). Damit wird, s. (7.31),

$$\mu \text{---} \text{wavy line} \text{---} \nu \quad \longrightarrow \quad \frac{-i}{k^2 - \lambda^2 + i0} g_{\mu\nu}.$$

1) **Fermionpropagator.** Diagramme:

$$\begin{array}{c} \leftarrow k \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \leftarrow p \quad \leftarrow p - k \quad p \end{array} + \mathcal{O}(e^4).$$

Die Summe der Diagramme der Form

$$\text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \quad (8.32)$$

liefert, vgl. (8.8) und $(\not{p} + m)(p^2 - m^2 + i0)^{-1} = (\not{p} - m + i0)^{-1}$,

$$\begin{aligned} G(\not{p}) &= \frac{i}{\not{p} - m + i0} + \frac{i}{\not{p} - m + i0} (-ie^2 \Sigma(\not{p})) \frac{i}{\not{p} - m + i0} + \dots \\ &= \frac{i}{\not{p} - m - e^2 \Sigma(\not{p}) + i0} \end{aligned} \quad (8.33)$$

mit **Selbstenergie**

$$-ie^2\Sigma(\not{p}) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(-i)g_{\mu\nu}}{k^2 - \lambda^2 + i0} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2 + i0} \gamma^\nu. \quad (8.34)$$

Dieses Integral ist logarithmisch divergent für $k \rightarrow \infty$, denn die führende lineare Divergenz $\int d^4k \not{k} \cdot k^{-4}$ hat einen ungeraden Integranden. Es kann durch dimensionelle Regularisierung berechnet werden über

$$\int d^4k \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i0} \frac{\not{p} - \not{k}}{(p-k)^2 - m^2 + i0} = \frac{1}{2} \not{\partial}_p \int d^4k \frac{1}{k^2 - \lambda^2 + i0} \log((p-k)^2 - m^2 + i0).$$

Das Resultat ist: Für $d \rightarrow 4$ ist

$$\Sigma(\not{p}) = \left(\frac{1}{8\pi^2(d-4)} + A(p^2) \right) \not{p} - \left(\frac{1}{2\pi^2(d-4)} + B(p^2) \right) m + \mathcal{O}(d-4) \quad (8.35)$$

mit

$$A(p^2) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^1 dx (1-x) \log\left(\frac{xm^2 + (1-x)\lambda^2 - x(1-x)p^2}{\mu_2^2} \right), \quad (8.36)$$

$$B(p^2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 dx \log\left(\frac{xm^2 + (1-x)\lambda^2 - x(1-x)p^2}{\mu_0^2} \right) \quad (8.37)$$

für bestimmte Konstanten μ_2, μ_0 . (Für $\lambda = 0$ entsteht bei $x = 0$ eine bloss logarithmische Singularität, sodass $A(p^2), B(p^2)$ endlich bleiben). Die Divergenzen in $\Sigma(\not{p})$ bei $d \rightarrow 4$ könnten kompensiert werden, falls der Störterm in der Lagrange-Dichte Gegenterme der Form

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_2 \bar{\Psi}(x) i \not{\partial} \Psi(x) \\ -\Delta_0 m \bar{\Psi}(x) \Psi(x) \end{array} \right\} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{innerer Vertex} \\ b \longleftarrow \times \longleftarrow a \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \text{Faktor} \\ i\Delta_2 \not{p}_{ba} + i\Delta_0 m \delta_{ba} \end{array} \quad (8.38)$$

enthielte, was wir später begründen werden. Für $\Delta_2, \Delta_0 = \mathcal{O}(e^2)$ wäre nämlich jede Schleife in (8.32) zu ersetzen gemäss

$$\text{Schleife} \longrightarrow \text{Schleife} + \times,$$

d.h.

$$e^2\Sigma(\not{p}) \longrightarrow e^2\Sigma(\not{p}) - (\Delta_2 \not{p} + \Delta_0 m),$$

und bei passend gewählter Divergenz von Δ_2, Δ_0 bei $d \rightarrow 4$,

$$\Delta_2 = \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{d-4} + \mathcal{O}(1), \quad \Delta_0 = \frac{e^2}{2\pi^2} \frac{1}{d-4} + \mathcal{O}(1), \quad (8.39)$$

gilt

$$\Sigma(\not{p}) \longrightarrow A(p^2)\not{p} - B(p^2)m =: \Sigma_R(\not{p}),$$

wobei μ_2, μ_0 in (8.36, 8.37) nun unbestimmte Konstanten von Δ_2, Δ_0 in sich aufgenommen haben. Diese können durch zwei zusätzliche Bedingungen festgelegt werden: Will man z.B., dass

$$(i) \quad m^2 = \text{physikalische Masse (der 1-Teilchenzustände)},$$

so muss gelten, vgl. (8.2),

$$\frac{1}{\not{p} - m - e^2 \Sigma_R(\not{p})} = \frac{Z_2}{\not{p} - m} + \text{regulär},$$

was

$$A(m^2) = B(m^2) \tag{8.40}$$

erfordert. Ferner findet man

$$\begin{aligned} Z_2^{-1} &= \frac{\partial}{\partial \not{p}} (\not{p} - m - e^2 \Sigma_R(\not{p})) \Big|_{\not{p}=m} \\ &= 1 - e^2 [A(m^2) + 2m^2(A'(m^2) - B'(m^2))] \end{aligned}$$

mit

$$2m^2(A'(m^2) - B'(m^2)) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x^2)}{x^2 + (1-x)(\lambda/m)^2}.$$

(Für $\lambda \rightarrow 0$ divergiert das Integral; der Limes ist später zu nehmen, soweit möglich). Also kann man Z_2 festlegen, z.B.

$$(ii) \quad Z_2 = 1,$$

durch Wahl von μ_2 ; danach erfüllt man (8.40), also (i), durch Wahl von μ_0 . Für später halten wir fest, dass (i,ii)

$$\Sigma_R(\not{p}) = \mathcal{O}(\not{p} - m), \quad (\not{p} \rightarrow m) \tag{8.41}$$

bedeutet.

