

## Theoretische Physik, Übung 12.

---

FS15

Abgabe: 20.05.15

### 1. Entropie eines gemischten Zustands

Die Entropie ist ein Mass dafür, wie gemischt ein Zustand  $P$  ist. Sie ist definiert als

$$s(P) = -\operatorname{tr}(P \log P).$$

a) Zeige, dass bei einer Mischung zweier Zustände die Entropie zunimmt:

$$s(\lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2) \geq \lambda s(P_1) + (1 - \lambda)s(P_2), \quad (0 \leq \lambda \leq 1), \quad (1)$$

wobei Gleichheit genau dann gilt, falls  $\lambda = 0, 1$  oder  $P_1 = P_2$ .

*Hinweis:* Für eine konvexe Funktion  $f$ , d.h.

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

und Matrizen  $A = A^*$ ,  $B = B^*$  gilt

$$\operatorname{tr}(f(B)) \geq \operatorname{tr}(f(A) + (B - A)f'(A))$$

(Klein Ungleichung). Ist ferner  $f$  streng konvex, so gilt Gleichheit genau für  $A = B$ .

b) Zeige, dass für Dichtematrizen über einem unitären Raum (Hilbertraum) der Dimension  $d$

$$0 \leq s(P) \leq \log d$$

gilt, mit Minimum genau für reine Zustände und Maximum für  $P = \mathbf{1}/d$ . Bestimme Minimum und Maximum.