Theoretische Physik, Übung 1.

FS15 *Abgabe: 24.02.15*

1. Identitäten der Vektoranalysis

Rechnungen, die in der Elektrodynamik auftreten, verwenden oft folgende Identitäten. i) Vektoridentitäten ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren)

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) \;, \\ \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\, \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\, \vec{c} \;, \\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \;. \end{aligned}$$

ii) Vektorfeld-Identitäten ($f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Skalarfeld, $\vec{v}, \vec{w} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{\nabla} f &= 0 \;, \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} &= 0 \;, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{v} &= \vec{\nabla}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v} \;. \end{aligned}$$

iii) Produktregeln

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\vec{v}) &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f + f \operatorname{div} \vec{v} \;, \\ \operatorname{rot}(f\vec{v}) &= \vec{\nabla} f \wedge \vec{v} + f \operatorname{rot} \vec{v} \;, \\ \operatorname{div}(\vec{v} \wedge \vec{w}) &= \vec{w} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{v} \cdot \operatorname{rot} \vec{w} \;, \\ \vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{w}) &= (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{w} + (\vec{w} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{v} \wedge \operatorname{rot} \vec{w} + \vec{w} \wedge \operatorname{rot} \vec{v} \;. \end{aligned}$$

iv) Kettenregeln ($\vec{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ Vektorfeld auf $\mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{P}(f(\vec{x})) &= \dot{\vec{P}}(f(\vec{x})) \cdot \vec{\nabla} f(\vec{x}) \;, \\ \operatorname{rot} \vec{P}(f(\vec{x})) &= \vec{\nabla} f(\vec{x}) \wedge \dot{\vec{P}}(f(\vec{x})) \;, \end{aligned}$$

mit $\dot{\vec{P}} = \partial \vec{P} / \partial t$.

v) Anwendungen der Integralsätze von Gauss und Stokes ($V \subset \mathbb{R}^3$ Gebiet, ∂V Rand mit Oberflächenelement $\mathrm{d}\vec{o}$, $S \subset \mathbb{R}^3$ Fläche mit Oberflächenelement $\mathrm{d}\vec{o}$, ∂S Rand mit Linienelement $\mathrm{d}\vec{s}$)

$$\begin{aligned} \int_V (f \Delta g + \vec{\nabla} f \cdot \vec{\nabla} g)\, \mathrm{d}^3 x &= \int_{\partial V} f \vec{\nabla} g \cdot \mathrm{d}\vec{o} \;, \\ \int_V (f \Delta g - g \Delta f)\, \mathrm{d}^3 x &= \int_{\partial V} (f \vec{\nabla} g - g \vec{\nabla} f) \cdot \mathrm{d}\vec{o} \;, \\ \int_V \vec{\nabla} f\, \mathrm{d}^3 x &= \int_{\partial V} f\, \mathrm{d}\vec{o} \;, \\ \int_S \mathrm{d}\vec{o} \wedge \vec{\nabla} f &= \int_{\partial S} f\, \mathrm{d}\vec{s} \;. \end{aligned}$$

2. Laplace-Operator in beliebigen Koordinaten

Ein Riemannscher Raum ist zumindest für praktische Zwecke durch die Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n) = x \in \mathbb{R}^n$ seiner Punkte und einer **Metrik** $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$ gegeben, die die Länge $\mathrm{d}s$ eines Bogenelements bestimmt:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \ ,$$

wobei $g(x) := \det(g_{ij}(x))_{i,j=1}^n > 0$.

Unter Koordinatentransformationen $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x)$ soll $\mathrm{d}s$ invariant sein. Hingegen transformieren die Differentiale,

$$\mathrm{d}\bar{x}^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\,\mathrm{d}x^j \ ,$$

und die Metrik demzufolge gemäss

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}) = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}(x)\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j} \ . \tag{1}$$

i) Verifiziere dies.

Der **Laplace-Operator** zur Metrik $g_{ij}(x)$ ist

$$\Delta_g = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\,\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j} \ , \tag{2}$$

wobei $(g^{ij}(x))$ die inverse Matrix zu $(g_{ij}(x))$ ist.

Beispiel: Die Euklidische Metrik im $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{x}^{\,2}$, entspricht $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$ und

$$\Delta = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2} \ . \tag{3}$$

ii) Zeige, dass Δ invariant ist unter Koordinatentransformationen:

$$(\Delta_{\bar{g}}\bar{f})(\bar{x}) = (\Delta_g f)(x) \tag{4}$$

für jede Funktion $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$.

Hinweis: Zeige und verwende, dass

$$\sqrt{\bar{g}(\bar{x})}\,\mathrm{d}^n\bar{x} = \sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}^n x \ ,$$
$$\int (\Delta_{\bar{g}}\bar{f})(\bar{x}))\bar{h}(\bar{x})\sqrt{\bar{g}(\bar{x})}\,\mathrm{d}^n\bar{x} = \int (\Delta_g f)(x)h(x)\sqrt{g(x)}\,\mathrm{d}^n x \ ,$$

mit $\bar{h}(\bar{x}) = h(x)$. iii) Anwendung: Drücke (3) in Kugelkoordinaten (r, θ, ϕ) aus:

$$x^1 = r\sin\theta\cos\phi \ , \quad x^2 = r\sin\theta\sin\phi \ , \quad x^3 = r\cos\theta \ .$$