2) **Photonpropagator.** Diagramme:

$$k' \text{ wavy } k + k' \text{ wavy } \begin{array}{c} \leftarrow p \\ \circlearrowleft \\ \circlearrowright \\ \rightarrow p - k \end{array} \text{ wavy } k + \mathcal{O}(e^4).$$

Wieder summieren wir die Diagramme der Form

$$\text{wavy} + \text{wavy} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \text{ wavy} + \text{wavy} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \begin{array}{c} \circlearrowleft \\ \circlearrowright \end{array} \text{ wavy} + \dots \quad (8.42)$$

$$\begin{aligned} G(k^2) &= \frac{-ig}{k^2 - \lambda^2 + i0} + \frac{-ig}{k^2 - \lambda^2 + i0} (-ie^2 \Pi_2(k^2)) \frac{-ig}{k^2 - \lambda^2 + i0} + \dots \\ &= \frac{-i}{(k^2 - \lambda^2)g^{-1} + e^2 \Pi_2(k^2) + i0} \end{aligned} \tag{8.43}$$

mit **Vakuumpolarisation**

$$-ie^2\Pi_2^{\mu\nu}(k^2) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\gamma^\mu \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i0} \gamma^\nu \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p-k)^2 - m^2 + i0} \right),$$

(das Minuszeichen rechts kommt von der Fermionschleife, s. Regel (4), auf S. 99). Für grosse p verhält sich das Integral wie $\int d^4p \cdot p^{-2}$, das somit quadratisch divergent ist. Dimensionelle Regularisierung liefert für $d \rightarrow 4$

$$\Pi_2^{\mu\nu}(k^2) = (k^\mu k^\nu - k^2 g^{\mu\nu}) \cdot \left(\frac{1}{6\pi^2} \frac{1}{d-4} + \Pi(k^2) + \mathcal{O}(d-4) \right) \quad (8.44)$$

mit

$$\Pi(k^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\mu_3^2} \right), \quad (8.45)$$

wobei der Limes $\lambda \rightarrow 0$ genommen wurde und μ_3 eine bestimmte Konstante ist. Der Term $k^\mu k^\nu$ ist unwesentlich in (8.44), da $G^{\mu\nu}(k^2)$ stets mit äusseren oder inneren Ströme (z.B. $j^\mu(x) = e\bar{\Psi}(x)\gamma^\mu\Psi(x)$) kontrahiert ist, die erhalten sind: $k^\mu j_\mu(k) = 0$. Die Divergenz für $d \rightarrow 4$ in (8.44) könnte behoben werden durch einen Gegenterm

$$-\frac{1}{2}\Delta_3(\partial_\alpha A_\beta)(\partial^\alpha A^\beta) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{innerer Vertex} \\ \mu \text{ } \text{---} \text{ } \text{---} \text{ } \nu \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{c} \text{Faktor} \\ -i\Delta_3 k^2 g^{\mu\nu} \end{array}, \quad (8.46)$$

da dieser $-i\Delta_3 k^2 g^{\mu\nu}$ zu $-ie^2\Pi_2^{\mu\nu}(k^2)$ beiträgt. Damit wird bei passender Wahl der Divergenz von Δ_3

$$G(k^2) = \frac{-ig}{k^2 - k^2 e^2 \Pi_R(k^2) + i0},$$

wobei μ_3 in (8.45) zu einer unbestimmten Konstanten geworden ist. Da $\Pi_R(k^2)$ bei $k^2 = 0$ regulär ist, bleibt der Pol von $G(k^2)$, und somit die physikalische Masse des Photons, bei $k^2 = 0$:

$$G(k^2) = -\frac{igZ_3}{k^2 + i0} + \text{regulär}$$

mit $Z_3^{-1} = 1 - e^2\Pi_R(0)$. Durch Wahl von μ_3 erreicht man

$$(iii) \quad Z_3 = 1,$$

also

$$\Pi_R(k^2) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 dx x(1-x) \log \left(\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{m^2} \right) \cong \begin{cases} -\frac{1}{60\pi^2} \frac{k^2}{m^2}, & (k^2 \rightarrow 0), \\ \frac{1}{12\pi^2} \log \left(-\frac{k^2}{m^2} \right), & (k^2 \rightarrow -\infty). \end{cases} \quad (8.47)$$

Eine physikalische Bedeutung von (iii) entnimmt man aus dem Vergleich mit dem Coulomb-Gesetz. Aus (7.46),

$$-iG^{00}(-\vec{k}^2) = \frac{1}{\vec{k}^2(1 - e^2\Pi_R(-\vec{k}^2))}$$

und (8.47) sieht man:

- (i) Das Coulomb-Gesetz $E = e^2/4\pi r$ gilt, falls $\alpha k^2/m^2 \ll 1$, ($\alpha = e^2/4\pi$), d.h. für Abstände $k^{-1} \approx r \gg \sqrt{\alpha}/m \approx 5 \cdot 10^{-12}$ m. In diesem Sinn ist e die physikalische Ladung (bzw. $Z_3^{1/2}e$ bei anderer Wahl als (iii)). Ihre Stärke kann gedeutet werden als Resultat des Austausch virtueller Photonen, entweder direkt zwischen den nackten Ladungen (erstes Diagramm in (8.42) und Gegenterme) oder indirekt über die Erzeugung virtueller Elektron-Positron-Paare (Vakuum polarisation; restliche Diagramme). Letztere schirmen die nackten Ladungen bis auf den physikalischen Wert ab, in Analogie zu einem Dielektrikum. Beachte, dass $\Pi_R(k^2)$ einen Schnitt aufweist, der bei $k^2 = (2m)^2$ beginnt; dies entspricht der Energie $2m$, bei der die Paare reell werden.
- (ii) Als Verallgemeinerung von (iii) kann die Konstante in (8.47) festgelegt werden durch $\Pi_R(k^2|\mu^2) = 0$ für $k^2 = -\mu^2$. Die Bedeutung von $e^2 = e^2(\mu^2)$ ist dann die einer **laufenden Kopplung**, die die Stärke bei Abständen $r \approx |\vec{k}|^{-1} \approx \mu^{-1}$ misst. Die Beziehung zur physikalischen Ladung $e^2(0)$ folgt daraus, dass

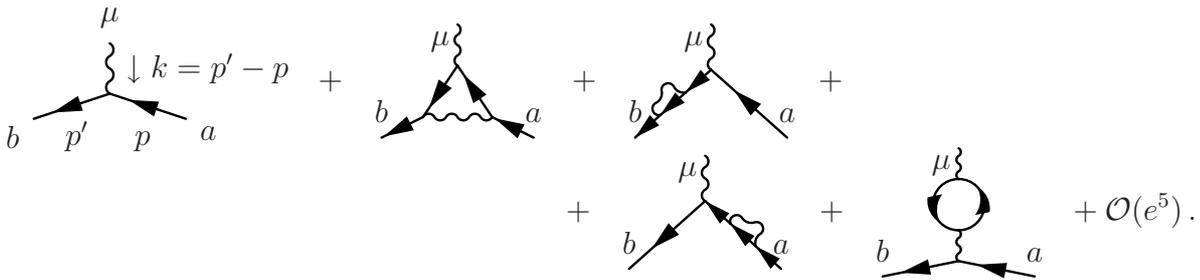
$$e^2(\mu^2)G(k^2|\mu^2) = \frac{-ige^2(\mu^2)}{k^2(1 - e^2(\mu^2)\Pi_R(k^2|\mu^2))}$$

unabhängig von μ^2 ist. Verwendet man dies für $k^2 = -\mu^2$, so folgt

$$e^2(\mu^2) = \frac{e^2(0)}{1 - e^2(0)\Pi_R(-\mu^2|0)} = \frac{e^2(0)}{1 - e^2(0) \cdot \frac{1}{12\pi^2} \log(\mu^2/m^2)},$$

wobei letzterer Ausdruck für $\mu^2 \gg m^2$ gilt. Die laufende Kopplung nimmt mit wachsendem μ , d.h. mit kürzeren Abständen, zu (Interpretation: die Abschirmung der nackten Ladung hat bei $r \lesssim \sqrt{\alpha}/m$ den asymptotischen Wert ($r \rightarrow \infty$) noch nicht erreicht). Sie divergiert sogar bei $\mu \cong me^{e^2(0)/6\pi^2} = me^{2\alpha/3\pi}$ ($\approx m \cdot 10^{280}$ für $\alpha^{-1} \cong 137$) (Landau Pol). Dies zeigt, dass die QED selbst für kleine α bei sehr kleinen Abständen nicht mehr störungsrechnerisch behandelt werden kann (anders die QCD, wo die laufende Kopplung abnimmt: "asymptotische Freiheit").

3) **Vertex**. Diagramme:



Dies kann zusammengefasst werden zu (bis auf $\mathcal{O}(e^5)$)

$$G_{ba}^\mu(p', p) = G_{\mu'}^\mu(k^2)G_{bb'}(p')(-ie\Lambda_{b'a'}^{\mu'}(p', p))G_{a'a}(p)$$

mit Vertexbeiträgen

$$-ie\Lambda_{ba}^\mu(p', p) = \begin{array}{c} \mu \\ \downarrow \\ b \quad a \end{array} + \begin{array}{c} \mu \\ \downarrow \\ p' - k \quad p - k \\ \uparrow \quad \uparrow \\ b \quad a \\ k \end{array} + \mathcal{O}(e^5) = -ie((\gamma^\mu)_{ba} + e^2\Gamma_{ba}^\mu(p', p) + \dots), \quad (8.48)$$

$$\begin{aligned}
& (-ie) \cdot e^2 \Gamma^\mu(p', p) \\
&= (-ie)^3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2 - \lambda^2 + i0} \cdot \gamma^\beta \frac{i(\not{p}' - \not{k} + m)}{(p' - k)^2 - m^2 + i0} \gamma^\mu \frac{i(\not{p} - \not{k} + m)}{(p - k)^2 - m^2 + i0} \gamma^\alpha. \quad (8.49)
\end{aligned}$$

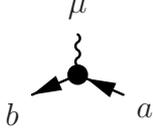
Dieses Integral ist logarithmisch divergent, und der divergente Teil ist $\propto \gamma^\mu$, denn er stammt, was den Zähler angeht, von

$$\gamma_\alpha \not{k} \gamma^\mu \not{k} \gamma^\alpha = -2\not{k} \gamma^\mu \not{k} = 2k^2 \gamma^\mu - 4k^\mu \not{k}$$

(vgl. Umformung in (7.36)); der Beitrag des letzten Terms ist $\propto \int d^4 k k^\mu k^\nu \gamma_\nu \cdot (k^2)^{-3} \propto g^{\mu\nu} \gamma_\nu = \gamma^\mu$. Dies erklärt (bis auf den Faktor vor γ^μ), dass

$$\Gamma^\mu(p', p) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{d-4} \gamma^\mu + \Gamma_F^\mu(p', p), \quad (8.50)$$

wobei $\lambda = 0$ gesetzt wurde und $\Gamma_F^\mu(p', p)$ endlich ist. Die Divergenz wird durch einen Gegenterm der Form

	innerer Vertex	Faktor	
$-e\Delta_1 \bar{\Psi} \not{A} \Psi$	\longrightarrow 	\longrightarrow $ie\Delta_1(\gamma^\mu)_{ba}$	(8.51)

kompensiert. Dies bedingt, dass

$$\Delta_1 = \frac{e^2}{8\pi^2} \frac{1}{d-4} + \mathcal{O}(1), \quad (d \rightarrow 4);$$

dieselbe Divergenz also wie auch schon Δ_2 in (8.39) aufwies. Wir wählen die endliche Konstante in Δ_1 , so dass

$$(iv) \quad \Delta_1 = \Delta_2, \quad (8.52)$$

d.h. auch im endlichen Teil. Die Bedeutung dieser Wahl wird aus folgenden Identitäten klarer (und, später, aus der Eichinvarianz der QED). Für den inversen Fermionpropagator (8.33)

$$G^{-1}(\not{p}) = -i(\not{p} - m - e^2 \Sigma(\not{p}))$$

gilt, zunächst ohne Berücksichtigung der Gegenterme (8.38) und deshalb bloss formal,

$$G^{-1}(\not{p}) - G^{-1}(\not{q}) = -i(\not{p} - \not{q}) - ie^2(\Sigma(\not{q}) - \Sigma(\not{p}))$$

mit (verwende $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$)

$$\begin{aligned}
& -ie^2(\Sigma(\not{q}) - \Sigma(\not{p})) \\
&= (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-i}{k^2 - \lambda^2 + i0} \gamma^\nu \underbrace{\left(\frac{i}{\not{q} - \not{k} - m + i0} - \frac{i}{\not{p} - \not{k} - m + i0} \right)}_{i \frac{1}{\not{q} - \not{k} - m + i0} (\not{p} - \not{q}) \frac{1}{\not{p} - \not{k} - m + i0}} \gamma_\nu.
\end{aligned}$$

Also ist, s. (8.48, 8.49),

$$i(G^{-1}(\not{p}) - G^{-1}(\not{q})) = (p_\mu - q_\mu) [\gamma^\mu + e^2 \Gamma^\mu(q, p)] = (p_\mu - q_\mu) \Lambda^\mu(q, p)$$

(Ward–Takahashi Identität) und insbesondere im Limes $q \rightarrow p$

$$-\frac{\partial \Sigma}{\partial p^\mu} = \Gamma^\mu(p, p) \quad (8.53)$$

(Ward–Identität), wobei auch (8.51) nicht berücksichtigt wurde. Nimmt man die Gegenterme hinzu, so ändern sich die beiden Seiten in (8.53) $\cdot e^2$ um

$$-\frac{\partial}{\partial p^\mu}(\Delta_2 \not{p}) = -\Delta_2 \gamma^\mu, \quad \text{bzw.} \quad -\Delta_1 \gamma^\mu :$$

Die Identitäten bleiben dank (8.52) bewahrt.

Damit ist die Renormierung von (8.29–8.31) erfolgt. Wie gelangt man aber zu den Gegentermen (8.38, 8.46, 8.50)? Dazu gehen wir von der Lagrange–Dichte (6.1) aus,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_{(0)\nu})(\partial^\mu A_{(0)}^\nu) + \bar{\Psi}_{(0)}\gamma^\mu(i\partial_\mu - e_0 A_{(0)\mu})\Psi_{(0)} - m_0 \bar{\Psi}_{(0)}\Psi_{(0)}$$

wobei wir die darin vorkommenden Parameter e_0, m_0 und Felder $A_{(0)}, \Psi_{(0)}, \bar{\Psi}_{(0)}$ als **nackt** auffassen, s. S. 109. Fasst man $-e_0 \bar{\Psi}_{(0)}\gamma^\mu A_{(0)\mu}\Psi_{(0)}$ als Störterm auf, so müssen die nackten Grössen wie auf S. 109 divergent gewählt werden, um endliche physikalische Resultate zu erzielen. Stattdessen führt man **renormierte** Parameter und Felder ein,

$$\begin{aligned} A_{(0)}^\mu &=: Z_3^{1/2} A_\mu, & \Psi_{(0)} &=: Z_2^{1/2} \Psi, \\ m_0 &=: Z_0 Z_2^{-1} m, & e_0 &=: Z_3^{-1/2} e. \end{aligned} \quad (8.54)$$

Dann ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}Z_3(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + Z_2 \cdot \bar{\Psi}\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu)\Psi - Z_0 m \bar{\Psi}\Psi,$$

also $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_W$ mit

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \bar{\Psi}\gamma^\mu i\partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi}\Psi, \quad (8.55)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= -e \bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi \\ &\quad -\frac{1}{2}\Delta_3(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \bar{\Psi}(\Delta_2 i\gamma^\mu \partial_\mu - \Delta_0 m)\Psi - e\Delta_2 \bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi, \end{aligned} \quad (8.56)$$

wobei $Z_i =: 1 + \Delta_i$ ($i = 0, 2, 3$): \mathcal{L}_W besteht aus der Wechselwirkung $-e \bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu \Psi$, sowie aus den Gegentermen (8.38, 8.46, 8.50) mit $\Delta_1 = \Delta_2$.

Man hätte zunächst auch eine unabhängige Renormierung für

$$e_0 =: Z_1 Z_2^{-1} Z_3^{-1/2} e \quad (8.57)$$

vorsehen können. Im letzten Term (8.56) wäre dann Δ_2 durch $\Delta_1 = Z_1 - 1$ zu ersetzen. Nun wäre auch

$$e_0 A_{(0)}^\mu = \frac{Z_1}{Z_2} e A^\mu. \quad (8.58)$$

Bei einer Eichtransformation

$$A_{(0)}^\mu \longrightarrow A_{(0)}^\mu + \partial^\mu \chi_0, \quad \text{bzw.} \quad A^\mu \longrightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi \quad (8.59)$$

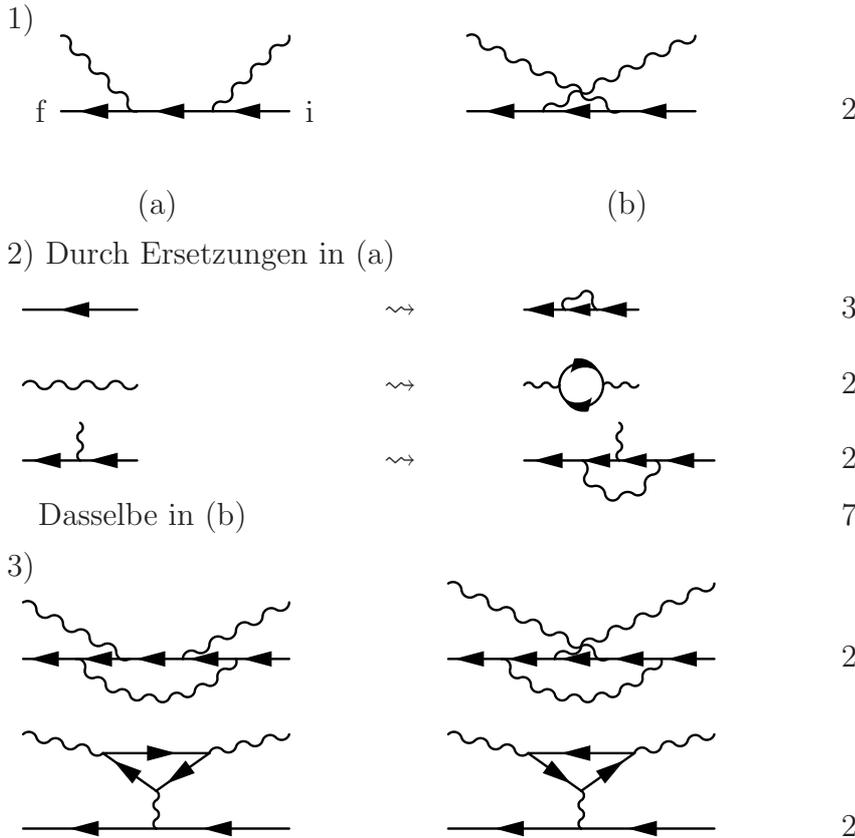
$$\Psi_{(0)} \longrightarrow e^{-ie_0\chi_0}\Psi_{(0)}, \quad \text{bzw.} \quad \Psi \longrightarrow e^{-ie\chi}\Psi \quad (8.60)$$

folgt einerseits aus (8.58, 8.59) $e_0\chi_0 = (Z_1/Z_2)e\chi$, andererseits erfordert (8.60) und die Eichsymmetrie, dass $e^{-ie\chi} = R(e^{-ie_0\chi_0})$, wobei $R : U(1) \rightarrow U(1)$ ein Isomorphismus ist. Die einzigen sind aber $R(z) = z$ oder \bar{z} , also $e\chi = e_0\chi_0$ (bis aufs Vorzeichen) und somit

$$Z_1 = Z_2; \quad (8.61)$$

insbesondere wird (8.57) zu (8.54).

Die konkrete Bedeutung der Renormierung für die Störungsrechnung soll am Beispiel der Compton-Streuung, s. S. 100, illustriert werden. Bis Ordnung e^4 tragen 20 Diagramme (ohne Gegenterme) zur Amplitude bei:



Die Beiträge 2), zusammen mit den Gegentermen, sind dadurch berücksichtigt, dass man neu die Diagramme 1) berechnet mit renormierten Propagatoren und Vertizes (8.29-8.31)

$$\frac{i}{\not{p} - m - e^2\Sigma_R(\not{p}) + i0}, \quad \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2(1 - e^2\Pi_R(k^2)) + i0}, \quad -ie(\gamma^\mu + e^2\Gamma^\mu(p', p)).$$

Im Vergleich zu vorher, s. (7.34), liefert dies zusätzliche Beiträge $\mathcal{O}(e^4)$. Die Diagramme 3) sind endlich (s. unten), und ebenfalls $\mathcal{O}(e^4)$; die letzten beiden kompensieren sich gegenseitig nach Furrys Lemma, s. S. 100.

An diesem Beispiel sieht man auch, dass die getroffene Wahl (i–iii) der endlichen additiven Konstanten für das Resultat unwesentlich ist (anders für (iv)):

(i), bzw. Δ_0 . Falls nicht mehr verlangt wird, dass der Parameter m_R in (8.54) mit der

physikalischen Masse m übereinstimmt, so soll die Singularität des renormierten Fermionpropagators immer noch bei $\not{p} = m$ liegen. Somit kompensiert sein Nenner den Faktor $\not{p} - m$ aus LSZ.

(ii, iii) bzw. Δ_2, Δ_3 . Bei anderer Wahl wäre $Z_i^{-1} = 1 - \Delta_i^F \neq 1$ ($i = 2, 3$). Für jede Fermion- bzw. Photonlinie kommt ein Faktor Z_2 , bzw. Z_3 hinzu, der zu je $Z_i^{1/2}$ auf ihre beiden Vertizes verteilt werden kann. Ist einer davon ein äusserer Vertex, so wird dadurch der Faktor $Z_i^{-1/2}$ aus (7.33) kompensiert.

(iv) bzw. Δ_1 . Für jeden inneren Vertex kommt ein Faktor $Z_1^{-1} := 1 - \Delta_1^F$ hinzu. Insgesamt ist jeder Faktor e der inneren Vertizes zu ersetzen durch

$$Z_1^{-1} \cdot Z_3^{1/2} (Z_2^{1/2})^2 \cdot e.$$

Hier ist aber $Z_3^{1/2} e$ die physikalische Ladung (wie auf S. 116 definiert). Also erfährt das Resultat keine Änderung, falls (8.61), d.h. die Ward-Identität, gilt.

8.4 Renormierung in höherer Ordnung

Das Renormierungsprogramm der QED, s. (8.55, 8.56), in beliebiger Ordnung lautet: Gesucht sind formale Potenzreihen in e^2 (oder $\alpha = e^2/4\pi$)

$$\Delta_i = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_{i,n}(\Lambda) \alpha^n \quad (i = 0, 2, 3)$$

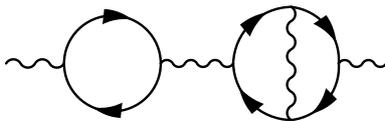
mit Koeffizienten $\xi_{i,n}(\Lambda)$ die von einem Regulator Λ , z.B. $\Lambda = M \rightarrow \infty$ (Pauli-Villars) oder $\Lambda = d \rightarrow 4$ (dimensionelle Regularisierung) abhängen. Die Koeffizienten $\xi_{i,n}(\Lambda)$ sind sukzessive so zu bestimmen, dass in jeder festen Ordnung α^n jede Greensfunktion

$$\lim_{\Lambda} G(p_i, k_i; e, m, \underline{\xi}_i(\Lambda))$$

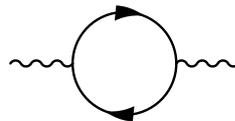
existiert und endlich ist. (Wir unterdrücken hier die „technische“ Photonmasse $\lambda^2 > 0$). Die $\underline{\xi}_i(\Lambda)$ sind dadurch nicht eindeutig bestimmt, und entsprechend die Bedeutung von e, m noch nicht an physikalische Grössen geknüpft. Zwei Sätze $(e, m, \underline{\xi}_i)$ stellen dieselbe QED dar, falls sie durch eine endliche Renormierung verbunden sind.

Die Umsetzung des Renormierungsprogramms soll anhand einer allgemeinen QFT mit bosonischen Spin 0 oder 1 Feldern (Propagatoren $\sim k^{-2}$ im Ultravioletten) und/oder fermionischen Spin 1/2 Feldern (Propagatoren $\sim \not{k}^{-1}$) diskutiert werden, wobei einfachheitshalber die Wechselwirkung keine Ableitungen enthalten soll. Divergenzen können anhand **1-Teilchen-irreduzibler** Diagramme untersucht werden; diese bleiben beim Entfernen einer beliebigen Linie zusammenhängend.

Beispiel: QED



nicht 1-Teilchen irreduzibel



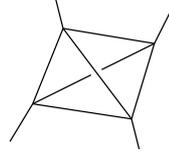
1-Teilchen irreduzibel



Für ein Diagramm G sei

$$\begin{aligned}
 V &= \# \text{ innerer Vertizes} \\
 n_B &= \# \text{ innerer bosonischer Linien} \\
 m_B &= \# \text{ äusserer bosonischer Linien} \\
 n_F, m_F &: \text{ dasselbe für die fermionischen Linien} \\
 L &= \# \text{ unabhängiger Schleifen, d.h. mit frei} \\
 &\quad \text{wählbaren Schleifenimpulse } (k_1, \dots, k_L) =: k
 \end{aligned} \tag{8.62}$$

Beispiel: φ^4 . Das Diagramm in der Gestalt eines Tetraeders hat $L = 3$.



Bei der Ersetzung $k \rightsquigarrow \lambda k$ ergeben sich für $\lambda \rightarrow \infty$ folgende Faktoren:

$$\begin{array}{ll}
 \longrightarrow & \longrightarrow \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\
 \text{~~~~~} & \longrightarrow \mathcal{O}(\lambda^{-2}) \\
 d^4 k_i & \longrightarrow \mathcal{O}(\lambda^4),
 \end{array}$$

die folgende Definition motivieren: Der **oberflächliche Divergenzgrad** eines Diagramms G ist

$$\omega(G) := 4L - 2n_B - n_F.$$

Bemerkung. $\omega(G) < 0$ ist eine notwendige, aber keine hinreichende Bedingung für Konvergenz (ohne Regularisierung) des k -Integrals für G . Das Diagramm kann nämlich trotzdem divergente Teildiagramme enthalten.

Unter den Zahlen (8.62) liegen Beziehungen vor:

1.

$$L = n_B + n_F - (V - 1),$$

da jeder Vertex eine $\delta^{(4)}$ -Funktion liefert, die die Anzahl Impulse $n_B + n_F$ um je 1 verringert. (Ausnahme: $\delta^{(4)}(\Sigma \text{ einlaufende Impulse})$, was abgespalten wird, s. (7.26).) Somit ist

$$\omega(G) - 4 = 2n_B + 3n_F - 4V.$$

2. Führt man die „Dimension“ des Vertex ein,

$$\omega := \# B\text{-Valenzen} + \frac{3}{2} \# F\text{-Valenzen},$$

(vorausgesetzt, es gibt nur eine Sorte Vertizes), so ist

$$\begin{aligned}
 V \cdot \omega &= 2n_B + m_B + \frac{3}{2}(2n_F + m_F) \\
 &= 2n_B + 3n_F + m_B + \frac{3}{2}m_F,
 \end{aligned}$$

also

$$\omega(G) - 4 = V(\omega - 4) - m_B - \frac{3}{2}m_F : \tag{8.63}$$

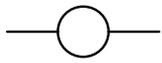
der oberflächliche Divergenzgrad ist ausgedrückt durch die Ordnung V der Störungsrechnung und die Greensfunktion (m_B, m_F) , zu welcher das Diagramm G beiträgt.

Beispiel: φ^3 . Hier ist $\omega = 3$, also

$$\omega(G) = 4 - V - m_B,$$

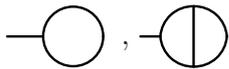
und damit gibt es nur endlich viele oberflächlich divergente Diagramme. Diese sind

- $m_B = 2: V \leq 2$



Die Divergenz dieses Diagramms wurde durch den Gegenterm (8.20) kompensiert.

- $m_B = 1: V \leq 3$



Das erste Diagramm kommt wegen der Normalordnung nicht vor; das zweite erfordert einen Gegenterm:

$$-\lambda'\varphi \quad \longrightarrow \quad \text{---} \blacksquare$$

Beide Gegenterme erhält man durch Umschreiben der Lagrange-Dichte (in nackten Größen ausgedrückt)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi) - m_0^2\varphi^2 - \frac{\lambda^3}{3!}\varphi^3 - \lambda'\varphi :$$

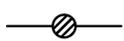
Gegenüber (8.4) „erzeugt“ die Renormierung eine zusätzliche Kopplung $-\lambda'\varphi$.

Beispiel: QED. Hier ist $\omega = 1 + (3/2) \cdot 2 = 4$, also

$$\omega(G) = 4 - \frac{3}{2}m_F - m_B :$$

es gibt ∞ -viele oberflächlich divergente Diagramme (da $\omega(G)$ mit V nicht abnimmt), aber nur endlich viele oberflächlich divergente Greensfunktionen. Diese sind:

- $m_B = 0, m_F = 2: \omega(G) = 1$



Nach Regularisierung erweisen sich diese Diagramme als nur logarithmisch divergent, s. (8.34).

- $m_B = 1, m_F = 2: \omega(G) = 0$



- $m_B = 2, m_F = 0: \omega(G) = 2$



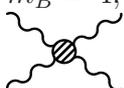
Diagramme erweisen sich nach Regularisierung als bloss logarithmisch divergent, s. (8.43, 8.44).

- $m_B = 3, m_F = 0: \omega(G) = 1$



Jedes Diagramm enthält mindestens eine fermionische Schleife ungerader Länge: Sie kompensieren sich nach Furrys Lemma, s. S. 100.

- $m_B = 4, m_F = 0: \omega(G) = 0$



Diese Diagramme erweisen sich als konvergent.

Nur die ersten drei Greensfunktionen, d.h. (8.29-8.31), weisen oberflächliche Divergenzen auf, die kompensiert werden müssen. In Ordnung $\mathcal{O}(e^2)$ geschah dies durch Gegenterme (8.38, 8.46, 8.50) mit divergenten Koeffizienten Δ_i derselben Ordnung. In höherer Ordnung kommen weitere oberflächlich divergente Diagramme hinzu, z.B.



zur Selbstenergie in $\mathcal{O}(e^4)$. Es ist plausibel (wenn auch nicht evident, s. unten), dass diese durch (ebenfalls divergente) Beiträge höherer Ordnung zu den Δ_i 's der **selben** Gegenterme (8.38, 8.46, 8.50) endlich gemacht werden können.

Diese Schlussfolgerungen können anhand von (8.63) verallgemeinert werden:

- $\omega < 4$: **Superrenormierbare QFT**. $\omega(G)$ nimmt mit der Ordnung V der Störungstheorie ab; es gibt nur endlich viele oberflächlich divergente Diagramme, die nach endlich vielen Gegentermen mit Divergenzen in endlich vielen Ordnungen verlangen.
- $\omega = 4$: **Renormierbare QFT**. Erforderlich sind endlich viele Gegenterme mit Divergenzen in allen Ordnungen der Störungsrechnung.
- $\omega > 4$: **Nicht renormierbare QFT**. Erforderlich sind ∞ viele Gegenterme (mit Divergenzen in allen Ordnungen). Im Unterschied zu $\omega \leq 4$ enthält die Lagrange-Dichte (samt Gegenterme) ∞ viele Parameter, womit die QFT keine fundamentale, physikalische Interpretation zulässt. Solche Theorien können aber als effektive Feldtheorien auftreten, deren Gültigkeit auf Energien beschränkt ist, die viel kleiner als einen festen, d.h. nicht divergierenden, Cutoff sind.

Soweit haben Gegenterme bloss oberflächliche Konvergenz gewährleistet. Es gilt aber (ohne Beweis):

Satz (Weinberg) Ist ein Diagramm G samt allen seiner Teildigramme (\equiv Teilmenge von Schleifen) oberflächlich konvergent, so ist G konvergent.

Die Anwendung des Satzes auf ein Diagramm geschieht zusammen mit seinen Gegendiagrammen: Diagramme, die aus der Ersetzung eines oder mehrerer divergenten Teildigramme durch ihre Gegenterme entstehen.

Beispiel: φ^3

$$(8.64)$$

Da $\text{---}\bigcirc\text{---} + \text{---}\times\text{---}$ konvergent ist, und die Diagramme (8.64) oberflächlich konvergent sind, ist (8.64) insgesamt konvergent. Analoges gilt für andere superrenormierbare QFT's.

Beispiel: QED. Das oberflächlich divergente Diagramm

(8.65)

weist eine **überlappende Divergenz** auf, die die Divergenz der Teildiagramme

(8.66)

übertrifft, d.h.

(8.67)

ist immer noch divergent. Grund dafür ist, dass das linke Diagramm in (8.66) die Divergenz für $k \rightarrow \infty$ bei festem, oder zumindest beschränktem, äusseren Impuls k' wiedergibt; rechts dasselbe, mit k, k' vertauscht. Das Integrationsgebiet für das Diagramm in (8.65) erstreckt sich aber auch über Bereiche wo $k, k' \rightarrow \infty$, gleich rasch. Es erweist sich, dass die Divergenz von (8.67) durch den Gegenterm $\sim \cancel{\times}$ (in Ordnung e^4) kompensiert wird. Die allgemeine, hierarchische Renormierungsvorschrift eines Diagramms und seiner Teildiagramme wurde durch Bogoliubov, Parasiuk, Hepp und Zimmermann gegeben.

8.5 Das anomale magnetische Moment des Elektrons

Als Anwendung der Renormierung berechnen wir den gyromagnetischen Faktor g für das magnetische Moment

$$\vec{m} = \frac{e}{2m} \cdot g \cdot \vec{S} \quad (8.68)$$

des Elektrons, wobei \vec{S} der Spin ist. Die 1-Teilchen Dirac-Theorie, s. (1.46), liefert $g = 2$. Dieses Resultat erhält man aus dem nicht-relativistischen Limes der Dirac Gleichung oder, allgemeiner, indem man bei der Kopplung an ein äusseres e.m. Feld Matrixelemente zwischen Elektron- und Positronzuständen vernachlässigt. In der Tat, für ein statisches äusseres e.m. Feld $A_c^\mu(x) = (0, \vec{A}_c(\vec{x}))$ ist die Störung

$$H_W = e \int d^3x \bar{\Psi}(0, \vec{x}) A_c(\vec{x}) \Psi(0, \vec{x}).$$

Ihre Matrixelemente zwischen den 1-Elektronzuständen

$$|p, \alpha\rangle = b_\alpha^*(p)|0\rangle \quad (\alpha = 1, 2; p \in V_m) \quad (8.69)$$

sind

$$\langle q, \beta | H_W | p, \alpha \rangle = (2\pi)^{-3} e \int d^3x \bar{u}^{(\beta)}(q) A_c(\vec{x}) u^{(\alpha)}(p) e^{i(\vec{p}-\vec{q})\vec{x}} \quad (8.70)$$

(verwende $\langle 0 | \Psi(x) b_\alpha^*(p) | 0 \rangle = (2\pi)^{-3/2} u^{(\alpha)}(p) e^{-ipx}$). Anders gesagt: Beschreibt man die Zustände (8.69) durch ihre Wellenfunktion

$$(2\pi)^{-3/2} u^{(\alpha)}(p) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}, \quad (8.71)$$

so ist $H_W \cong e\vec{A}_c(\vec{x})$. Die Gordon-Identität lautet

$$\bar{u}^{(\beta)}(q)\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p) = \frac{1}{2m}\bar{u}^{(\beta)}(q)[(q+p)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(q-p)_\nu]u^{(\alpha)}(p) \quad (8.72)$$

mit $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$; insbesondere erfüllt $S^i = \frac{1}{2}\sigma^{i+1, i+2}$ die Vertauschungsrelationen des Spins, $[S^{i+1}, S^{i+2}] = iS^i$. Somit ist

$$e\bar{u}^{(\beta)}(q)\vec{A}_c(\vec{x})u^{(\alpha)}(p) = \frac{e}{2m}\bar{u}^{(\beta)}(q)[(q+p)^\mu A_{c\mu}(\vec{x}) + i\sigma^{\mu\nu}(q-p)_\nu A_{c\mu}(\vec{x})]u^{(\alpha)}(p). \quad (8.73)$$

Im untersuchten statischen Fall ist der Beitrag des ersten Terms zu (8.70) gleich dem Matrixelement zwischen Zuständen (8.71) des Operators

$$-\frac{e}{2m}(\vec{p} \cdot \vec{A}_c(\vec{x}) + \vec{A}_c(\vec{x}) \cdot \vec{p}) \otimes \mathbf{1} = -\frac{1}{2}(\vec{j}(\vec{p}) \cdot \vec{A}_c(\vec{x}) + \vec{A}_c(\vec{x}) \cdot \vec{j}(\vec{p})) \otimes \mathbf{1}, \quad (8.74)$$

wobei $\mathbf{1}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ und, s. (8.72),

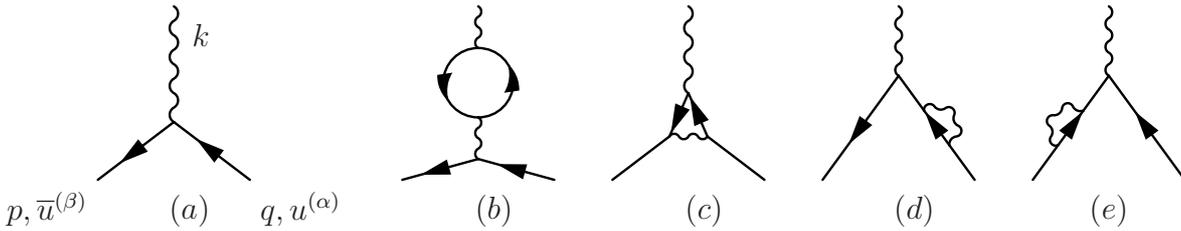
$$\vec{j}(\vec{p}) = e\frac{\vec{p}}{m} = e\frac{\bar{u}^{(\alpha)}(p)\vec{\gamma}u^{(\alpha)}(p)}{\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\alpha)}(p)}$$

die Stromdichte im Zustand (8.71) ist. Wegen des Faktors $\mathbf{1}$ ist der Spin nicht an dieser Störung beteiligt. (Im nichtrelativistischen Limes entspricht (8.74) dem Term $\mathcal{O}(e)$ der kinetischen Energie $(2m)^{-1}(\vec{p} - e\vec{A}_c(\vec{x}))^2$). Der zweite Term liefert wegen $-i(\vec{q} - \vec{p})e^{-i(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{x}} = \partial_{\vec{x}}e^{-i(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{x}}$ und partieller Integration, sowie $\partial_\mu A_{c\nu} - \partial_\nu A_{c\mu} = F_{\mu\nu}$, den Operator

$$\frac{e}{4m}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}(\vec{x}) = -\frac{e}{2m} \cdot 2\vec{S} \cdot \vec{B} \equiv -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (8.75)$$

(da $F_{i+1, i+2} = -B_i$), was $g = 2$ beweist.

Nun sollen die Korrekturen zum effektiven Hamiltonoperator H_W , d.h. (8.74)+(8.75), berechnet werden, die durch die quantenmechanischen Fluktuationen $A^\mu(x)$ um $A_c^\mu(\vec{x})$ verursacht werden. Statt (8.70) sind die Diagramme



(mit amputierten äusseren Linien) zu berechnen, vgl. (7.40). Nach Renormierung liefern (d,e) bloss Korrekturen zu (a), die auf der Massenschale $V_m \ni q, p$ verschwinden, s. (8.41). Nicht so für (b), da $k = q - p$ nicht auf der Massenschale des Photons liegt. Der gesamte Beitrag (mit $q^0 = p^0$) der Diagramme (a-c) ist, der Reihe nach,

$$\begin{aligned} M_{\beta\alpha}(q, p) &= e\bar{u}^{(\beta)}(q)\gamma^\mu A_{c\mu}(\vec{k})u^{(\alpha)}(p) \\ &+ e\bar{u}^{(\beta)}(q)\gamma^\mu u^{(\alpha)}(p) \cdot (-ie^2\Pi_R(k^2))A_{c\mu}(\vec{k}) \\ &+ e\bar{u}^{(\beta)}(q)(e^2\Gamma^\mu(q, p))u^{(\alpha)}(p)A_{c\mu}(\vec{k}), \end{aligned} \quad (8.76)$$

wobei, vgl. (8.43, 8.44)

$$-ie^2\Pi_2(k^2) \cdot \frac{-ig}{k^2 + i0} = e^2\Pi_R(k^2)$$

benutzt wurde. Wir untersuchen (8.76) im Limes, wo $A_c^\mu(\vec{x})$ langsam veränderlich ist (auf der Skala m^{-1}), sodass bloss das Verhalten für $k \rightarrow 0$ zählt. Dann ist der zweite Term (8.76) $\mathcal{O}(k^2)$, s. (8.47), was für die Berechnung von g unwesentlich ist. Eine längere Rechnung liefert für den dritten Term

$$e\bar{u}^{(\beta)}(q) \left(F_1(k^2)\gamma^\mu - F_2(k^2) \cdot \frac{i}{2m}\sigma^{\mu\nu}k_\nu \right) A_{c\mu}(\vec{k})u^{(\alpha)}(p) \quad (8.77)$$

mit $F_1(0) = 0$, wobei die Renormierungsbedingung (8.52) eingeht; und

$$F_2(k^2) = -\frac{\alpha m^2}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^z dx \frac{z(1-z)}{z^2 m^2 - x(z-x)k^2},$$

unabhängig von der Renormierung, s. (8.50). Insbesondere ist $F_2(0) = -\alpha/(2\pi)$. Der erste Term (8.76) reproduziert (8.73). Vergleich mit (8.77) zeigt

$$g = 2(1 - F_2(0)) = 2 + \frac{\alpha}{\pi} \quad (8.78)$$

(Schwinger, 1949). Stellt man g dar als $g = 2(1 + a)$, so ist experimentell (Gabrielse)

$$a_{\text{exp}} = 1'159'652'180,85(76) \cdot 10^{-12}$$

(in Klammern die experimentelle Unsicherheit). Berücksichtigt man, über (8.78) hinaus, auch 7 Diagramme in $\mathcal{O}(\alpha^2)$, 72 in $\mathcal{O}(\alpha^3)$ und 891 in $\mathcal{O}(\alpha^4)$, so resultiert (Cvitanovic, Kinoshita)

$$a_{\text{th}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\pi} - 0,328'478'965 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1,181'241 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1,914'4 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4.$$

Aus dem Vergleich $a_{\text{exp}} \equiv a_{\text{th}}$ ergibt sich die beste Bestimmung der Feinstrukturkonstanten:

$$\alpha^{-1} = 137,035'999'710(96). \quad (8.79)$$

Sie stimmt mit grosser Genauigkeit mit der besten Messung überein, die unabhängig von g ist:

$$\alpha^{-1} = 137,035'998'78(91) \quad (8.80)$$

(Oszillationen von Rb-Atomen in optischen Fallen), aber auch mit dem Quanten-Hall-Effekt. Die Übereinstimmung zwischen (8.79, 8.80) macht die QED zur präzisesten physikalischen Theorie!